

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschulreife / Sommersemester 2022

Mathematik – Teil Vektorrechnung

Arbeitszeit: 75 Minuten

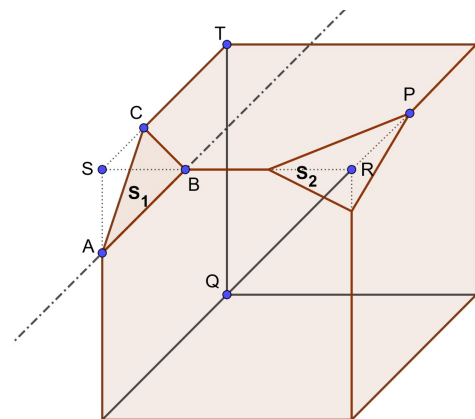
Hilfsmittel: Wissenschaftlicher Taschenrechner

Familienname: _____ Vorname: _____

Aufgabe 4 (32 Punkte)

Von einem Würfel aus Stahl wurden die Ecken $R(6|6|6)$ und $S(6|0|6)$ abgeschnitten. (Siehe Abbildung.)

(Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.
Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.)



- a) Die Punkte $A(6|0|3)$ und $B(6|3|6)$ liegen auf einer Kante des bearbeiteten Würfels.
(i) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g an, die die Punkte A und B enthält.
(ii) Prüfen Sie, ob der Punkt $Z(6|-6|0)$ auf der Geraden g aus Teilaufgabe a) (i) liegt.

- b) Die Schnittfläche S_1 liegt in der Ebene E_1 , die durch die folgende Gleichung gegeben ist

$$E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- (i) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E_1 . Zeigen Sie, dass der Punkt $C(3|0|6)$ in E_1 liegt.
(ii) Geben Sie eine Koordinatengleichung einer Ebene an, die zu E_1 echt parallel ist.
(Angabe der Gleichung **ohne Rechenweg oder Begründung** reicht.)
(iii) Geben Sie die Parametergleichung einer Geraden an, die zu E_1 orthogonal ist. (Angabe der Gleichung **ohne Rechenweg oder Begründung** reicht.)
(iv) Die Schnittfläche S_2 liegt in der Ebene E_2 . E_2 ist orthogonal zur Strecke $\overline{QR}$ mit $Q(0|0|0)$ und $R(6|6|6)$ und enthält den Punkt $P(4|6|6)$. Geben Sie eine Normalengleichung von E_2 an.
(Angabe der Gleichung **ohne Rechenweg oder Begründung** reicht.)

Blatt bitte wenden!

Fortführung von Aufgabe 4

- c) Mit einem Laser wird ein Bohrkanal vom Punkt $B(6|3|6)$ zum Punkt D gebohrt. Der Bohrkanal verläuft orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_2 = 0$, in der auch der Punkt D liegt.
- (i) Bestimmen Sie die Koordinaten von D . (*Zur Kontrolle: $D(4,5|4,5|6)$.*)
 - (ii) Berechnen Sie die Länge des Bohrkanals $\overline{BD}$.
 - (iii) Ermitteln Sie die Größe des Winkels zwischen dem Bohrkanal $\overline{BD}$ und der Kante $\overline{AB}$ des bearbeiteten Stahlwürfels. (*Zur Erinnerung: $A(6|0|3)$.*)
 - (iv) Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Eckpunkt A und der Ebene $E: x_1 - x_2 = 0$.
- d) Nun wird ein Eckstück des Stahlwürfels abgeschnitten, das die Form einer dreiseitigen Pyramide besitzt. Die Pyramide hat die Eckpunkte $L(2|0|6)$, $M(0|0|4)$, $N(0|2|6)$ und die Spitze $T(0|0|6)$. Berechnen Sie das Volumen des Eckstücks mithilfe des Spatprodukts.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Die Ebenen E_1 und E_2 sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad \text{und} \quad E_2: 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -2.$$

Bestimmen Sie die Koordinatengleichungen aller Ebenen F , für die Folgendes gilt: Jeder Punkt P von F hat denselben Abstand zu E_1 wie zu E_2 , d.h. $d(P; E_1) = d(P; E_2)$.

Viel Erfolg! ☺