

Aufgabe A

$$a) \vec{R}_A(t_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{21} - 0 \\ 2 - 0 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} \sqrt{21} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m, \quad |\vec{R}| = \sqrt{\sqrt{21}^2 + 2^2} m = 5 m$$

$$\phi_0 = \arccos \frac{\vec{R}_{\text{beg}} \cdot \vec{R}_A(t_0)}{|\vec{R}|^2} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{21} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m}{25 m^2} = \arccos \frac{5 m \cdot \sqrt{21} m}{25 m^2}$$

$$\text{alternativ: } \phi_0 = \arcsin \frac{2 m}{5 m} = \arcsin 0,4 = 0,411_{s1} \text{ rad}$$

$$\vec{\phi}_B(t_1) = \frac{1}{2} \vec{\alpha} t_1^2 + \vec{\omega}_0 t_1 + \vec{\phi}_A(t_0); \quad \vec{\alpha} = \vec{0}; \quad \omega_0 = 0,05 s^{-1}; \quad t_1 = 10 s$$

$$\phi_B(t_1)_z = \omega_{0,z} t_1 + \phi_A(t_0)_z = 0,05 s^{-1} \cdot 10 s + 0,411_{s1} = 0,911_{s1} \text{ rad} \rightarrow 52,2_{25}^\circ$$

$$\vec{R}_B(t_1) = |\vec{R}| \begin{pmatrix} \cos \phi(t_1) \\ \sin \phi(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = 5 m \begin{pmatrix} \cos 0,911_{s1} \\ \sin 0,911_{s1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,06_{27} \\ 3,95_{21} \\ 0 \end{pmatrix} m$$

→ B(3,06 | 3,95 | 4) m zur Zeit t_1 .

b) entweder:

$$\vec{v}_T(t_1) = \vec{\omega} \times \vec{R}_B(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,05 \end{pmatrix} s^{-1} \times \begin{pmatrix} 3,06_{27} \\ 3,95_{21} \\ 0 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 0,05 \cdot 3,95_{21} \\ 0,05 \cdot 3,06_{27} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} = \begin{pmatrix} -0,197_6 \\ +0,153_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} \text{ und}$$

$$\vec{a}_{zp}(t_1) = \vec{\omega} \times \vec{v}_T(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,05 \end{pmatrix} s^{-1} \times \begin{pmatrix} -0,197_6 \\ +0,153_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} = \begin{pmatrix} -0,05 \cdot 0,153_1 \\ -0,05 \cdot 0,197_6 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2} = \begin{pmatrix} -7,65_6 \cdot 10^{-3} \\ -9,88 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$

oder

$$\vec{v}_T = |\omega| |R| \vec{e}_T = |\omega| |R| \begin{pmatrix} -\sin \phi(t_1) \\ \cos \phi(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -0,197_6 \\ +0,153_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} \text{ und}$$

$$\vec{a}_{zp}(t_1) = |\omega|^2 |R| \vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{e}_R) = |\omega|^2 |R| \vec{e}_{zp} = -|\omega|^2 |R| \vec{e}_R =$$

$$-|\omega|^2 |R| \begin{pmatrix} \cos \phi(t_1) \\ \sin \phi(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -7,65_6 \cdot 10^{-3} \\ -9,88 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$|\vec{a}_{zp}| = \sqrt{(-7,65_6 \cdot 10^{-3})^2 + (-9,88_0 \cdot 10^{-3})^2} m/s^2 = 1,24_9 \cdot 10^{-2} m/s^2$$

$$c) |\omega| = 2\pi f$$

$$f = \frac{|\omega|}{2\pi} = \frac{0,05 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 7,95_{77} \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \dots = 125,66 \text{ s} = 2 \text{ min } 5,6 \text{ s}$$

$$N = f \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = \dots = 0,477_{46} \text{ min}^{-1}$$

