

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschulreife / Wintersemester 2019/20
Mathematik - Teil Analysis

Arbeitszeit: 105 Minuten

Hilfsmittel: Wissenschaftlicher Taschenrechner

Familienname:

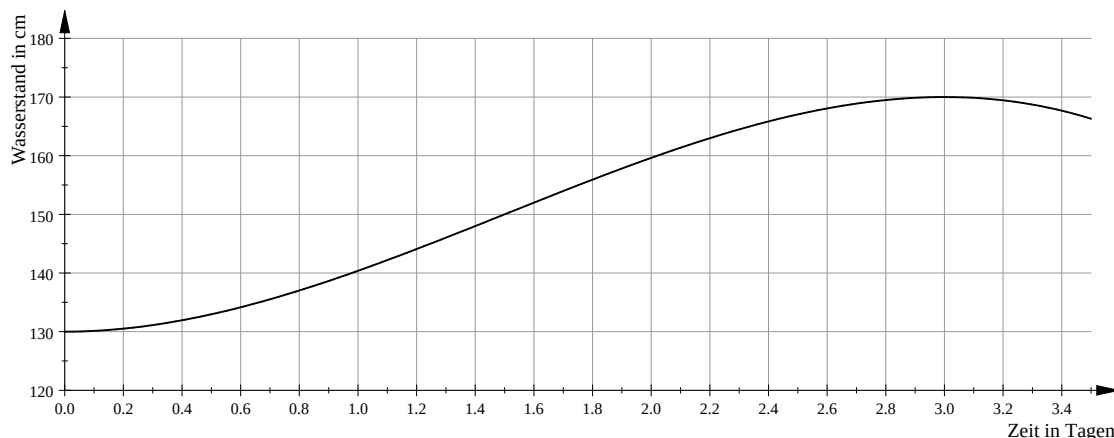
Vorname:

1. Differenzialrechnung im Sachkontext (30 Punkte):

Aufgrund starker Regenfälle wurde im Oktober 2016 ein Ansteigen des Wassers am Rhein beobachtet. An einer Messstelle in Bonn wurde am 20. Oktober um 0:00 Uhr ein Wasserstand von 130 cm gemessen. Für die Höhe des Wasserspiegels kann die folgende Funktion verwendet werden.

$$h(t) = -\frac{80}{27}t^3 + \frac{40}{3}t^2 + 130, \quad 0 \leq t \leq 3.5$$

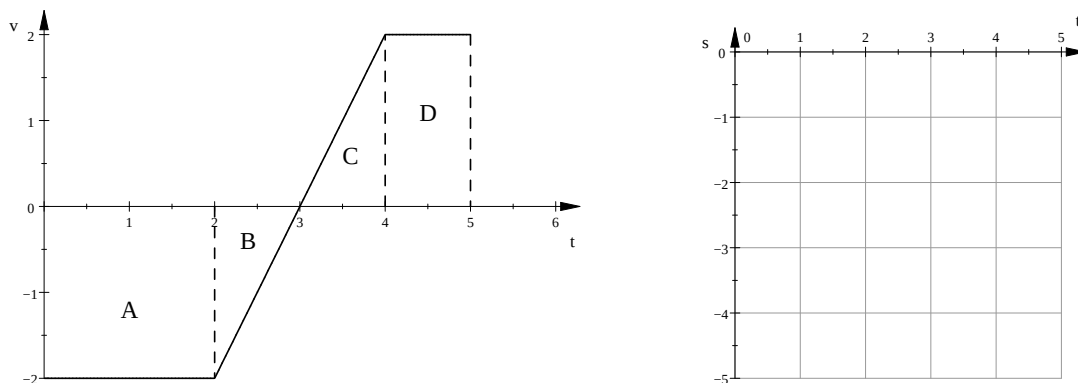
Dabei entspricht $t = 0$ der Zeit 0:00 am 20. Oktober, $t = 1$ der Zeit 0:00 Uhr am 21. Oktober und $t = 3.5$ der Zeit 12:00 Uhr am 23. Oktober. Der Graph von h ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



- a) Berechnen Sie den Wasserstand am 21. Oktober 2016 um 12.00 Uhr.
- b) Berechnen Sie $\frac{h(3) - h(1)}{2}$. Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachkontext.
- c) Ermitteln Sie rechnerisch den minimalen und maximalen Wert im betrachteten Zeitraum.
- d) Zu welchem Zeitpunkt steigt das Wasser am schnellsten? Geben Sie die zugehörige Zunahme an.
- e) Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Wahl!
- h' ist in $]0, 3[$ positiv
 - h'' ist in $]0, 3[$ negativ
 - Es gilt $h''(1) < h''(2)$
 - Der Graph von h ist in $[\frac{3}{2}, 3]$ eine Rechtskurve

2. Integralrechnung (20 Punkte):

a) Bei einem Experiment wurde die Geschwindigkeit v (in $\frac{cm}{s}$) einer Kugel in Abhängigkeit der Zeit t (in s) aufgezeichnet. Bei der Bewegung der Kugel nach rechts wird die Geschwindigkeit mit einem positiven Vorzeichen versehen, bei der Bewegung nach links mit einem negativen.



Bestimmen Sie mithilfe des orientierten Flächeninhalts zwischen Graph und der Zeitachse, wo sich die Kugel nach 5 Sekunden befindet. Skizzieren Sie den Graph der Stammfunktion und bestätigen Sie das Ergebnis.

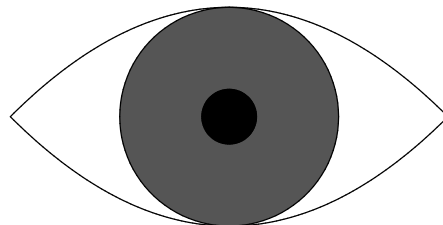
b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx, \quad \int e^x \cdot \sin(x) dx$$

c) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{8}x \cdot (x-8), \quad g(x) = \frac{1}{8}x \cdot (x-8), \quad 0 \leq x \leq 8$$

sowie die Kreise mit Mittelpunkt $M(4|0)$ und den Radien $r = 2, r = 0.5$. Berechnen Sie den Inhalt der weißen Fläche des "Auges". Überlegen Sie zunächst, wie Sie den Inhalt einfach darstellen können.



3. Das Horner-Schema (10 Punkte):

a) Schreiben Sie das Polynom p

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

in Horner-Darstellung. Welche ursprüngliche Idee verfolgte Horner?

b) Lösen Sie die polynomiale Ungleichung graphisch. Faktorisieren Sie zuerst die linke Seite der Ungleichung mithilfe des Horner-Schemas

$$x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 \leq 0$$

VIEL ERFOLG :-)