MATHE

Abiturvorbereitung inkl. Aufgaben & Lösungen

TikTok
@MATHE.NICK

StudyHelp

StudyHelp

Deine Mathe ABI Vorbereitung

inkl. motivierenden Videos von Nick sowie Aufgaben und Lösungen

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

1. Auflage

Autoren: Carlo Oberkönig und Daniel Weiner
Idee & Videos: Nicolas Klupak @mathe.nick

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

ISBN 978-3-947-**50659**-0

Inhalt

IV Stochastik 155

Weil Du mehr Punkte verdient hast!

Hi,

ich bin Nick, Gründer von AKADEMUS, Abi-Experte, Autor und Diplom-Mathematiker. Eventuell kennst du mich von TikTok oder Instagram. Dort erreiche ich als @mathe.nick mit meinen Mathetutorials über 200.000 Menschen täglich.

Dabei war ich nicht immer gut in Mathe. In der 9. Klasse hätte ich sogar beinahe eine 5 ins Zeugnis bekommen. Aber von vorne. Nach einem missglückten Übertritt in der vierten Klasse, begann mein schulischer Werdegang erstmal auf der Hauptschule, wo ich in der 5. und 6. Klasse die Schulbank drücken durfte. In der 6. Klasse ist mir dann der Übertritt mit durchaus guten Noten auf die Realschule geglückt. Party!

In der 7. Klasse Realschule hatte ich auch noch ganz brauchbare Noten. Dann kam die Pubertät - und Mädchen. Das Resultat am Ende der 9. Klasse kennst du ja bereits. Aber eine unerklärliche mündliche Note hat mich irgendwie gerettet. Trotz schlechter Noten war es damals irgendwie mein Traum zu studieren. Ich hatte mit Informatik geliebäugelt. Also musste ein Abitur her. Das Dumme daran war, dass man einen bestimmten Schnitt nach der 10. Klasse brauchte, um an die Fachoberschule gehen zu dürfen. Was soll ich sagen, von diesem Schnitt war ich am Ende der 9. Klasse Lichtjahre entfernt.

In den darauffolgenden Sommerferien hatte ich also beschlossen, dass jetzt Schluss mit meinen schlechten Noten ist. Ich hatte einfach keinen Bock mehr auf dieses Frustgefühl! Zu Beginn der 10. Klasse war meine erste Amtshandlung, dass ich mich in die erste Reihe gesetzt hatte. Ich fühlte mich so eklig. In meinem Kopf saßen nur Opfer in der ersten Reihe. Und ich! Dass mich fast alle Lehrer gefragt haben, ob ich mich aus Versehen in die 1. Reihe verirrt habe, machte es übrigens nicht leichter.

Cool war allerdings, dass ich plötzlich etwas vom Unterrichtsgeschehen mitbekommen habe. Und man mag es kaum glauben, aber dadurch ging sogar mein Arm ab und zu nach oben, um mich zu melden. Da meine Armbewegung für die meisten meiner Lehrer fremd war, erntete ich zunächst skeptische Blicke. Tatsächlich wusste ich aber zur Abwechslung mal etwas. Dadurch war es mir auch möglich, meine Hausaufgaben zu erledigen. Nicht immer richtig, aber hey - Fortschritt, nicht Perfektion!

Etwa zwei Wochen nach Schulbeginn kam meine Klassenlehrerin auf mich zu. *„Mir gefällt, dass du dieses Jahr besser werden möchtest. Weiter so!“*, sagte sie. In meinen ersten Schulaufgaben bekam ich meistens eine solide 3. Sicherlich nicht nobelpreisverdächtig, aber besser als letztes Jahr! Und das Wichtigste: Ich war auf Kurs, was meinen Schnitt für die Fachoberschule anging.

Die Monate vergingen und die Abschlussprüfungen nahten. Ich hatte mich zwischenzeitlich in den meisten Fächern zwischen 2 und 3 eingependelt - auch in Mathe. Meinem Mathelehrer sind meine Bemühungen nicht verborgen geblieben. *„Nick, für eine 2 hat es im Jahresfortgang leider nicht gereicht. Du bekommst eine gute 3. Aber, wenn du in der Abschlussprüfung eine 2 schreibst, bekommst du die 2 auch in dein Zeugnis. Und ich spendiere dir auf der Abschlussfeier ein Bier!"*, sagte er.

Die Note 2 wollte ich in Mathe auch ohne die Aussicht auf ein Bier von meinem Lehrer haben. Die Pfingstferien, direkt vor den Abschlussprüfungen, wollte ich nochmal intensiv für meine Vorbereitung nutzen. Ich habe mir sogar einen kleinen Lernplan geschrieben. Im Wesentlichen stand dort, welches Fach und welches Thema ich an den jeweiligen Tagen lernen wollte. Ich habe mich dann primär auf alte Abschlussprüfungen gestürzt. Nach jeder Matheeinheit habe ich meine Lösung mit der Musterlösung verglichen und geschaut, ob es für eine 2 gereicht hat. Hat es nicht, verdammte Axt! Zumindest am Anfang nicht. Ich wurde im Laufe der zwei Ferienwochen aber in kleinen Schritten immer besser. Gegen Ende der Ferien habe ich mich in den meisten alten Abschlussprüfungen auf eine solide 2 vorgearbeitet. *„Wenn jetzt nicht nur Scheißaufgaben in der Abschlussprüfung abgefragt werden, kann ich tatsächlich eine 2 in Mathe schaffen"*, sagte ich zu mir.

Am Tag der Abschlussprüfung war ich nervöser als ein Schwarzfahrer in dem Moment, wo er feststellt, dass ein Kontrolleur zugestiegen ist. Da die ersten Aufgaben aber recht gut liefen, legte sich auch meine Nervosität schnell. Am Ende hatte ich ein gutes Bauchgefühl. Die darauffolgenden drei Wochen bis zur Notenbekanntgabe waren die längsten meines Lebens. Ich erinnere mich noch sehr gut an den Tag. Die Notenbekanntgabe endete um 12 Uhr. Da ich leider meinen Bus verpasst hatte, stand ich erst um 12:15 Uhr vor der Schule und rannte Richtung Sekretariat. Der Lehrer, der die Notenliste hatte, kam mir schon auf seinem Nachhauseweg im Treppenhaus entgegen und war völlig genervt, dass er jetzt nochmal alles auspacken musste.

„Da is das Ding!!!" Ich habe tatsächlich eine 2 in der Abschlussprüfung geschrieben und damit eine 2 im Zeugnis. Und ein Freibier! Was will man mehr? Auch die anderen Noten waren völlig in Ordnung für mich, sodass ich am Ende der 10. Klasse im vorderen Drittel im Gesamtvergleich gelandet war.

Die Fachoberschule war dann nicht mehr so spektakulär. Am Anfang wurden meine Noten kurz schlechter. Ich musste mich erst noch *eingrooven*, hatte mich dann aber relativ schnell wieder gefangen. Am Ende der 12. Klasse stand ich im Jahresfortgang auf *gut* und schrieb im Matheabi 11 Punkte. Vielleicht hätte es auch für eine 1 gereicht. Dann hätte ich aber sehr viel mehr Zeit für die Vorbereitung investieren müssen, die ich sicherheitshalber lieber in andere Fächer gesteckt habe.

Während meiner Zeit bei der Bundeswehr - damals musste man noch 9 Monate seinem Land dienen - entschied ich mich, Mathematik mit dem Schwerpunkt Versicherungen & Banken zu studieren. Da ich großen Respekt vor dem Studium hatte, kaufte ich mir das Buch *Analysis 1 von Neunzert*. Dieses Buch habe ich dann während meiner sinnlosen Zeit als Wachposten in der Kaserne durchgearbeitet. Da das nur so halblegal ist, hoffe ich jetzt einfach mal, dass das niemand von der Bundeswehr liest. Anyway: Mein Studium konnte ich ebenfalls mit einer soliden 2 abschließen und hatte in meiner Diplomarbeit sogar eine 1,0 - bääääām! Seitdem darf ich mich ganz offiziell Diplom-Mathematiker (FH) nennen. Wobei mir einfach nur Nicktatsächlich am liebsten ist.

Mein gesamtes Studium habe ich übrigens damit finanziert, Schülern Nachhilfe zu geben. Dabei hatte ich so viel Spaß, dass ich nach dem Studium AKADEMUS gegründet habe. Hier begleite ich mit unserem Abiturkurs und dem #MatheMitNick-Coaching jedes Jahr viele hundert Schüler zum Abitur. Ich habe damit meinen Traumberuf gefunden und bin jeden Tag sehr dankbar dafür.

Wenn du diese Zeilen hier liest, habe ich gerade fünf Minuten deiner Lebenszeit aktiv verschwendet. Herzlichen Glückwunsch! Vielleicht konntest du aber auch zwischen den Zeilen herauslesen, dass Motivation und Lernstrategie einen ganz wesentlichen Bestandteil daran hatten, dass sich meine Noten verbesserten. Nur so funktioniert es! Genau deswegen ist es mir so wichtig, dass du in meinem Skript nicht nur die Mathematik erklärt findest, sondern auch nützliche Tipps für Konzentration, Ausdauer, Motivation und Effektivität. Diese kurzen Einschübe vor jedem Kapitel verlinken immer auf ein entsprechendes YouTube-Video.

Jetzt konntest du mich ein bisschen kennenlernen, sodass ich dir hoffentlich eine Frage stellen darf:

Findest du nicht auch, dass du mehr Punkte verdient hast?

Ich kann sehr gut verstehen, wenn dir Mathe momentan einfach keinen Spaß macht. Und ich weiß, wie es sich anfühlt, wenn man über eine gewisse Punktzahl einfach nicht hinaus kommt, egal wie viel man lernt.

Dafür hast du ab jetzt mich :-)

Ich liebe es einfach, Abiturienten dabei zu helfen, ihr ganzes Potential zur Entfaltung zu bringen. Dabei spielt es keine Rolle, auf wie vielen Punkten du gerade stehst. Mit diesem Lernheft und den dazugehörigen Tutorials wirst du Schritt für Schritt besser werden und dein Notenziel erreichen.

> Damit das Heft nicht noch voller wird, haben wir die Lösungen für dich digital ausgelagert. Du findest neben jeder Aufgabenstellung einen QR-Code, der dich zu den passenden und ausführlichen Lösungen führt.

Ich wünsche dir das Beste für dein Abitur und gebe dafür mein Bestes. Versprochen!

Fette Punkte

Dein Nick

Teil I

Analysis

Motivational #1

Es geht nicht darum, der Beste zu sein. Es geht darum, besser als gestern zu sein.

Bevor du mit diesem Matheskript loslegst, empfehle ich dir, dich mit deinem Notenziel zu beschäftigen. Nimm dir dafür bewusst einen Moment Zeit. Dein Notenziel sollte ambitioniert, aber realistisch sein. Welche Note soll am Ende auf deinem Abiturzeugnis stehen? Genau darauf arbeitest du ab jetzt hin! Viele Studien belegen, dass Menschen mit Zielen effektiver, ausdauernder und erfolgreicher sind.

