

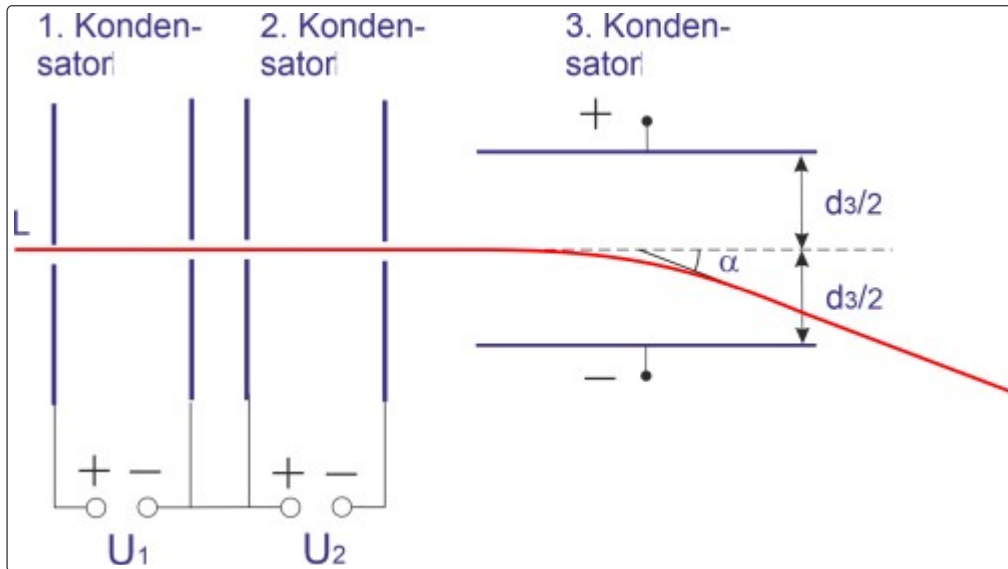
Pittys Physikaufgaben: physikaufgaben.de

Aufgabe 1277

Protonen im elektrischen Feld

(LK Bayern 2001)

Protonen treten mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit durch eine Lochblende L in eine Anordnung aus drei Plattenkondensatoren ein. Die Kondensatoren, deren homogenes jeweils auf den Raum zwischen den Platten beschränkt sind, befinden sich im Vakuum.



Die Protonen bewegen sich in den ersten beiden Kondensatoren parallel zu den Feldlinien. Der Plattenabstand dieser Kondensatoren beträgt jeweils $d_1 = d_2 = 2,5 \text{ cm}$. Die Feldstärke im ersten Kondensator ist $E_1 = 4,0 \cdot 10^4 \text{ V/m}$, die im zweiten $E_2 = 6,0 \cdot 10^4 \text{ V/m}$. Alle Rechnungen sind nicht-relativistisch durchzuführen.

- a) Zeigen Sie durch Berechnungen, dass die Geschwindigkeit v_2 eines Protons beim Verlassen des zweiten Kondensators $v_2 = 6,9 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ beträgt.
- b) Welche Zeit t_2 braucht ein Proton zum Durchfliegen des 2. Kondensators?

Die Protonen treten nun mit der Geschwindigkeit v_2 parallel zu den Platten in das Feld des dritten Kondensators ein, den sie mit einer Ablenkung um den Winkel α aus der ursprünglichen Flugrichtung wieder verlassen.

Der Plattenabstand dieses Kondensators ist $d_3 = 6,0 \text{ cm}$ und die Plattenlänge $\ell_3 = 10 \text{ cm}$.

Zwischen den Platten liegt die Spannung U_3 an, wobei die Kondensatormitte auf Erdpotential liegt.

- c) Zeigen Sie, dass zwischen dem Winkel α und der Spannung U_3 folgender Zusammenhang besteht:

$$\tan \alpha = \frac{e \cdot \ell_3}{v_2^2 \cdot m_p \cdot d_3} \cdot U_3$$

- d) Die Spannung U_3 wird nun so eingestellt, dass die Protonen den Kondensator unter einem

möglichst großen Ablenkwinkel $\alpha_{\max}$ verlassen.

Berechnen Sie U_3 und $\alpha_{\max}$.

Lösung

a) Die Protonen werden in den beiden Kondensatoren durch die Kraft der elektrischen Felder beschleunigt. Dadurch erhalten sie im Kondensator aus der Energie des elektrischen Feldes Bewegungsenergie, an ihnen wird Beschleunigungsarbeit verrichtet.