Aufgabe B

$$a) \quad \vec{R}_A(t_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{20} - 0 \\ 4 - 0 \\ 5 - 5 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} m ; \quad \vec{R}_B(t_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{4} - 0 \\ 20 - 0 \\ 5 - 5 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{\sqrt{20}^2 + 4^2} m = 6 m$$

$$\phi_A(t_0) = \arccos \frac{\vec{R}_{\text{BZG}} \cdot \vec{R}_A(t_0)}{|\vec{R}|^2} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} m}{36 m^2} =$$

$$\arccos \frac{6 m \cdot \sqrt{20} m}{36 m^2} = 0,729_7^{\text{rad}} \rightarrow 41,8^\circ$$

$$\text{alternativ: } \phi_A(t_0) = \arcsin \frac{4 m}{6 m} = \dots \quad \text{oder} \quad \phi_A(t_0) = \arccos \frac{\sqrt{20} m}{6 m} = \dots$$

$$\phi_B(t_1) = \phi_A(t_0) + \Delta\phi = 0,729_7 + \arccos \frac{\vec{R}_A(t_0) \cdot \vec{R}_B(t_1)}{|\vec{R}|^2} =$$

$$0,729_7 + \arccos \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{20} \\ 0 \end{pmatrix} m \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} m}{36 m^2} = 0,729_7 + \arccos \frac{2 \cdot 4 m \cdot \sqrt{20} m}{36 m^2} =$$

$$0,729_7 + 0,111_3 = 0,841_0 \rightarrow 48,1_8^\circ, \text{ wobei: } \Delta\phi = 0,111_3 \rightarrow 6,37_9^\circ$$

$$\text{Aus: } \vec{\Phi}_B(t_1) = \frac{1}{2} \vec{\alpha} t_1^2 + \vec{\omega}_0 t_1 + \vec{\Phi}_A(t_0) \text{ ergibt sich mit } t_0 = 0 s \text{ und } t_1 = 12 s, \text{ sowie } |\omega_0|$$

$$\vec{\alpha} = \frac{2 \Delta\vec{\Phi}}{t_1^2} = \frac{2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,111_3 \end{pmatrix}}{(12 s)^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,00154_6 \end{pmatrix} s^{-2}; \rightarrow |\vec{\alpha}| = 0,00154_6 s^{-2}$$

$$|\vec{\Phi}_B(t_2)| = \frac{1}{2} |\vec{\alpha}| t_2^2 + |\vec{\Phi}_A(t_0)| = \frac{1}{2} \cdot 0,00154_6 s^{-2} \cdot (20 s)^2 + 0,729_7 = 1,039_0^{\text{rad}} \rightarrow 59,5_3^\circ$$

$$\vec{R}_D(t_2) = |\vec{R}| \begin{pmatrix} \cos \phi(t_2) \\ \sin \phi(t_2) \\ 0 \end{pmatrix} = 6 m \begin{pmatrix} \cos 1,03_9 \\ \sin 1,03_9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,04_2 \\ 5,17_4 \\ 0 \end{pmatrix} m \rightarrow D(3,04 | 5,15 | 5) m$$

$$b) \quad \vec{\omega}(t_2) = \frac{d\vec{\Phi}(t_2)}{dt} = \frac{d(1/2 \vec{\alpha} t_2^2 + \vec{\Phi}_0)}{dt} = \vec{\alpha} t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0154_6 \end{pmatrix} s^{-2} \cdot 20 s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0309_2 \end{pmatrix} s$$

$$\vec{v}_T(t_2) = \vec{\omega}(t_2) \times \vec{R}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0309_2 \end{pmatrix} s^{-1} \times \begin{pmatrix} 3,04_2 \\ 5,17_1 \\ 0 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} +0,159_8 \\ -0,0940_5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

$$|\vec{v}_T(t_2)| = \sqrt{(0,159_8)^2 + (-0,0940_5)^2} m/s = 0,185_5 m/s$$

$$\vec{a}_T(t_2) = \vec{\alpha} \times \vec{R}_T(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0154_6 \end{pmatrix} s^{-2} \times \begin{pmatrix} 3,04_2 \\ 5,17_1 \\ 0 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} -0,00799_7 \\ +0,00447_0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$|\vec{a}_T| = \sqrt{(-0,00799_7)^2 + (0,00447_0)^2} m/s^2 = 0,00927_8 m/s^2$$

$$c) \quad |\vec{\omega}(t_2)| = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|\vec{\omega}(t_2)|} = 203,14 s = 3,3859 min = 3 min 23,15 s$$

$$|\vec{a}_{zp}| = |\vec{\omega}|^2 |\vec{R}| = \frac{(2\pi)^2}{T^2} |\vec{R}| = \dots = 5,73_9 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