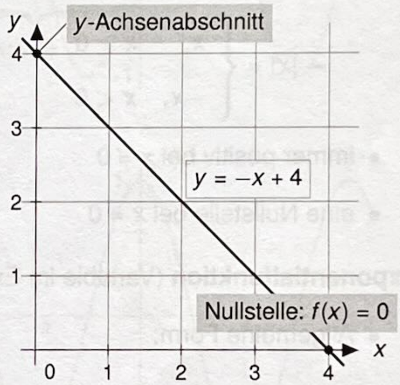
Zu den Motivationsvideos

@mathe.nick

1 Funktionen

1.1 Grundfunktionen

Lineare Funktionen (Geraden)

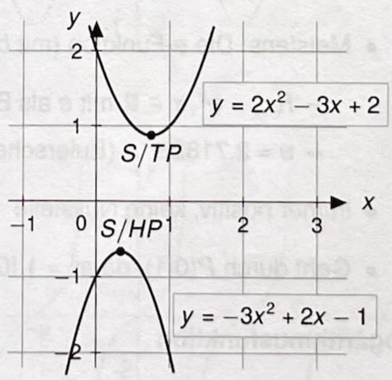


- Steigung m, y-Achsenabschnitt b

$$f(x) = m \cdot x + b, \text{ für } m \neq 0$$

- Steigungsdreieck $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (bei Geraden durch 2 Punkte gegeben)
- Nullstelle liegt bei $x = -\frac{b}{m}$

Quadratische Funktionen (Parabeln)



- Normalform

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c, \text{ für } a \neq 0$$

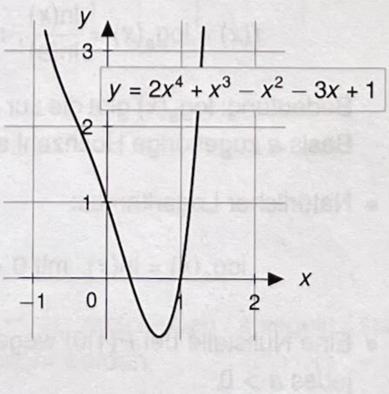
- Scheitelpunktform

$$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$$

mit Scheitelpunkt $S(d|e)$

- keine, eine oder zwei Nullstellen

Polynomfunktionen



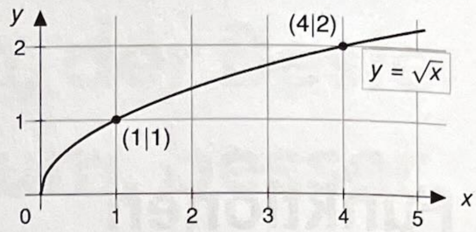
- Summe von Termen px^k:

  3. Grad: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

  4. Grad: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

- Grad n = höchster Exponent von x, für $a \neq 0$
- maximal so viele Nullstellen (NS), wie der Grad n der Funktion ist

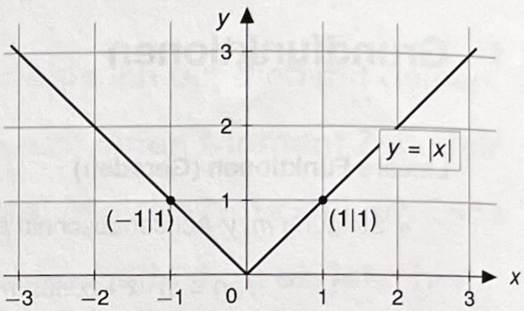
Wurzelfunktionen



- beachte $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$
- bei $f(x) = \sqrt[n]{x}$ gilt:
  - $x \in [0, \infty)$ wenn n = gerade
  - $x \in \mathbb{R}$ wenn n = ungerade
- einzige Nullstelle bei $x = 0$
- je größer n, desto flacher der Graph ab $x = 1$

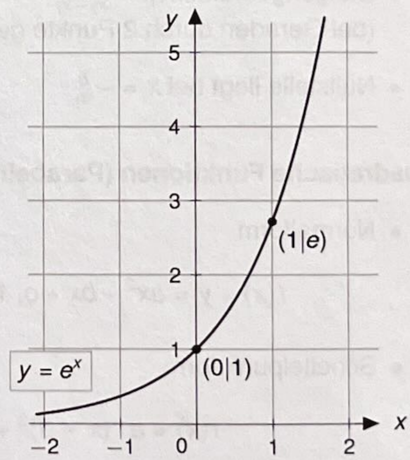
Wurzel als Potenz

Betragsfunktion



- Mehrere Schreibweisen:
  - $f(x) = \text{abs}(x) = |x|$
  - $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
- immer positiv bei $x \neq 0$
- eine Nullstelle bei $x = 0$

Exponentialfunktion (Variable im Exponent!)

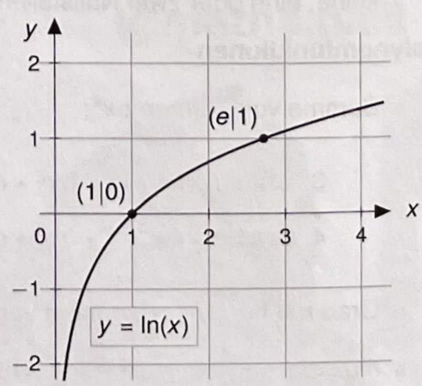


- Allgemeine Form:

$$f(x) = b \cdot a^x, \text{ mit } x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, b \neq 0$$

- Meistens: Die e-Funktion (mit $b = 1$ und $a = e$)
  - $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ mit e als Basis
  - $e = 2{,}71828\ldots$ (Eulersche Zahl)
- immer positiv, keine Nullstelle
- Geht durch $P(0|1)$, da $a^0 = 1$ für jedes $a > 0$

Logarithmusfunktion



- Allgemeine Form:

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \text{ mit } x > 0$$

  Bedeutung: $\log_a(x)$ gibt die zur Potenz x und zur Basis a zugehörige Hochzahl an: $a^{\log_a(x)} = x$

- Natürlicher Logarithmus:

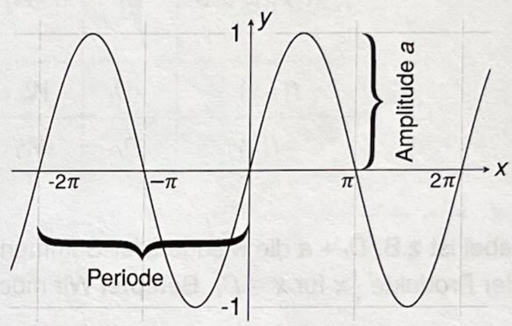
$$\log_e(x) = \ln(x), \text{ mit } 0 < x \in \mathbb{R}$$

- Eine Nullstelle bei $P(1|0)$ wegen $\log_a(1) = 0$ für jedes $a > 0$

- Dekadischer/Zehner-Logarithmus: $f(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$
- Logarithmusfunktion ist Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion: $e^{\ln(x)} = x$ bzw. $\ln(e^x) = x$

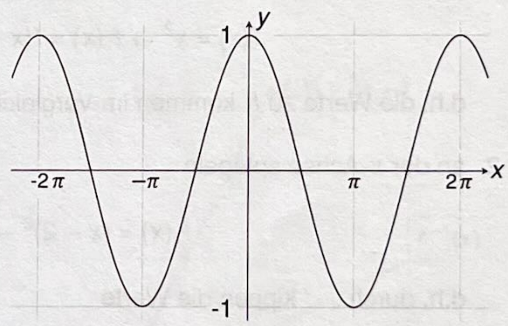
1.2 Die drei häufigsten trigonometrischen Funktionen

Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$
Wichtige Eigenschaften:



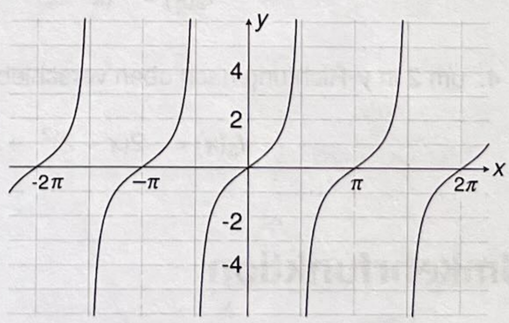
- periodisch mit Periode 2π
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich $W = [-1,1]$
- y-Achsenabschnitt bei $(0|0)$
- **punktsymmetrisch** zum Ursprung

Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$
Wichtige Eigenschaften:



- periodisch mit Periode 2π
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich $W = [-1,1]$
- y-Achsenabschnitt bei $(0|1)$
- **achsensymmetrisch** zur y-Achse

Tangensfunktion $f(x) = \tan(x)$
Wichtige Eigenschaften:



- periodisch mit Periode π
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, nicht definiert bei
$$\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}\ldots\right\}$$
- Wertebereich $W = \mathbb{R}$
- y-Achsenabschnitt bei $(0|0)$
- **punktsymmetrisch** zum Ursprung

1.3 Graphentransformation

Idee: Eine Ausgangsfunktion, z.B. die Normalparabel $f(x) = x^2$, zu verschieben / spiegeln / stauchen / strecken. Dies kann über folgende Manipulationen erreicht werden:

$g(x) =$	$D_g =$	$W_g =$	**Wirkung auf den Graphen**
$f(x-a), a \in \mathbb{R}$	D_f+a	W_f	Verschiebung horizontal um $+a$
$f(x)+a, a \in \mathbb{R}$	D_f	W_f+a	Verschiebung vertikal um $+a$
$f(c \cdot x), c > 0$	$\frac{1}{c} \cdot D_f$	W_f	$c > 1$: *Stauchung* $0 < c < 1$: *Streckung*
$c \cdot f(x), c > 0$	D_f	$c \cdot W_f$	$c > 1$: *Streckung* $0 < c < 1$: *Stauchung*
$f(-x)$	$-D_f$	W_f	Spiegelung an y-Achse
$-f(x)$	D_f	$-W_f$	Spiegelung an x-Achse

Dabei ist z.B. $D_f + a$ die Menge aller Summen $a + x$ für $x \in D_f$, entsprechend ist $\frac{1}{c}D_f$ die Menge aller Produkte $\frac{1}{c}x$ für $x \in D_f$. **Beispiel** Wir möchten $f(x) = x^2$

1. um 2 auf der x-Achse nach rechts verschieben

$$f(x) = x^2 \rightarrow f_1(x) = f(x-2) = (x-2)^2 \rightarrow f_1(x) = (x-2)^2$$

d.h. die Werte zu f_1 kommen im Vergleich zu f 2 Stellen „später"

2. an der x-Achse spiegeln

$$f_1(x) = (x-2)^2 \rightarrow f_2(x) = -f_1(x) = -(x-2)^2$$

d.h. durch „$-$" kippen die Werte

3. um den Faktor 2 strecken

$$f_2(x) = -(x-2)^2 \rightarrow f_3(x) = 2 \cdot f_2(x) = -2(x-2)^2$$

4. um 2 in y-Richtung nach oben verschieben

$$f_3(x) = -2(x-2)^2 \rightarrow f_4(x) = f_3(x) + 2 = -2(x-2)^2 + 2$$

1.4 Umkehrfunktion

Für eine Funktion $f(x)$ ist $f^{-1}(x)$ eine Umkehrfunktion, wenn für $y = f(x)$ gilt: $x = f^{-1}(y)$. Also wenn wir in die Umkehrfunktion einen Funktionswert y der Ausgangsfunktion einsetzen, so erhalten wir den dazugehörigen x-Wert. Die Umkehrfunktion macht die Zuordnung der Funktion rückgängig.

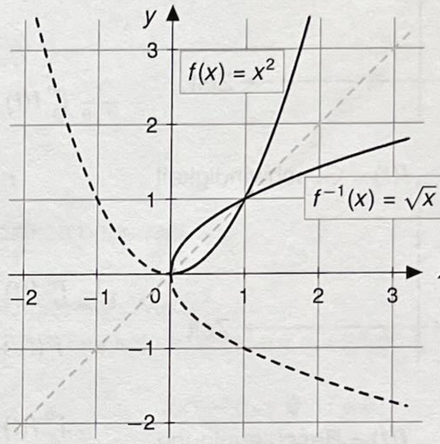
Vorgehen:

1. Funktion als $y = f(x)$ schreiben und nach x auflösen
2. Variablentausch von x und y liefert $f^{-1}(x)$

Eine Funktion ist umkehrbar, wenn jeder Funktionswert y nur an einer einzigen Stelle $x \in D_f$ angenommen wird: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Eine solche Funktion f hat eine Umkehrfunktion f^{-1}, definiert durch $f^{-1}(y) = x$, für $y = f(x)$, also $f^{-1}(f(x)) = x$.

$g(x) =$	$D_g =$	$W_g =$
$f(x)$	D_f	W_f
$f^{-1}(x)$	W_f	D_f

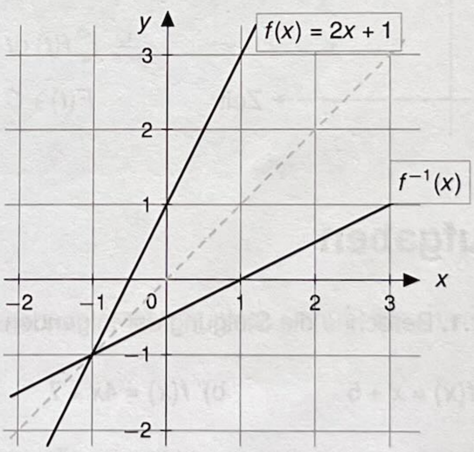
In manchen Fällen muss man den Definitionsbereich einer Funktion einschränken, damit die so eingeschränkte Funktion umkehrbar ist.



Beispiel $f(x) = x^2$, definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, ist nicht umkehrbar, weil z.B. $(-3)^2 = 9 = 3^2$ und $-3 \neq 3$ ist.

Ist $f(x) = x^2$ aber nur für $x \geq 0$ definiert, ist sie umkehrbar mit der Wurzelfunktion als Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Beispiel Bestimme die Umkehrfunktion von $f(x) = 2x + 1$.