Im ersten Kondensator erfolgt das aus der Ruhe heraus. Die Protonen besitzen am Anfang demnach keine kinetische Energie und am Ende so viel, wie im elektrischen Feld enthalten sind. Die Energie, die ein Elementarteilchen aus einem elektrischen Feld erhält, wird in eV (Elektronenvolt) angegeben. Die Energie, die ein Teilchen mit einer Elementarladung erhält, wenn es ein Feld durchfliegt, das von einer Spannung von 1 V erzeugt wird, ist genau 1eV groß. Zum Glück besitzt das Proton genau eine Elementarladung, so dass man nur noch die Spannungen in den Kondensatoren kennen muss.

Für ein homogenes Feld gilt:

$$E = \frac{U}{d}$$

$$U = E \cdot d$$

Damit können für beide Kondensatoren die anliegenden Spannungen berechnet werden:

1. Kondensator

$$U = 4,0 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 0,025\text{m}$$

$$U = 1000\text{V}$$

2. Kondensator

$$U = 6,0 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 0,025\text{m}$$

$$U = 1500\text{V}$$

Das heißt, aber, wenn das Proton die zwei Kondensatoren durchflogen hat, hat es eine Gesamtspannung von 2500 V durchflogen. Die Energie, die das Proton beim ersten Kondensator erhalten hat, wird einfach zu der Energie aus dem zweiten Kondensator addiert.

Die Gesamtenergie nach dem Durchfliegen der beiden Kondensatoren ist 2500 eV.

Nun ist aber die Geschwindigkeit gesucht und nicht die Energie. Energie und Geschwindigkeit sind über die Gleichung

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

verknüpft.

Damit ist die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m}}$$

Die Masse ist die Protonenmasse. Die Energie muss nun aber aus der Einheit eV in Joule umgewandelt werden.

Dazu wird die eV-Zahl mit der Elementarladung multipliziert.

Damit lässt sich die Geschwindigkeit berechnen

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2500 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$v = 6,9 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Und genau das sollte ja gezeigt werden.

b)

Die Bewegung durch jeden der beiden Kondensatoren ist jeweils eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. In einem homogenen elektrischen Feld ist die Kraft auf einen geladenen Körper an allen Stellen gleich groß.

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gibt es die Größe Beschleunigung, die besagt, wie groß die Geschwindigkeitsänderung in einer bestimmten Zeit ist. Diese Zeit ist unsere gesuchte Größe.

Um diese Zeit zu bestimmen, brauchen wir noch die Geschwindigkeit, mit der das Proton in den zweiten Kondensator einfliegt. Die Endgeschwindigkeit ist ja aus der ersten Aufgabe bekannt, so dass die Geschwindigkeitsänderung bestimmt werden kann.

Die Startgeschwindigkeit berechnet sich wie in der ersten Aufgabe, nur dass nun eine Energie von 1000 eV benutzt wird:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$v = 4,4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit ändert sich die Geschwindigkeit des Protons im zweiten Kondensator um

$$\Delta v = v_E - v_A$$

$$\Delta v = 6,9 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4,4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta v = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Jetzt brauch man noch die Beschleunigung. Die erhält man über das Newtonsche Grundgesetz:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

Die Kraft im elektrischen Feld ist durch die Feldstärke bestimmt:

$$E = \frac{F}{q}$$

$$F = E \cdot q$$

Die Kraft kann in das Grundgesetz eingesetzt werden:

$$a = \frac{E \cdot q}{m}$$

Damit lässt sich nun die gesuchte Zeit berechnen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\frac{E \cdot q}{m} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v \cdot m}{E \cdot q}$$

In der Gleichung sind alle Größen bekannt. m ist die Protonenmasse und q ist die Elementarladung.

$$\Delta t = \frac{2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{6,0 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

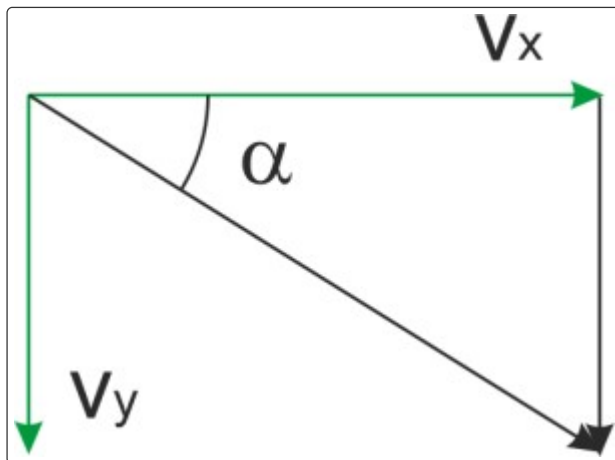
$$\Delta t = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Fertig.

c)

Die Bahn des Protons durch den dritten Kondensator entspricht der Bahn eines waagrecht geworfenen Körpers. In waagerechter Richtung bewegt sich das Proton mit konstanter Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit, die in der ersten Aufgabe berechnet wurde. Da keine Kraft in diese Richtung wirkt, bleibt sie unverändert.