Aufgabe C

$$a) \Delta \phi_{0,1} = \phi(t_1) - \phi(t_0) = 0,912 - 0,412 = 0,500, \quad \Delta t_{0,1} = t_1 - t_0 = (10 - 0)s = 10s$$

$$\Delta \phi_{1,2} = \phi(t_2) - \phi(t_1) = 1,662 - 0,912 = 0,750, \quad \Delta t_{1,2} = t_2 - t_1 = (25 - 10)s = 15s$$

$$|\vec{\omega}_{0,1}| = \frac{\Delta \phi_{0,1}}{\Delta t_{0,1}} = \frac{0,500}{10s} = 0,05 s^{-1}, \quad |\vec{\omega}_{1,2}| = \frac{\Delta \phi_{1,2}}{\Delta t_{1,2}} = \frac{0,750}{15s} = 0,05 s^{-1}$$

$$|\vec{\omega}_{0,1}| = |\vec{\omega}_{1,2}| = \text{konst.} \rightarrow \text{gleichförmige Bewegung}$$

$$b) |\vec{\alpha}| = 0, \quad |\vec{\omega}_0| = 0,05 s^{-1} \rightarrow \vec{\phi}(t) = \vec{\omega}_0 t + \vec{\phi}_0 \rightarrow \frac{d\vec{\phi}(t)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}_0 t + \vec{\phi}_0)}{dt} = \vec{\omega}_0 \text{ d. h. zu}$$

jeder Zeit, auch bei $t_0 = 0s$, gibt es eine Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}_0| > 0$.

$$c) \vec{\phi}(t) = \vec{\omega}_0 t + \vec{\phi}_0$$

Weil die x- und die y-Komponenten der Vektoren dieser Gleichung den Wert Null haben, kann man für die z-Komponente eine vereinfachte Gleichung angeben: $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$.

$$\text{Mit } b(t_1) = \Delta \phi |\vec{R}(t_1)| = 2,5m \text{ ergibt sich } |\vec{R}(t_1)| = \frac{b(t_1)}{\Delta \phi} = \frac{2,5m}{0,5} = 5m$$

$$\vec{R}_A(t_1) = |\vec{R}| \begin{pmatrix} \cos \phi(t_1) \\ \sin \phi(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = 5m \begin{pmatrix} \cos 0,912 \\ \sin 0,912 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,06_0 \\ 3,95_3 \\ 0 \end{pmatrix} m \rightarrow A(3,06 | 3,95 | 7)m$$

$$\vec{R}_B(t_2) = |\vec{R}| \begin{pmatrix} \cos \phi(t_2) \\ \sin \phi(t_2) \\ 0 \end{pmatrix} = 5m \begin{pmatrix} \cos 1,662 \\ \sin 1,662 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,455_3 \\ +4,979_2 \\ 0 \end{pmatrix} m \rightarrow B(-0,455 | 4,98 | 7)m$$

$$d) |\vec{\omega}(t_2)| = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|\vec{\omega}|} = \frac{2\pi}{0,05s} = 125,66s = 2 \text{ min } 5,66s$$

e) Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung tritt nur eine Zentripetalbeschleunigung auf:

$$\vec{a}_{zp}(t_2) = |\omega|^2 |\vec{R}| \vec{e}_\omega(t_2) \times (\vec{e}_\omega(t_2) \times \vec{e}_R(t_2)) = |\omega|^2 |\vec{R}| \vec{e}_{zp}(t_2) = -|\omega|^2 |\vec{R}| \vec{e}_R(t_2) =$$

$$-|\vec{\omega}|^2 \cdot |\vec{R}| \begin{pmatrix} \cos \phi(t_2) \\ \sin \phi(t_2) \\ 0 \end{pmatrix} = -(0,05s)^2 \cdot 5m \begin{pmatrix} \cos 1,662 \\ \sin 1,662 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0,00113_8 \\ -0,0124_4 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$