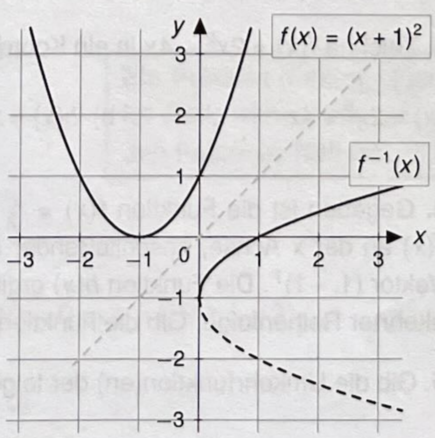


Wir arbeiten das obige Vorgehen ab und lösen die Gleichung nach x auf.

$$
\begin{aligned}
& y = 2x + 1 \quad &|-1 \\
\Leftrightarrow\quad & y - 1 = 2x \quad &|:2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}5y - 0{,}5 = x &
\end{aligned}
$$

Das Tauschen der Variablen liefert die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = 0{,}5x - 0{,}5$.

Beispiel Bestimme die Umkehrfunktion von $f(x) = (x + 1)^2$ für $x \geq -1$.



$$
\begin{aligned}
& y = (x + 1)^2 \quad &|\sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow\quad & \pm\sqrt{y} = x + 1 \quad &|-1 \\
\Leftrightarrow\quad & \pm\sqrt{y} - 1 = x &
\end{aligned}
$$

Das Tauschen von x und y zu $y = \pm\sqrt{x} - 1$ liefert die Umkehrfunktionen

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$$

Nicht jede Funktion hat auch eine entsprechende Umkehrfunktion.
Der Variablentausch entspricht im Schaubild das Spiegeln an der Winkelhalbierenden!

1.5 Was ist in der Funktion gegeben?

Wichtig ist, die Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen und den Sachzusammenhängen zu kennen (⌀ liest sich z.B. als *durchschnittliche* Geschwindigkeit):

$f(t)$ = Höhe/Menge; Zeit	$f'(t)$	Geschwindigkeit
	$f''(t)$	Beschleunigung
	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	⌀ Geschwindigkeit
	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$	⌀ Höhe/Menge
$f(t)$ = Geschwindigkeit; Zeit	$f'(t)$	Beschleunigung
	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	⌀ Beschleunigung
	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$	⌀ Geschwindigkeit
	$F(t)+C$	Höhe/Menge mit C als Höhe/Menge in $t=0$
$f(t)$ = Beschleunigung; Zeit	$\int_a^b f(t)\,dt$	Geschwindigkeit → Geschwindigkeitszunahme in $[a,b]$
	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$	⌀ Beschleunigung
	$F(t)+C$	Geschwindigkeit mit C als Geschwindigkeit in $t=0$

1.6 Aufgaben

Lösungen

A-1.1. Berechne die Steigung der folgenden linearen Funktionen:

a) $f(x) = x + 5$ b) $f(x) = 4x + 7$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = -3x + 3$

A-1.2. Zeichne $f(x) = |x + 2|$ und gib eine Fallunterscheidung für den Funktionswert an.

A-1.3. Zeichne $f(x) = 2x^2 - 4x$ in ein Koordinatensystem. Ergänze um folgende Funktionen:

a) $g(x) = 2x^2 + 4x$ b) $h(x) = x^2 - 2x$ c) $j(x) = 2(x-1)^2 - 4(x-1)$

A-1.4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{2} - 1$. Die Funktion $g(x)$ ergibt sich durch Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse, anschließender Stauchung um den Faktor 0,5 und Verschiebung um den Vektor $(1, -1)^T$. Die Funktion $h(x)$ ergibt sich aus den gleichen Manipulationen, allerdings in umgekehrter Reihenfolge. Gib die Funktionsgleichungen von $g(x)$ und $h(x)$ an.

A-1.5. Gib die Umkehrfunktion(en) der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = x + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 9$ e) $f(x) = (x+3)^2$, für $x \geq -3$

b) $f(x) = 4x - 2$ d) $f(x) = x^2 + 4$, für $x \geq 0$

2 Gleichungen lösen

Zur Bestimmung von x solltet ihr folgende Standardtechniken beherrschen.

Punktprobe

1. Umformen:
   (wenn x^1 die höchste Potenz ist)

$$\begin{aligned} 2x-8 &= 0 \quad |+8 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 8 \quad |:2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 4 \end{aligned}$$

2. Umformen/Wurzel:
   (wenn es kein x, sondern nur x^2 gibt)

$$\begin{aligned} 2x^2-8 &= 0 \quad |+8 \\ \Leftrightarrow \quad 2x^2 &= 8 \quad |:2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 4 \quad |\sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow \quad x = 2 &\vee x=-2 \end{aligned}$$

Merke: Die Gleichung $x^2 = a$ hat für

- $a > 0$ die **beiden** Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$,
- $a = 0$ die **einzige** Lösung $x = 0$,
- $a < 0$ **keine** Lösung, denn es darf keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden! Lösungsmenge ist leer: $\mathbb{L} = \{\}$.

3. Ausklammern: (wenn eine Seite Null und sonst nur Terme mit x)

$$x^3 - \frac{1}{4}x^5 = 0 \quad | \ x \text{ ausklammern!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{x^3}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)}_{\text{Faktor}}}_{\text{Produkt}} = 0$$

Ein Produkt (Faktor · Faktor) ist Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Produktform

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad 1-\frac{1}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Gleichung mit x^3 lösen

4. pq-Formel: (Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$)

Direkte Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 16 &= 0 \quad |:2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 8 &= 0 \quad |\ pq\text{-Formel anwenden} \\ \Rightarrow \quad x_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)} = 1 \pm \sqrt{9} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 4 \vee x = -2 \end{aligned}$$

abc-Formel

5. <u>*abc*-Formel:</u> (Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$)

Direkte Lösung:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 16 &= 0 \\ \Rightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{4 \pm 12}{4} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 4 \vee x = -2 \end{aligned}$$

6. <u>Substitution:</u> (Gleichung mit 2 Exponenten, die das doppelte voneinander sind)

Beispiel $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (biquadratische Gleichung)
Substitution: $x^2 = z$:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \overset{x^2=z}{\Longrightarrow} \underbrace{z^2 - 2z - 8 = 0}_{\text{quad. Gleichung}}$$

Gleichung mit *pq*-Formel lösen: $z = 4 \vee z = -2$.
Rücksubstitution/Resubstitution :

$$z = 4 \overset{z=x^2}{\Longrightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$z = -2 \overset{z=x^2}{\Longrightarrow} x^2 = -2: \text{ Quadratwurzel nicht möglich}$$

7. <u>Polynomdivision:</u> (wenn nichts anderes geht)

Die erste Nullstelle durch Probieren herausfinden (raten) und dann Polynomdivision durchführen. **Beispiel**

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 5$$

- Erste Nullstelle raten: mit Taschenrechner Werte einsetzen. Beachte: konstanter Term „5“ ist ein Vielfaches von allen Nullstellen. Man kann daher mit den ganzzahligen Teilern ($\pm 1, \pm 5$) von 5 beginnen:

$$\text{Probe:} \quad f(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 5 = 0 \checkmark$$

- Charakteristisches Polynom $(x - x_1) = (x - 1)$ aufstellen.
- Prüfen, ob in der Funktionsgleichung eine Potenz von x „fehlt“. Wenn ja, diese mit dem Faktor Null ergänzen (hier „fehlt“ nichts).
- Polynomdivision durchführen:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 + 10x - 5) : (x - 1) = 2x^2 - 5x + 5 \\
-2x^3 + 2x^2 \\
\hline
\qquad -5x^2 + 10x \\
\qquad\ \ 5x^2 - 5x \\
\hline
\qquad\qquad 5x - 5 \\
\qquad\quad -5x + 5 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Wenn als Rest 0 heraus kommt, so hat man alles richtig gemacht!

- Gleichung des Restpolynoms $2x^2 - 5x + 5$ mit entsprechendem Verfahren lösen (*pq*- oder *abc*-Formel: Zahl unter der Wurzel negativ → keine weiteren Nullstellen)

8. Gleichung mit *e*-Funktion lösen:
   - Wenn möglich: Alle *e*-Terme auf eine Seite bringen und 0 auf die andere Seite. Dann ausklammern und Satz vom Nullprodukt anwenden.
   - Sonst: *e* alleine auf eine Seite bringen ⇒ seitenweise mit ln logarithmieren und $\ln(e^x) = x$ (Umkehrfunktion) anwenden.

Beispiele

(i) mit Satz vom Nullprodukt:

$$
\begin{aligned}
e^{2x} \cdot (x^2 - 2) &= 0 \\
e^{2x} = 0 \ ↯ \vee \ x^2 - 2 &= 0 \quad | + 2 \\
x^2 &= 2 \quad | \sqrt{\ } \\
x = \sqrt{2} \ \vee \ x &= -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(ii) Term mit *e* alleine auf eine Seite bringen:

$$
\begin{aligned}
& 8e^{-2x} - 16 &=&\ 0 && | + 16 \\
\Leftrightarrow\ & 8e^{-2x} &=&\ 16 && | : 8 \\
\Leftrightarrow\ & e^{-2x} &=&\ 2 && | \ln \\
\Leftrightarrow\ & \ln(e^{-2x}) &=&\ \ln(2) && \\
\Leftrightarrow\ & -2x &=&\ \ln(2) && | : (-2) \\
\Leftrightarrow\ & x &=&\ -\ln(2)/2 &&
\end{aligned}
$$

9. Newtonverfahren: (numerische Bestimmung der ungefähren Nullstelle)
   - Gegeben: $f(x)$, bilde $f'(x)$ und wähle einen (zufälligen) Startpunkt x_{start}
   - Berechne aus dem bisherigen Punkt x_{alt} den nächsten Punkt x_{neu}:

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{start}} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   - Setze x_{neu} als x_{alt} in die Formel ein und wiederhole, bis sich x_{neu} nicht mehr signifikant von x_{alt} unterscheidet. Dann hat man eine Annäherung für die Nullstelle gefunden:

$$x_0 \approx x_{neu}$$

Beispiel $x^3 - 15x^2 - 175 = 0$

- Bilde $f'(x) : f'(x) = 3x^2 - 30x$
- Wähle z.B. $x_{\text{start}} = 18$
- Wende die Formel wiederholt an. Das erste x_{alt} ist x_{start}:

x_{start}	$f(x)$	$f'(x)$	$x_{neu} = x_{start} - \frac{f(x)}{f'(x)}$
18	797	432	16,16
16,16	127,93	298,64	15,73
15,73	5,63	270,40	15,71

Man könnte hier beliebig lang weiter machen und so eine immer genauere Abschätzung der Nullstelle erhalten. Man hört jedoch dann auf, wenn sich der Wert von x nicht mehr signifikant verändert.

Hier ist demnach das Ergebnis: $x_0 \approx 15,71$

Merke: Pro Startwert finden wir nur eine Nullstelle!

2.1 Aufgaben

Lösungen

A-2.1. Löse folgende Gleichungen durch Umformen.

a) $2x - 8 = 0$

b) $\frac{1}{3}x + 9 = 0$

c) $4x - 2 = 4$

d) $x^2 - 16 = 0$

e) $x^2 + x^3 = 0$

A-2.2. Löse folgende Gleichungen mit der *pq*-Formel oder *abc*-Formel.

a) $x^2 + 2x - 4 = 0$

b) $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$

c) $2x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $8x^2 + 2x + 6 = 0$

e) $6x(x + 2) + 4 = 0$

A-2.3. Führe die Polynomdivision für folgende Funktionen durch.

a) $f(x) = x^3 - 7x + 6$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

A-2.4. In einem Fluss strömt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h. Ein Schiff braucht flussaufwärts 6 Stunden und für dieselbe Strecke flussabwärts 4 Stunden. Mit welcher Geschwindigkeit würde das Schiff ohne Strömung fahren?

A-2.5. Löse die folgenden Gleichungen nach x auf.

a) $e^{(x+1)} - 3e^{-x} = 0$

b) $6 - 3e^{2x} + 3 = 0$

c) $(2 - 3x)^2 e^{7x+28} = 0$

d) $\frac{1}{2}e^x + 3 = -2$

e) $e^{7x+28} = e^2$

A-2.6. Führe die ersten beiden Iterationen des Newtonverfahrens zur Bestimmung der Nullstellen für die Funktion $f(x) = 1 - 5/x^2$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch.