Die Bewegung nach unten ist durch die konstant wirkende Kraft gleichmäßig beschleunigt. Das heißt, die Geschwindigkeit wird gleichmäßig größer.



Den gesuchten Winkel erhält man über die beiden Geschwindigkeitskomponenten:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist bekannt und entspricht v_2 .

Die y-Geschwindigkeit muss bestimmt werden. Da die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, gilt:

$$a = \frac{v_y}{t}$$

$$v_y = a \cdot t$$

Die Geschwindigkeitsänderung entspricht der gesuchten Geschwindigkeit in y-Richtung, da zu Beginn der Beschleunigung ja noch keine Geschwindigkeit vorhanden war.

Die Zeit ist die Zeit, die sich das Proton in dem Kondensator aufhält. Sie lässt sich über die Bewegung in x-Richtung bestimmen. Man kennt die Geschwindigkeit in x-Richtung und die Flugstrecke. Sie entspricht der Länge des Kondensators. Da die Bewegung gleichförmig ist, gilt:

$$v_2 = \frac{\ell_3}{t}$$

$$t = \frac{\ell_3}{v_2}$$

Die Zeit kann in die Geschwindigkeitsgleichung erst mal eingesetzt werden.

$$v_y = a \cdot \frac{\ell_3}{v_2}$$

Über die Beschleunigung des Protons im homogenen Feld wurde in der Lösung b) bereits eine Aussage gemacht:

$$a = \frac{E \cdot q}{m}$$

Die elektrische Feldstärke im homogenen Feld ist

$$E = \frac{U}{d}$$

U ist die an den Platten anliegende Spannung und d der Abstand der Platten. Beides ist bekannt.

Damit erhält man für die Beschleunigung

$$a = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p}$$

Die Ladung des Protons entspricht der Elementarladung e.

Die Gleichung für die Beschleunigung wird in die Gleichung für die Geschwindigkeit v_y eingesetzt:

$$v_y = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2}$$

Und damit geht man nun endlich in die Gleichung für den Tangens des Winkels:

$$\tan \alpha = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2} \cdot \frac{1}{v_2}$$

Damit ist man fast fertig. Die Geschwindigkeiten untern Bruchstrich werden zusammengefasst und man erhält

$$\tan \alpha = \frac{e \cdot \ell_3}{v_2^2 d_3 \cdot m_p} \cdot U_3$$

Fertig.

d)

Ein möglichst großer Ablenkwinkel bedeutet, dass das Proton gerade so an der rechten, unteren Kante des Plattenkondensators vorbeikommt.

Das heißt, es wird bei seinem Flug durch den Kondensator um genau den halben Plattenabstand nach unten abgelenkt.

$$y_{\max} = \frac{d_3}{2}$$

Da die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, gilt nach den Gesetzen der Kinematik aber auch

$$y_{\max} = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Die Zeit ist schon in der vorherigen Lösung bestimmt worden, die ist unverändert.

$$y_{\max} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

Die Beschleunigung wurde auch schon bestimmt:

$$y_{\max} = \frac{U_3 \cdot e}{2 \cdot d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

Die beiden Gleichungen werden nun gleichgesetzt und nach der gesuchten Spannung umgestellt.

$$\frac{d_3}{2} = \frac{U_3 \cdot e}{2 \cdot d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

$$d_3 = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

$$U_3 = \frac{d_3^2 \cdot m_p \cdot v_2^2}{e \cdot \ell_3^2}$$

Da alles gegeben ist, kann die Spannung berechnet werden:

$$U_3 = \frac{(6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(6,9 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (0,10 \text{ m})^2}$$

$$U_3 = 1800 \text{ V}$$

Für den gesuchten Winkel geht man von

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

aus. Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist die bekannte v_2 .

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_2}$$

Die Geschwindigkeit in y-Richtung wurde schon oben bestimmt:

$$v_y = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2}$$

Eingesetzt ergibt das

$$\tan \alpha = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2^2}$$

Nun könnte man rechnen, aber die Gleichung kann noch vereinfacht werden. Die Spannung am Ablenkkondensator ist ja auch bekannt und kann eingesetzt werden:

$$\tan \alpha_{\max} = \frac{e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2^2} \cdot \frac{d_3^2 \cdot m_p \cdot v_2^2}{e \cdot \ell_3^2}$$

Und wie man sieht, kürzt sich da jetzt allerlei raus:

$$\tan \alpha_{\max} = \frac{d_3}{\ell_3}$$

Damit ist der Winkel nun recht einfach zu bestimmen:

$$\tan \alpha_{\max} = \frac{6,0\text{cm}}{10\text{cm}}$$

$$\alpha_{\max} = 31^\circ$$

Geschafft. Schweiß von der Stirn wischen!