3 Ableitung

- **Ziel**: Kenntnis über die Steigung m einer Funktion gewinnen (Interpretation im Anwendungskontext oder für weitere Rechnung)
- Bisher: Lineare Funktion $\Rightarrow$ Steigung über Steigungsdreieck überall gleich
- Neu: Nicht-lineare Funktionen haben keine gleichbleibende Steigung m $\Rightarrow$ Steigung nur noch punktweise bestimmbar

Zur Erinnerung
Steigung = Änderung in y-Richtung (Δy) pro Änderung in x-Richtung (Δx): $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

z.B. Steigung von $m = 2$ bedeutet: Eine Einheit nach rechts in x-Richtung und zwei Einheiten nach oben in y-Richtung.

3.1 Allgemein

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem berechnen der Ableitung. Geometrisch entspricht der Wert der Ableitung an einem Punkt der Steigung der Tangente an diesem Punkt.

Notationen:

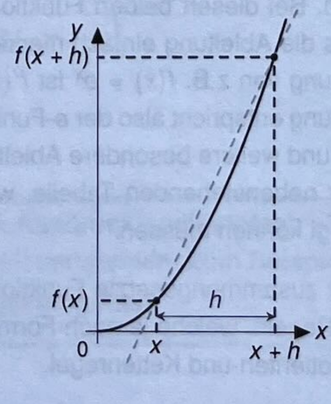
$f(x)$	(Ursprungs-)Funktion
$f'(x)$	1. Ableitung
$f''(x)$	2. Ableitung
$f^n(x)$	n-te Ableitung

Die h-Methode

Der **Differenzenquotient** gibt die Steigung der Sekanten an: $m_{\text{Sek.}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (Vgl. oben $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$)

Wenn wir den Abstand h zweier Punkte verringern, bis er unendlich klein wird (lim), wird die Sekante zur Tangente. Die Ableitung ist dann am Punkt x durch den **Differentialquotient** (Grenzwert des Differenzenquotienten) gegeben:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



> Wir merken uns:
>
> - Steigung zwischen **zwei** Punkten = Sekantensteigung oder **mittlere Änderungsrate**
> - Ableitung ist Steigung in **einem** Punkt = Tangentensteigung oder **momentane Änderungsrate**

Besonders wichtig ist die Interpretation der Ableitung im Sachzusammenhang, wenn die Funktion einen Wert in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Einige **Beispiele:**

$f(t)$	$f'(t)$
Strecke	Geschwindigkeit
Menge an Flüssigkeit/Gas in einem Behälter	Zu-/Ablaufgeschwindigkeit
Population (Bakterien, Planzen ...)	Wachstumsrate
Konzentrationen (oft: Medikament im Blut)	Abbaurate

3.2 Ableitungsregeln

> (1) Ableitung einer Konstanten: $f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$
>
> (2) Ableitung von x (für $p = 1$): $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
>
> (3) Potenzregel: $f(x) = x^p \rightarrow f'(x) = p \cdot x^{p-1}$
>
> (4) Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$
>
> (5) Summen-/Differenzregel: $f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Beispiel

$$(3x^2 + 4x - 3)' = (3x^2)' + (4x)' - (3)' \quad \text{Summenregel}$$
$$= 3 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (x)' - (3)' \quad \text{Faktorregel}$$
$$= 3 \cdot (2x) + 4 \cdot (1) - 0 \quad \text{Regeln (1), (2) und (3)}$$
$$= 6x + 4 \quad \text{zusammenfassen}$$

Neben Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^p$ haben wir bereits weitere Funktionen kennengelernt, wie die Exponential- und Logarithmusfunktion. Bei diesen beiden Funktionen müssen wir uns die Ableitung einfach merken, denn die Ableitung von z.B. $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$. Die Ableitung entspricht also der e-Funktion selbst. Diese und weitere besondere Ableitungen stehen in der nebenstehenden Tabelle, welche wir unbedingt können müssen.

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$1/(2\sqrt{x})$
$1/x = x^{-1}$	$-x^{-2} = -1/x^2$

Für zusammengesetzte Funktionen gibt es neben der Summen/-Differenzregel noch drei weitere Regeln, welche je nach Form der Funktionsgleichung angewendet werden müssen: Produkt-, Quotienten-und Kettenregel.

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Produktregel

Beispiele

$$f(x) = \overbrace{x^2}^{=u(x)} \cdot \overbrace{e^x}^{=v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \overbrace{2x \cdot e^x}^{=u'(x)\cdot v(x)} + \overbrace{x^2 \cdot e^x}^{=u(x)\cdot v'(x)} = e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right)$$

$$f(x) = \left(2x^3 - 5\right) \cdot \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2\sqrt{x} + \tfrac{2x^3-5}{2\sqrt{x}}$$

Wird verwendet beim Produkt von zwei Funktionen, z.B. $(x^2 + x) \cdot e^x$.

Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

mit $u(x)$ als äußere und $v(x)$ als innere Funktion.

Kettenregel

Beispiel $f(x) = e^{x^2}$

mit $u(x) = e^x \to u'(x) = e^x$ und $v(x) = x^2 \to v'(x) = 2x$ folgt

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$$

Bei der Ableitung von e-Funktionen können wir uns einfach merken:

$$\left(e^{\text{etwas}}\right)' = e^{\text{etwas}} \cdot (\text{etwas})'$$

e-Funktion ableiten

Achte auf Terme wie $e^{\cdots}$, $\ln(\ldots)$ und $\frac{1}{(\ldots)}$. Dies sind typische äußere Funktionen.

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel $f(x) = \frac{3x}{x^2-x-1}$

Quotientenregel

mit $u(x) = 3x \to u'(x) = 3$ und $v(x) = x^2 - x - 1 \to v'(x) = 2x - 1$ folgt

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 - x - 1) - [3x \cdot (2x - 1)]}{(x^2 - x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 3x - 3 - (6x^2 - 3x)}{(x^2 - x - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x - 3 - 6x^2 + 3x}{(x^2 - x - 1)^2} = \frac{-3x^2 - 3}{(x^2 - x - 1)^2}$$

Anstatt die Quotientenregel zu verwenden, können wir den Ausdruck auch einfach als Produkt umschreiben und die Produktregel (und Kettenregel) verwenden. Zum Beispiel können wir $\frac{x}{e^x} = x \cdot e^{-x}$ umschreiben und die Quotientenregel umgehen.

3.3 Aufgaben

Lösungen

A-3.1. Bilde die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f(x) = 10$
b) $f(x) = x + 10$
c) $f(x) = 2x + 5$
d) $f(x) = x^5$
e) $f(x) = x^3 + 4$
f) $f(x) = x^3 + 2x$

A-3.2. Bilde die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$
b) $f(x) = \sqrt{x}$
c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
d) $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^5}$
e) $f(x) = \sin(2x)$
f) $f(x) = x \cdot 3^x$
g) $f(x) = 2x \cdot e^{ax+3}$

A-3.3. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$. Berechne die Steigung bei $x = -5$. An welchem Punkt hat der zugehörige Graph eine waagerechte Tangente? Gib die Gleichung der waagerechten Tangente an.

A-3.4. Die Strecke (in Metern), die ein Auto in einer bestimmten Zeit (in Minuten) zurücklegt, wird durch $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 4x - 2$ beschrieben.

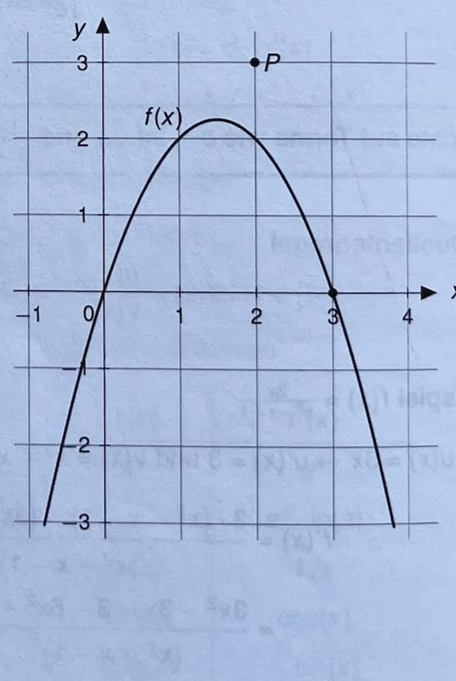
a) Berechne die Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt $x = 10$ über den Differenzialquotienten.

b) Berechne die Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt $x = 10$ durch direktes Ableiten.

A-3.5. Ein Spaziergänger geht nachts an einer viel befahrenen Straße vorbei, deren Verlauf durch die Funktion

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

gegeben ist. Zum beobachteten Zeitpunkt befindet er sich im Punkt $P(2|3)$. An welchem Punkt würden ihn die Autofahrer von der Straße aus sehen (d.h. wann sind die Scheinwerfer direkt auf ihn gerichtet)?



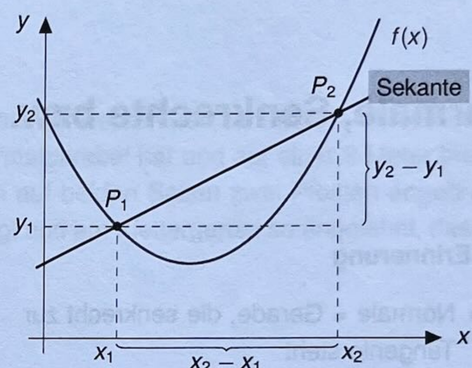
4 Sekante, Tangente und Normale

4.1 Sekantengleichung aufstellen

Zur Erinnerung

- Sekante = Gerade, welche den Graphen in zwei Punkten (P_1 und P_2) schneidet
- Sekantensteigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



In der Regel sind eine Funktion $f(x)$ sowie zwei Punkte $P_1\,(x_1|f\,(x_1))$ und $P_2\,(x_2|f\,(x_2))$ gegeben und die Sekante $y = mx + b$ ist gesucht.

Vorgehen am **Beispiel**: $f(x) = 3x^2 + 1$ und $x_1 = -1, x_2 = 2$

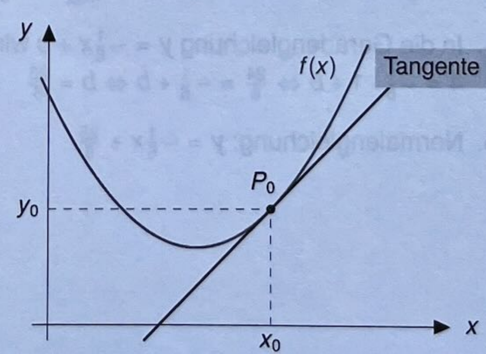
1. Punkte ausrechnen: $P_1(-1|f(-1)) = (-1|4), P_2(2|f(2)) = (2|13)$
2. Steigung berechnen: $m = \frac{13-4}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3$
3. In Geradengleichung $y = 3x + b$ den Punkt P_1 (P_2 geht auch) einsetzen und b ausrechnen: $4 = 3 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 7$
4. Sekantengleichung: $y = 3x + 7$

4.2 Tangentengleichung aufstellen

Zur Erinnerung

- Tangente berührt Graphen in P_0 **Ausnahme**: periodische Funktionen (wie Sinus-/Cosinus-Funktionen)
- Tangentensteigung = Wert der Ableitungsfunktion bei x_0:

$$m_{\tan} = f'(x_0)$$



In der Regel sind eine Funktion $f(x)$ sowie ein Punkt $P_0\,(x_0|f\,(x_0))$ gegeben und die Tangente $y = mx + b$ ist gesucht.

Vorgehen am **Beispiel**: $f(x) = 3x^2 + 1$ und $x_0 = 1$

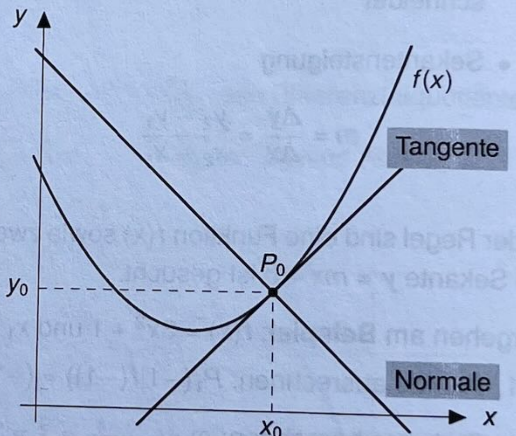
1. Ableitung bestimmen: $f'(x) = 6x$
2. Punkt bestimmen: $P_0\,(x_0|f\,(x_0)) = (1|4)$
3. Steigung berechnen: $m_{\tan} = f'\,(x_0 = 1) = 6$
4. In die Geradengleichung $y = 6x + b$ werden die Koordinaten von P_0 eingesetzt und b (y-Achsenabschnitt) ausgerechnet:
   $4 = 6 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -2$
5. Tangentengleichung: $y = 6x - 2$

4.3 Normale, Senkrechte bzw. Orthogonale aufstellen

Zur Erinnerung

- Normale = Gerade, die senkrecht zur Tangente steht
- Steigung der Normalen ergibt sich aus der Steigung der Tangenten

$$m_{\text{norm}} = -\frac{1}{m_{\tan}} = -\frac{1}{f'(x_0)}\,,\ f'(x_0) \neq 0$$



In der Regel sind eine Funktion $f(x)$ und eine x-Koordinate x_0 bzw. ein Punkt $P_0\,(x_0|f\,(x_0))$ gegeben und die Normale $y = mx + b$ ist gesucht.

Vorgehen am **Beispiel**: $f(x) = 3x^2 + 1$ und $x_0 = 1$

1. Ableitung bestimmen: $f'(x) = 6x$
2. Punkt berechnen $P_0\,(x_0|f\,(x_0)) = (1|4)$
3. Steigung berechnen: $m_{\text{norm}} = -\frac{1}{m_{\tan}} = -\frac{1}{6}$
4. In die Geradengleichung $y = -\frac{1}{6}x + b$ wird P_0 eingesetzt und b ausgerechnet:
   $4 = -\frac{1}{6} \cdot 1 + b \Leftrightarrow \frac{24}{6} = -\frac{1}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{25}{6}$
5. Normalengleichung: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{25}{6}$

4.4 Aufgaben

A-4.1. Gegeben ist jeweils eine Funktionsgleichung $f(x)$, die einen Graphen G beschreibt. Bestimme jeweils die Sekante von G, die durch die Punkte $P_1\,(x_1|f\,(x_1))$ und $P_2\,(x_2|f\,(x_2))$ verläuft.

Lösungen

a) $f(x) = 4x^2 - 1$ und $x_1 = -1{,}5, x_2 = 0{,}5$

b) $f(x) = 4x^2 - 1$ und $x_1 = -0{,}5, x_2 = 0{,}5$

c) $f(x) = 2x^2 - 5$ und $x_1 = -5, x_2 = 1{,}5$

d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 10$ und $x_1 = 3, x_2 = 0$

A-4.2. Bestimme die Tangente von $f(x) = 2x^2 - 5$ an der Stelle $x_0 = -5$.

A-4.3. Berechne die Gleichung der Normalen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = -x^2 - x + 2$ und $x_0 = 2$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 10$ und $x_0 = 5$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ und $x_0 = 2$

A-4.4. Auf einem Spielplatz soll ein Klettergerüst errichtet werden. Geplant ist ein 4 Meter hohes Klettergerüst, das die Form einer umgekehrten Normalparabel hat und auf einer 2 Meter breiten Basis steht. Um das Gerüst zu stabilisieren, sollen auf beiden Seiten zwei Pfosten angebracht werden. Die Pfosten sind jeweils in der Erde befestigt und am Klettergerüst so angelehnt, dass es in einer Höhe von 3 Metern berühren.

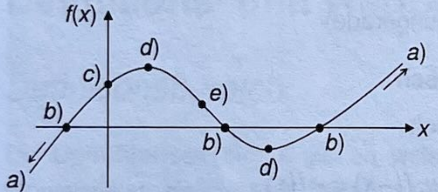
a) Zeichne eine Skizze für das Bauvorhaben.

b) Welche Funktionsgleichung hat die Parabel?

c) Wie groß muss der Abstand zwischen dem Fuß des Klettergerüsts und dem Fuß des jeweiligen Pfostens sein?

5 Kurvendiskussion

Übersicht über geometrische Eigenschaften einer Funktion:



a) Grenzverhalten

b) Nullstellen

c) Schnittpunkt y-Achse

d) Extrempunkte (HP und TP)

e) Wendepunkte (WP)

Zusatz:

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Symmetrie
- Skizze (grob)
- Zeichnung (genau)

5.1 Grenzverhalten

Untersuchung, wie sich Graph der Funktion im Unendlichen verhält: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

- Betrachte bei ganzrationalen Funktionen immer nur den Term mit der höchsten Potenz.
- Konstante Vorfaktoren ändern nur das Vorzeichen, z.B.:

$$\lim_{x\to\pm\infty} -5x^2 = -\lim_{x\to\pm\infty} 5x^2 \to -\infty$$

- Bei der Multiplikation von x^n mit einer e-Funktion entscheidet der e-Term über das Verhalten im Unendlichen. Der andere Term beeinflusst nur das Vorzeichen, z.B.:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} \to 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} \to \infty$$

Limes

Grenzverhalten wichtiger Funktionen:

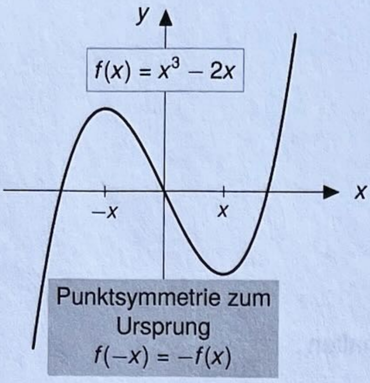
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
c	c	c
$x^n, n>0$	$(-1)^n\cdot\infty$	∞
$x^{-n}, n>0$	0	0
e^x	0	∞
e^{-x}	∞	0

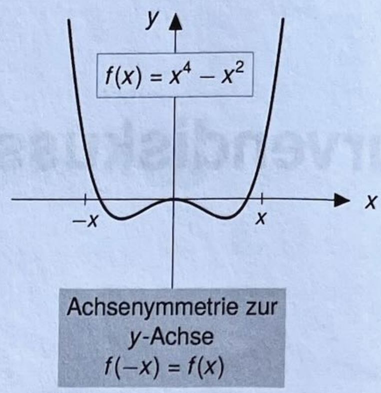
Merke: e^x „gewinnt“
d.h. steigt oder fällt stärker als jede andere Funktion!

5.2 Symmetrie

Achsen-
symmetrie

Graphen können punkt- oder achsensymmetrisch sein. Sie müssen aber nicht unbedingt ein Symmetrie haben.





Vorgehen:

- Ist die Funktion ein Polynom? (Achtung: $x = x^1 \to$ ungerade)
  - nur gerade Exponenten $\to$ **achsensymmetrisch**
  - nur ungerade Exponenten $\to$ **punktsymetrisch**
- Allgemein: Teste die Bedingungen $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$

Beispiele

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4 \to$ nur gerade Exponenten $\to$ achsensymmetrisch
2. $f(x) = 2x^3 - 4x \to$ nur ungerade Exponenten $\to$ punktsymmetrisch
3. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2} \to f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)^2} = f(x) \to$ achsensymmetrisch

5.3 Achsenabschnitte

Beispiel für $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

***y*-Achsenabschnitt:**
Bestimme durch den Schnittpunkt mit der y-Achse die Lösung der Funktionsgleichung für $x = 0$:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 16 = -16$$

Achsenabschnitt: $P_y(0|-16)$

***x*-Achsenabschnitt(e):**
Bestimme durch den/die Schnittpunkt(e) mit der x-Achse (Nullstelle(n)) die Lösung(en) der Funktionsgleichung für $y = f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Rightarrow\quad 2x^2 - 4x - 16 &= 0 \qquad |:2, pq\text{-Formel} \\ \Rightarrow\quad x = -2 &\vee x = 4 \end{aligned}$$

Nullstellen: $P_1(-2|0), P_2(4|0)$

Einschub Intervallschreibweise

Im Folgenden werden Definitions- und Wertebereich behandelt. Um diese korrekt angeben zu können, muss man wissen, wie man Mengenintervalle richtig angibt. Dabei ist die Unterscheidung zwischen offenen, halboffenen und geschlossenen Intervallen wichtig.

Schreibweise	Mengenschreibweise	Typ
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossen
$[a,b)$ bzw. $[a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	halb-offen
$(a,b]$ bzw. $]a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	halb-offen
(a,b) bzw. $]a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offen

Merke: Ein Intervall ist an einer Seite offen, wenn die Intervallgrenze selbst nicht mehr Teil des Intervalls ist! Anstelle von Zahlen a, b kann auch das Zeichen ∞ für „unendlich" mit „+" oder „−" als Vorzeichen in der Intervallschreibweise verwendet werden; ein solches Intervall ist immer offen oder halboffen, weil ∞ keine Zahl bezeichnet.

5.4 Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich

Der **Definitionsbereich** D gibt an, welche x-Werte in die Funktion eingesetzt werden dürfen (d.h. für welche sie definiert ist). Wichtige Gründe für die Einschränkung des Definitionsbereichs:

Bruchgleichung

- Aus der Anwendung heraus: z.B. Betrachtung eines festen Zeitraums $0 \leq x \leq 6$
- Mathematische Gründe:
  1. $\frac{1}{\text{etwas}}$ verlangt etwas $\neq 0$
  2. $\sqrt{\text{etwas}}$ verlangt etwas ≥ 0
  3. $\ln(\text{etwas})$ verlangt etwas > 0

Beispiel Bestimme den maximalen Definitionsbereich von:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{\ln(2-x)}$$

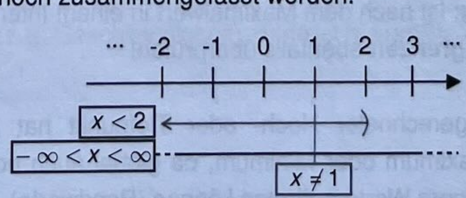
Wir gehen die mathematischen Gründe durch und erhalten

$$\begin{aligned} \text{zu 1.:} \quad \ln(2-x) &\neq 0 \quad |e^{(\cdots)} \\ \Leftrightarrow \quad 2-x &\neq 1 \quad |+x-1 \\ \Leftrightarrow \quad x &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\text{zu 2.:} \quad x^2 \geq 0 \quad \text{keine Einschränkung}$$

$$\begin{aligned} \text{zu 3.:} \quad 2-x &> 0 \quad |+x \\ \Leftrightarrow \quad 2 &> x \end{aligned}$$

Die gefundenen Bedingungen müssen nun noch zusammengefasst werden:



Der maximale Definitionsbereich von $f(x)$ lautet: $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) = \{x \in \mathbb{R} | x < 2 \wedge x \neq 1\}$

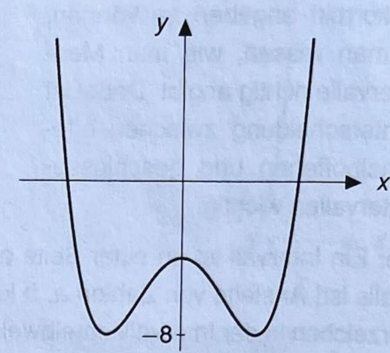
Wertebereich

Der **Wertebereich** W ist die Menge von y-Werten, die man erhält, wenn man jedes mögliche x in die Funktion $f(x)$ einsetzt. Anders gesagt: Alles was für y rauskommen kann!

Wir betrachten den Wertebereich des nebenstehenden Graphen:

$$W = [-8; \infty)$$

Hierbei ist -8 der niedrigste y-Wert, der erreicht wird, nach oben ist diese Beispielfunktion allerdings nicht beschränkt!



5.5 Extrempunkte

Extrema

Gesucht: Extremstelle x_E bzw. Extrempunkte $E\,(x_E|f\,(x_E))$

1. $f'(x)$ und $f''(x)$ bestimmen
2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Suche alle x_E, welche diese Bedingung erfüllen
3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ (✓) und $f''(x) \neq 0$. Folgt bei x_E:
   - $f'(x) = 0$ und $f''(x_E) > 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt** (TP)
   - $f'(x) = 0$ und $f''(x_E) = 0 \Rightarrow$ möglicherweise Sattelpunkt (SP)
   - $f'(x) = 0$ und $f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ **Hochpunkt** (HP)
4. Berechne y-Werte: Setze x_E in Funktion $f(x)$ ein um Punkte $E\,(x_E|f\,(x_E))$ zu erhalten

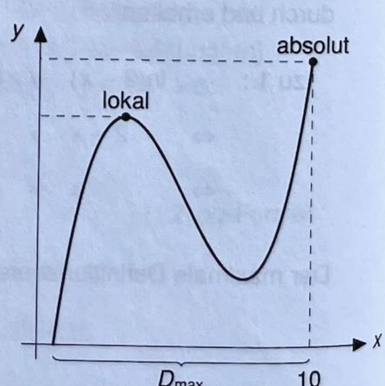
Tipp: Bei $f''(x_E) = 0$ „Vorzeichenwechselkriterium" prüfen:

1. Wähle einen Wert „links" (x_1) und „rechts" (x_2) von x_E; z.B. $x_1 = x_E - 1$ und $x_2 = x_E + 1$
2. Berechne $f'(x_1)$ und $f'(x_2)$
   (a) $f'(x_1) < 0 \wedge f'(x_2) > 0$, daraus folgt ein Tiefpunkt bei x_E
   (b) $f'(x_1) > 0 \wedge f'(x_2) < 0$, daraus folgt ein Hochpunkt bei x_E
   (c) Sonst: Sattelpunkt!

Achtung: Ist nach dem Maximalwert in einem Intervall gefragt: **Intervallgrenzen** ebenfalls überprüfen!

Ein ausgerechneter Hoch- oder Tiefpunkt hat nur ein lokales Maximum oder Minimum, da global auch noch größere oder kleinere Werte auftreten können (Randwerte).

Bei vorgegebenem Intervall $[a, b]$ immer $f(a)$ und $f(b)$ mit einbeziehen!



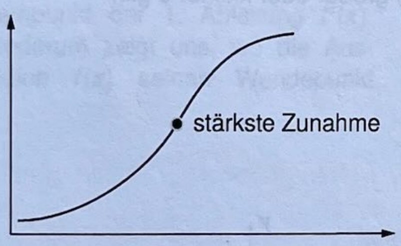
Beispiel $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$ mit $D = \mathbb{R}$

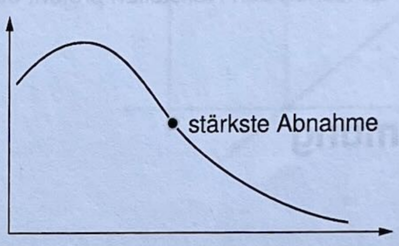
1. Ableitungen: $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$ und $f''(x) = 4x + 6$
2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = -1$
3. Hinreichende Bedingung:
   (a) $f''(-2) = 4 \cdot (-2) + 6 = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = -2$
   (b) $f''(-1) = 4 \cdot (-1) + 6 = 2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = -1$
4. y-Werte: $y = f(-2) = -4/3$ und $y = f(-1) = -5/3$

Die Funktion besitzt einen Hochpunkt $HP\left(-2 \middle| -\frac{4}{3}\right)$ und einen Tiefpunkt $TP\left(-1 \middle| -\frac{5}{3}\right)$.

5.6 Wendepunkte

Erinnerung: Wendestelle = Stelle, an der sich die Krümmung ändert und ist der Punkt mit kleinster oder größter Tangentensteigung in der Umgebung (= Änderungsrate $\Rightarrow$ Wichtig für Textaufgaben!)





Gesucht: Wendestellen x_W bzw. Wendepunkte $W\left(x_W | f\left(x_W\right)\right)$

1. $f''(x)$ und $f'''(x)$ bestimmen
2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$, suche alle x_W, welche diese Bedingung erfüllen
3. Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ (✓) und $f'''(x) \neq 0$. x_W in $f'''(x)$ einsetzen
4. Berechne y-Werte: Setze x_W in Funktion $f(x)$ ein um Punkte $W\left(x_W | f\left(x_W\right)\right)$ zu erhalten

In Anwendungsaufgaben:
Beschreibt $f(x)$ eine Menge, dann liegen bei den Wendepunkten die stärksten Zu- oder Abnahmen der Menge vor.
Beschreibt $f(x)$ bereits eine Änderungsrate, (z.B. Geschwindigkeit), dann ist die größte/kleinste Geschwindigkeit ein HP/TP.

5.7 Monotonie

Gesucht: Intervalle (a, b), in denen die gegebene Funktion f monoton ist.

Dabei gibt es verschiedene Fälle:

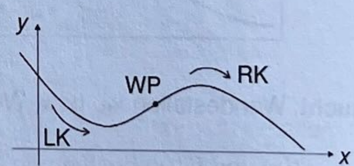
- monoton steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$; Steigung $f'(x) \geq 0$
- streng monoton steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; Steigung $f'(x) > 0$
- monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$; Steigung $f'(x) \leq 0$
- streng monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$; Steigung $f'(x) < 0$

Um diese Bereiche zu bestimmen, kann man:

1. Funktionsgraphen betrachten (falls vorhanden)
2. Ableitung berechnen und Bereiche identifizieren, in denen $f'(x) \geq 0$ oder $f'(x) \leq 0$ gilt. Dafür:
   (a) Nullstellen von $f'(x)$ finden (aus Extrempunkt-Berechnung bekannt)
   (b) Zwischen den Nullstellen prüfen, ob $f'(x)$ größer oder kleiner 0 gilt!

5.8 Krümmung

$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist links gekrümmt bzw. konvex $\cup$
$f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ist rechts gekrümmt bzw. konkav $\cap$

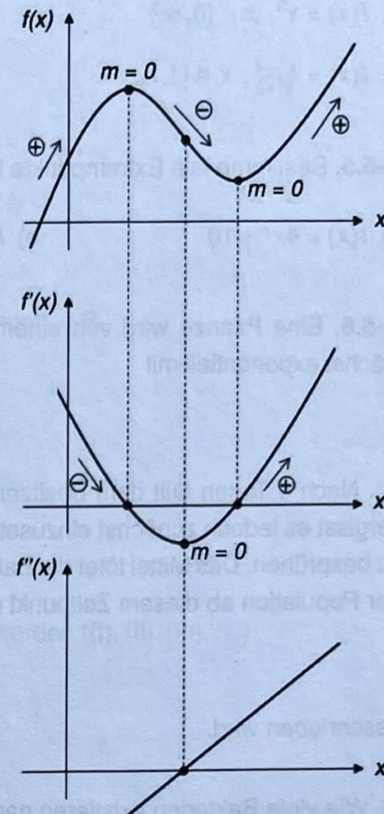


- **Rund um einen Hochpunkt ist die Funktion konkav.**
- **Rund um einen Tiefpunkt ist die Funktion konvex.**
- **An einem Wendepunkt ändert sich die Krümmung!**

5.9 Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung

NEW-Regel

Anhand der folgenden Grafik können wir schön sehen, wie $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$ miteinander verbunden sind.



N steht hierbei für die Nullstelle, E für Extrempunkt und W für den Wendepunkt.

$f(x)$	N	E	W		
$f'(x)$		N	E	W	
$f''(x)$			N	E	W

Was soll uns diese Tabelle sagen? Die Tabelle zeigt zusammenfassend, welche Funktion uns welchen Wert für die jeweilige Ableitung oder Aufleitung liefert.

Gucken wir uns dazu die Abbildung etwas genauer an: Die Nullstelle der 2. Ableitung $f''(x)$ zeigt uns den x-Wert für den Extrempunkt der 1. Ableitung $f'(x)$. Dieser wiederum zeigt uns, wo die Ausgangsfunktion $f(x)$ seinen Wendepunkt hat.

5.10 Aufgaben

Lösungen

A-5.1. Wie verhalten sich folgende Funktionen, wenn $x \to +\infty$ beziehungsweise wenn $x \to -\infty$ strebt?

a) $f(x) = x^5 - x^3$

b) $f(x) = x^2 - x^3 + 100$

c) $f(x) = \frac{x^2-3}{1-x^3}$

d) $f(x) = \frac{5-x}{3+x}$

A-5.2. Sind folgende Funktionen symmetrisch? Wenn ja, welcher Art von Symmetrie folgen sie?

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

c) $f(x) = -3x^3 + 2x$

d) $f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$

e) $f(x) = 2x + \sin(x)$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

A-5.3. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen nicht definiert? Gebe Definitions- und Wertebereich an.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^3-4}{x}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{2x^2-6x}$

d) $f(x) = \frac{2x}{x(x+4)}$

A-5.4. Bestimme die Monotonie der folgenden Funktionen in dem angegebenen Intervall.

a) $f(x) = x^3,\ x \in [0, \infty)$

b) $f(x) = \frac{x^5-4}{x^3+2},\ x \in [1, \infty)$

c) $f(x) = \frac{2x^2}{2x-1},\ x \in (-\infty, +\infty)$

d) $f(x) = \sin(2x + \pi),\ x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$

A-5.5. Bestimme alle Extrempunkte folgender Funktionen.

a) $f(x) = 4x^2 + 10$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

c) $f(x) = 3x^2 + 10x$

A-5.6. Eine Pflanze wird von einem Bakterienstamm ($N = 30$) befallen. Der Bakterienstamm wächst exponentiell mit

$$f(x) = N \cdot e^{0,5x}$$

an. Nach 4 Tagen fällt dem Besitzer der Pflanze der Befall auf, er kauft sofort ein Gegenmittel, vergisst es jedoch zunächst einzusetzen. Erst am nächsten Tag denkt er daran, die Pflanze damit zu besprühen. Das Mittel tötet die Bakterien und behindert das Wachstum, sodass die Entwicklung der Population ab diesem Zeitpunkt durch

$$g(x) = N_5 \cdot e^{-0,8(x-5)}$$

beschrieben wird.

a) Wie viele Bakterien existieren nach 2 Tagen?

b) Wann hat der Bakterienstamm sein Maximum erreicht?

c) Wann ist die Zunahme der Bakterien am größten?

d) Wann ist die Pflanze gerettet, also alle Bakterien getötet?

6 LGS lösen

Gegeben: Mehrere lineare (kein x^2 oder ähnliches) Gleichungen, z.B.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ \text{(II)} \quad x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

formen ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit:

- n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$
- m Gleichungen, die mit römischen Ziffern nummeriert werden ((I), (II), (III), ...)

6.1 Lösungsstrategien

Gesucht: Lösungen für die Unbekannten $x_1, \dots, x_n$.

> Mögliche Ergebnisse:
>
> - **keine Lösung**: das Gleichungssystem ist nicht lösbar (z.B. wenn 0 = 1, also ein Widerspruch herauskommt)
> - **genau eine Lösung**: man erhält für alle Unbekannten jeweils genau einen Wert (z.B. $x_1 = 1, x_2 = -1, \dots$)
> - **unendlich viele Lösungen**: unendlich viele Wertekombination für die Unbekannten, z.B. alle Paare (x_1, x_2) mit $x_2 = -x_1$ für das Gleichungssystem mit der einzigen Gleichung: $x_1 + x_2 = 0$

Um Gleichungssysteme zu lösen, kommen verschiedene Verfahren in Betracht:

- Einsetzungsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Gauß-Algorithmus

Grundidee: Elimination von Variablen aus den Gleichungen mit n Variablen, bis nur noch Gleichungen von jeweils **einer** Variablen übrig sind. Bei zwei Variablen kann man gut die ersten drei Verfahren benutzten. Bei mehreren Variablen ist es allerdings oft sinnvoll, den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

Beispiel: Wir lösen das Gleichungssystem vom Anfang mit den möglichen Lösungsstrategien.

Einsetzungsverfahren
Idee: Eine Gleichung nach einer Unbekannten umformen und in die andere Gleichung einsetzen. Gleichung (II) umformen:

$$\text{(IIa)}\quad x_1 = x_2 + 1$$

(IIa) in Gleichung (I) einsetzen:

$$\begin{aligned} 2\overbrace{(x_2+1)}^{=x_1} + 3x_2 &= 12 \\ \Leftrightarrow\quad 5x_2 + 2 &= 12 \quad \mid -2 \\ \Leftrightarrow\quad 5x_2 &= 10 \quad \mid :5 \\ \Leftrightarrow\quad x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Einsetzen in (IIa) liefert x_1:

$$x_1 = \underbrace{2}_{=x_2} + 1 = 3$$

Additionsverfahren
Idee: Elimination einer Unbekannten (hier x_1 durch Addition/Subtraktion der Gleichungen. Negativen Vorfaktor herstellen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & 2x_1 + 3x_2 & = & 12 & \\ \text{(II)} & x_1 - x_2 & = & 1 & \mid \cdot(-2) \\ \hline \text{(I)} & 2x_1 + 3x_2 & = & 12 & \\ \text{(IIa)} & -2x_1 + 2x_2 & = & -2 & \end{array}$$

Addiere (I) und (IIa):

$$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & 2x_1 + 3x_2 & = & 12 & \\ \text{(IIb)} & 0 + 5x_2 & = & 10 & \mid :5 \\ \Leftrightarrow & x_2 & = & 2 & \end{array}$$

Einsetzen in (I) liefert x_1:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3\cdot 2 &= 12 \quad \mid -6 \\ \Leftrightarrow\quad 2x_1 &= 6 \quad \mid :2 \\ \Leftrightarrow\quad x_1 &= 3 \end{aligned}$$

Gleichsetzungsverfahren
Idee: Beide Gleichungen nach derselben Unbekannten umformen und gleichsetzen. Wir formen nach x_1 um:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(Ia)} & x_1 & = & 6 - 1{,}5x_2 \\ \text{(IIa)} & x_1 & = & x_2 + 1 \end{array}$$

(Ia) und (IIa) gleichsetzen:

$$\begin{array}{lrcll} & 6 - 1{,}5x_2 & = & x_2 + 1 & \mid -1 \\ \Leftrightarrow & 5 - 1{,}5x_2 & = & x_2 & \mid +1{,}5x_2 \\ \Leftrightarrow & 5 & = & 2{,}5x_2 & \mid :2{,}5 \\ \Leftrightarrow & 2 & = & x_2 & \end{array}$$

Einsetzen in z.B. (IIa) liefert x_1:

$$x_1 = \underbrace{2}_{=x_2} + 1 = 3$$

Merke: Mit allen Verfahren erhalten wir das gleiche Ergebnis

$$x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Beim Einsetzen von Gleichungen/Werten Klammern setzen. Dadurch behält man den Überblick, was eingesetzt wurde und vermeidet Fehler!

6.2 Gauß-Algorithmus

Anwendung bei beliebigen Gleichungssystemen, spätestens bei 3 Gleichungen oder 3 Unbekannten!

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ \text{(II)} & -2x_1 + x_2 - 6x_3 & = & 0 \\ \text{(III)} & x_1 - 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Verfahren: Mit dem Additionsverfahren aus Gleichung (II) und Gleichung (III) x_1 eliminieren, dann aus den Gleichungen x_2 eliminieren. Das Gleichungssystem erhält dann eine **Dreiecksform**.

Elimination von x_1 in Gleichung (II) und (III) durch Addition von Vielfachen der Gleichungen. Wähle die Vielfachen so, dass sich x_1 beim addieren/subtrahieren eliminiert:

$$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 & \\ \text{(II)} & -2x_1 + x_2 - 6x_3 & = & 0 & \mid 2\cdot\text{(I)} + \text{(II)} \\ \text{(III)} & x_1 - 2x_3 & = & 3 & \mid \text{(I)} - \text{(III)} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ \text{(IIa)} & 0 - x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ \text{(IIIa)} & 0 - x_2 + 4x_3 & = & -3 \end{array}$$

Wir haben nun in der ersten Spalte in allen Zeilen, außer in der ersten, Nullen. Jetzt muss noch das x_2 aus der 3. Zeile eliminiert werden. Damit kein x_1 mehr dazu kommt, sollte man hier nur mit der 2. und 3. Zeile rechnen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 & \\ \text{(IIa)} & -x_2 - 2x_3 & = & 0 & \\ \text{(IIIa)} & -x_2 + 4x_3 & = & -3 & \mid \text{(IIIa)} - \text{(IIa)} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ \text{(IIa)} & -x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ \text{(IIIb)} & 6x_3 & = & -3 \end{array}$$

Wir erhalten direkt die Lösung für x_3

$$\begin{array}{rrcll} & 6x_3 & = & -3 & \mid :6 \\ \Leftrightarrow & x_3 & = & -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} & \end{array}$$

und können das Ergebnis in Gleichung (IIa) einsetzen, um x_2 zu ermitteln:

$$\begin{array}{rrcll} \text{aus (IIa) folgt:} & -x_2 - 2\cdot\overbrace{(-\frac{1}{2})}^{=x_3} & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & -x_2 + 1 & = & 0 & \mid +x_2 \\ \Leftrightarrow & 1 & = & x_2 & \end{array}$$

Zum Schluss setzen wir die berechneten Ergebnisse für x_1 und x_2 in Gleichung (I) ein, um die letzte Unbekannte zu erhalten:

$$\begin{array}{rrcll} \text{aus (I) folgt:} & x_1 - \overbrace{1}^{=x_1} + 2\cdot\overbrace{(-\frac{1}{2})}^{=x_3} & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & x_1 - 1 - 1 & = & 0 & \mid +2 \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & 2 & \end{array}$$

Tipp: Um Schreibarbeit während des Umformens zu sparen, kann man auch die Namen der Unbekannten weglassen und die Koeffizienten-Schreibweise verwenden. Trage Null ein, falls eine Unbekannte nicht auftritt.

x_1	x_2	x_3	=
1	−1	2	0
−2	1	−6	0
1	0	−2	3

weiter verkürzt:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

6.3 Aufgaben

Lösungen

A-6.1. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ \text{(II)} & 2x_1 + 3x_2 & = & 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -5x_1 + 2x_2 & = & -11 \\ \text{(II)} & 6x_1 - x_2 & = & 16 \end{array}$$

A-6.2. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ \text{(II)} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -1 \\ \text{(III)} & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -6 \\ \text{(II)} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ \text{(III)} & x_1 + x_2 - 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

A-6.3. Max und seine Eltern sind zusammen 85 Jahre alt. Seine Mutter ist 4 Jahre jünger als sein Vater. Seine Mutter ist 4-mal älter als er. Wie alt ist jeder der drei?

7 Modellierungsaufgaben

In diesem Kapitel versuchen wir Funktionsgleichungen aufgrund gegebener Informationen aufzustellen. Dabei unterscheiden wir

- Steckbriefaufgaben und
- Trassierungsaufgaben.

Bei beiden Aufgabentypen sind Bedingungen vorgegeben, die die gesuchte Funktion erfüllen soll. Der Ablauf ist also nahezu identisch bei beiden.

7.1 Steckbriefaufgaben

Idee: Zu vorgegebenen Eigenschaften die zugehörige Funktion (wie bei einem Steckbrief) finden.

Gegeben: Mehrere Bedingungen (z.B. Nullstellen, Steigungswerte, y-Achsenabschnitt, ...)

Gesucht: Funktion f, welche alle Bedingungen erfüllt

Vorgehen:

1. Um welche Art von Funktion handelt es sich? An der Anzahl an Unbekannten sehen wir, wie viele Bedingungen aufgestellt werden müssen.
2. Ist eine Symmetrie vorhanden?
3. Wird eine Aussage über Punkte $f(x) = y$, die Steigung $f'(x) = m$, Extremstellen $f'(x) = 0$ oder Wendestellen $f''(x) = 0$ gemacht?
4. Alle Informationen in mathematische Gleichungen übersetzen.
5. LGS aufstellen und lösen.
6. Funktionsgleichung aufschreiben und Probe durchführen.

Beispiel Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch den Koordinatenursprung geht, bei $x = 1$ ein Minimum und im Punkt $W(2/3 \mid 2/27)$ einen Wendepunkt hat. Wir arbeiten hierfür unser obiges Schema ab.

1. Art der Funktion: Ein Polynom 3. Grades hat die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Mit a, b, c und d liegen vier Unbekannte vor, die bestimmt werden müssen. Wir benötigen also 4 Bedingungen!

2. Aussage über Symmetrie nicht vorhanden.
3. Aus „der Graph geht durch den Koordinatenursprung" folgern wir: (I) $f(0) = 0$
Minimum an der Stelle $x = 1$ bringt uns die Info: (II) $f'(1) = 0$
Wendepunkt bei $W(2/3 \mid 2/27)$ bringt uns die Info: (III) $f''(2/3) = 0$ und (IV) $f(2/3) = 2/27$
4. Informationen in LGS aufstellen :

$$\begin{array}{lrl} \text{aus (I)} & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = 0 \qquad \Rightarrow d = 0 \\ \text{aus (IV)} & a \cdot (2/3)^3 + b \cdot (2/3)^2 + c \cdot (2/3) & = 2/27 \\ \text{aus (II)} & 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c & = 0 \\ \text{aus (III)} & 6a \cdot (2/3) + 2b & = 0 \end{array}$$

5. Das LGS, bestehend aus den Gleichungen (II)-(IV), anschließend lösen und wir erhalten für die gesuchten Parameter $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, und $d = 0$ sowie die gesuchte Funktion 3. Grades mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Hier einige Beispiele für **typische Bedingungen**:

...hat im Punkt (3|4)...	$f(3) = 4$
...geht durch den Ursprung...	$f(0) = 0$
...schneidet die x-Achse bei 5 ...	$f(5) = 0$
...hat bei $x = 3$ die Steigung $m = -1$...	$f'(3) = -1$
... ist bei $x = 4$ parallel zur Geraden $y = 2x + 3$...	$f'(4) = 2$
... schneidet die y-Achse bei 8...	$f(0) = 8$
...hat einen Extrempunkt bei $E(0\|5)$...	$f(0) = 5, f'(0) = 0$
...berührt die x-Achse bei 5...	$f(5) = 0, f'(5) = 0$
...hat bei $x = -5$ einen Wendepunkt...	$f''(-5) = 0$
...seine Wendetangente bei $x = -2$...	$f''(-2) = 0$

7.2 Trassierungsaufgaben

Idee: Eine Funktion f finden, welche zwei andere Funktionen verbindet.

Gegeben: Funktion g und h, sowie ein Bereich $[x_1, x_2]$, in welchem die Verbindung liegen soll.

Vorgehen:

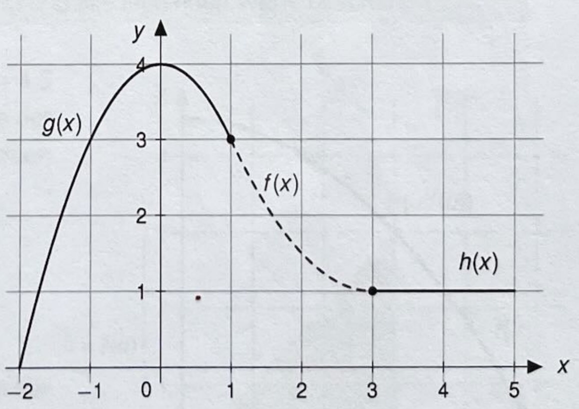
1. Aufgabenstellung sorgfältig lesen - Welchen Grad soll die zu erstellende Funktion haben?
   - Treten nur die Begriffe sprungfrei und knickfrei auf, hat die gesuchte Funktion meist den Grad 3: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   - Tritt zusätzlich der Begriff krümmungsruckfrei auf, hat die gesuchte Funktion meist den Grad 5: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$.
2. Aufstellen der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x)$ sowie der 1. und, wenn krümmungsruckfrei verlangt wird, 2. Ableitung.
3. Bedingungen aufstellen:
   - sprungfrei („keine Lücke"): $g(x_1) = f(x_1)$ und $h(x_2) = f(x_2)$
   - knickfrei („selbe Steigung"): $g'(x_1) = f'(x_1)$ und $h'(x_2) = f'(x_2)$
   - krümmungsruckfrei („selbe Krümmung"): $g''(x_1) = f''(x_1)$ und $h''(x_2) = f''(x_2)$
4. Alle Informationen in mathematische Gleichungen übersetzen, LGS aufstellen und lösen.
5. Funktionsgleichung aufschreiben.

Beispiel

Gegeben seien die folgenden Funktionen auf ihren jeweils vorgegeben Definitionsbereichen

$$g(x) = -x^2 + 4, \quad D_g = [-2;1] \quad \text{und} \quad h(x) = 1, \quad D_h = [3;5].$$

Die beiden gegebenen Funktionen sollen sprung- und knickfrei miteinander verbunden werden. Wie das ganze am Ende aussehen soll, zeigt die nebenstehende Abbildung. Wir arbeiten das obige Vorgehen ab und vermuten aus der Aufgabenstellung, dass die Funktion den Grad 3 haben soll. Eine ganz allgemeine Funktion dritten Grades sieht so aus: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.



Es gilt also 4 Unbekannte zu bestimmen: a, b, c und d.

Dazu benötigen wir 4 Bedingungen. Zunächst aber bilden wir für die Knickbedingung kurz die 1. Ableitung: $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$. Die 2. Ableitung ist nicht notwendig, da keine Information bezüglich des Krümmungsrucks vorliegt. Jetzt stellen wir die Bedingungen auf:

$$
\begin{array}{lllcrcrcrcrcr}
\text{(I)} & \text{sprungfrei:} & g(1) = f(1) & \Rightarrow & 3 & = & a & + & b & + & c & + & d \\
\text{(II)} & \text{sprungfrei:} & h(3) = f(3) & \Rightarrow & 1 & = & 27a & + & 9b & + & 3c & + & d \\
\text{(III)} & \text{knickfrei:} & g'(1) = f'(1) & \Rightarrow & -2 & = & 3a & + & 2b & + & c & & \\
\text{(IV)} & \text{knickfrei:} & h'(3) = f'(3) & \Rightarrow & 0 & = & 27a & + & 6b & + & c & &
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem, bestehend aus 4 Gleichungen, müssen wir jetzt mit den uns bekannten Verfahren oder dem Taschenrechner lösen. Für die gesuchten Parameter erhalten wir $a = 0$, $b = 1/2$, $c = -3$ und $d = 11/2$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet demnach

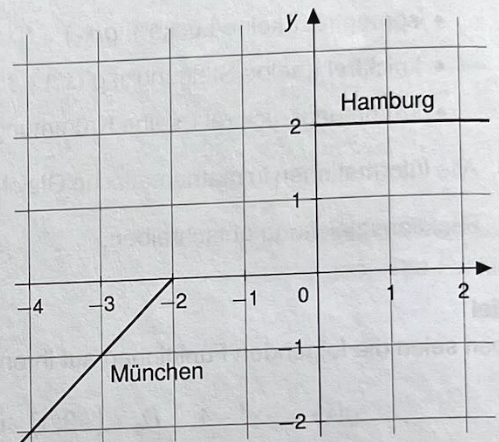
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}, \quad D_f = [1;3].$$

7.3 Aufgaben

Lösungen

A-7.1. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph die x-Achse an der Stelle 2 berührt, die y-Achse bei 1 schneidet und ein Maximum bei $x = 4/3$ hat.

A-7.2. Zwischen Hamburg und München soll eine neue Eisenbahnstrecke gebaut werden. Die Bauarbeiten wurden von beiden Städten aus gestartet; nun müssen beide Streckenabschnitte verbunden werden. Damit die Bahn später nicht von den Gleisen abkommt, muss der Übergang sprungfrei und knickfrei sein. Wie lautet die Funktion, die die beiden Streckenabschnitte verbindet?



8 Optimierungsaufgaben

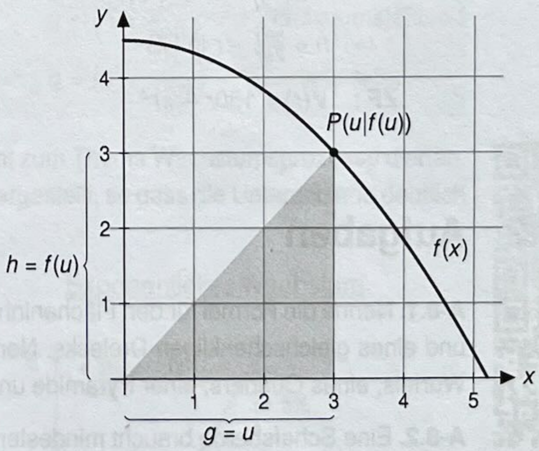
Der Begriff Optimierungsaufgaben (oft auch Extremwertprobleme genannt, finden wir aber etwas verwirrend) fasst alle Aufgabentypen zusammen, in denen ein Maximum oder ein Minimum unter bestimmten Nebenbedingungen gesucht ist. Wenn z.B. nach maximalen Volumen gefragt wird, ist die Hauptbedingung $V = \ldots$. Soll nach minimaler Oberfläche gesucht werden ist die Hauptbedingung $O = \ldots$. Die Nebenbedingung enthält Informationen, wie zum Beispiel ein gegebenes Volumen, wenn die Oberfläche minimal bzw. maximal werden soll.

8.1 Lösungsstrategien

Vorgehen:

1. Hauptbedingung (HB) aufstellen
2. Rand- bzw. Nebenbedingung (NB)
3. Nebenbedingung nach einer Variablen umstellen und in Hauptbedingung einsetzen
   $\Rightarrow$ Zielfunktion (ZF)
4. Zielfunktion auf Extremstellen untersuchen und alle fehlenden Werte bestimmen

Beispiel Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 4{,}5$ im ersten Quadranten. Welche Koordinaten muss der Punkt P besitzen, damit der Flächeninhalt des grauen Dreiecks maximal ist?



$$\text{HB: } A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$\text{NB: } g = u \text{ und } h = f(u) = -\frac{1}{6}u^2 + 4{,}5$$

Die Nebenbedingung ist in diesem Fall, dass der Punkt P auf dem Funktionsgraphen liegen muss. Das ist eine nützliche Information, denn so können wir die Grundseite g und die Höhe h in der Formel durch die Koordinaten von P ersetzen.

Für die Zielfunktion setzen wir die Nebenbedingungen in die Hauptbedingung ein:

$$\text{ZF: } A_\triangle(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{6}u^2 + 4{,}5\right) = -\frac{1}{12}u^3 + 2{,}25u$$

Wir untersuchen die Funktion nun auf Extremstellen. Die

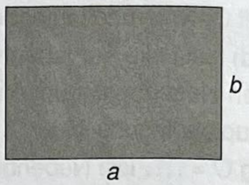
$$\text{notwendige Bed.: } \quad A'_\triangle(u) = -\frac{1}{4}u^2 + 2{,}25 \overset{!}{=} 0$$

liefert die beiden möglichen Extremstellen $u_1 = 3$ und $u_2 = -3$. Da wir uns laut Aufgabentext im ersten Quadranten befinden haben wir nur die Lösung $u_1 = 3$. Die Prüfung, ob wirklich ein Maximum vorliegt, wird mit der zweiten Ableitung gemacht und liefert $A''_{\triangle}(u_1 = 3) = -3/2 < 0$. Für $u_1 = 3$ ist die Zielfunktion, also die Fläche des Dreiecks, wirklich maximal! Jetzt noch die restlichen Werte bestimmen, hier die y-Koordinate von P: $f(3) = 3$. Damit lautet der Punkt, der zur maximalen Fläche des Dreiecks führt $P(3|3)$.

Typische Aufgaben, bei denen wir die Zielfunktion aufstellen möchten:

1) Fläche - Seitenlänge begrenzt

max. Fläche, nur 400 m Zaun



HB : $A(a, b) = a \cdot b$

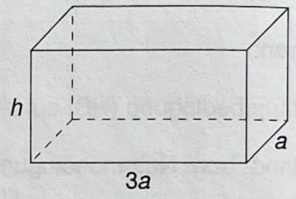
NB : $U(a, b) = 2(a + b) \overset{!}{=} 400$

$\Leftrightarrow$ $b = 200 - a$ in HB

ZF : $A(a) = -a^2 + 200a$

2) Quader - Kantenlänge begrenzt

max. Volumen, nur 84 cm Draht



HB : $V(a, h) = 3a^2 \cdot h$

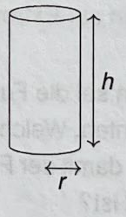
NB : $K(a, h) = 16a + 4h \overset{!}{=} 84$

$\Leftrightarrow$ $h = 21 - 4a$ in HB

ZF : $V(a) = 3a^2(21 - 4a)$

3) Dose - Material begrenzt

max. Volumen, nur 300 cm^2 Material



HB : $V(r, h) = \pi r^2 h$

NB : $O(r, h) = 2\pi r(r + h) \overset{!}{=} 300$

$\Leftrightarrow$ $h = \frac{300}{2\pi r} - r$ in HB

ZF : $V(r) = 150r - \pi r^3$

8.2 Aufgaben

ösungen

A-8.1. Nenne die Formel für den Flächeninhalt bzw. den Umfang eines Quadrats, eines Rechtecks und eines gleichschenkligen Dreiecks. Nenne zudem jeweils die Formel für das Volumen eines Würfels, eines Quaders, einer Pyramide und eines Kreiszylinders.

A-8.2. Eine Schafsherde braucht mindestens 500 m^2 Grünfläche. Sie soll unter minimaler Materialverwendung rechteckig eingezäunt werden. Wie viel Zaun wird benötigt?

A-8.3. Die Funktion $f(x) = -x^2 + 20$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.

a) Welchen Flächeninhalt kann ein Dreieck maximal haben, das innerhalb dieser Fläche liegt (also mit einer Seite auf der x-Achse und dem dritten Punkt auf der Funktion)?

b) Maximiere den Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Fläche zusätzlich noch auf den ersten Quadranten beschränkt ist.

9 Wachstumsprozesse

Wachstumsprozesse beschäftigen sich mit der Änderung des Bestandes in Form von Zunahme oder Abnahme.

9.1 Lineares und exponentielles Wachstum

Lineares Wachstum

- Konstante Entwicklung
- Ab-/Zunahme erfolgt in gleichen Abständen um den gleichen Betrag
- Beschreibung durch Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + b \text{ oder } f(t) = m \cdot t + b$$

$m < 0$ Abnahme

$m > 0$ Zunahme

Exponentielles Wachstum

- Konstante prozentuale Entwicklung
- Ab-/Zunahme erfolgt in gleichen Abständen um den gleichen Prozentsatz
- Beschreibung durch Exponentialfunktion (mit p als Änderung in %):

$$f(t) = a \cdot q^t \text{ mit } q = \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

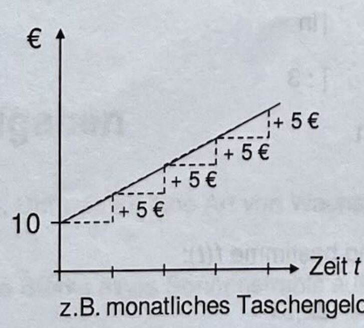
$$q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) > 1 \text{ Wachstumsfaktor}$$

$$q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) < 1 \text{ Zerfallsfaktor}$$

Beispiele Die folgende Abbildung soll uns als Übersicht zum Thema Wachstumsprozesse dienen. Hier sind lineare und exponentielle Prozesse gegenübergestellt, so dass die Unterschiede deutlich werden können.

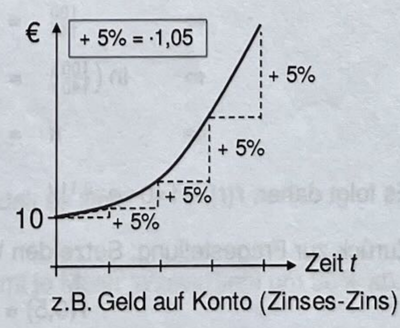
Exponentielles Wachstum

Lineares Wachstum



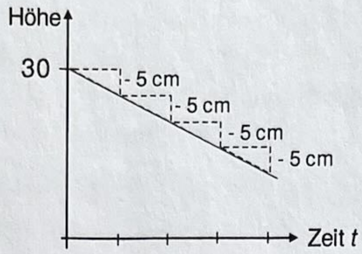
z.B. monatliches Taschengeld

Exponentielles Wachstum



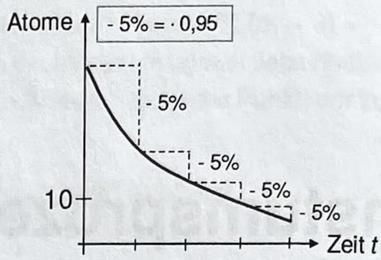
z.B. Geld auf Konto (Zinses-Zins)

<u>Lineare Abnahme/Zerfall</u>



z.B. abbrennende Kerze

<u>Exponentielle Abnahme/Zerfall</u>



z.B. radioaktiver Zerfall von Atomen

Angabe mit *e*-Funktionen

Eine Prozentuale Zu-/Abnahme *p* kann mit der *e*-Funktion beschrieben werden:

$$f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$

Hierbei ist $k = \ln\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$, wobei „+" jeweils für eine Zunahme ($k > 0$) und „−" für eine Abnahme ($k < 0$) verwendet werden muss.

Beispiel Taschengeld

Beispiel Nach dem Konsum von Schokolade schnellt der Blutzucker von Max auf einen Wert von 140 mg/dl. Es dauert etwa 3 Stunden bis sein Blutzuckerspiegel wieder den nüchternen Zustand von 100 mg/dl erreicht hat. Wie hoch ist sein Blutzuckerspiegel nach einer halben Stunde, wenn von einer prozentualen Abnahme ausgegangen wird?

1. Relevante Informationen filtern:

$$\text{(I)} \quad t = 0: \quad f(0) = 140$$

$$\text{(II)} \quad t = 3: \quad f(3) = 100$$

Abnahme des Blutzuckerspiegels **prozentual**: $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$

2. Zerfallsfunktion durch Einsetzen der Informationen bestimmen:

$$\begin{aligned}
\text{aus (I):} \quad & f(0) &=& \; a \cdot e^{k \cdot 0} = 140 \quad \Rightarrow a = 140 \\
\text{aus (II):} \quad & f(3) &=& \; a \cdot e^{k \cdot 3} \\
\Rightarrow \quad & 100 &=& \; a \cdot e^{k \cdot 3} && \mid a = 140 \text{ einsetzen} \\
\Leftrightarrow \quad & 100 &=& \; 140 \cdot e^{k \cdot 3} && \mid : 140 \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{100}{140} &=& \; e^{k \cdot 3} && \mid \ln \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\left(\tfrac{100}{140}\right) &=& \; k \cdot 3 && \mid : 3 \\
\Leftrightarrow \quad & k &=& \; \frac{\ln\left(\frac{100}{140}\right)}{3} \approx -0{,}11
\end{aligned}$$

Es folgt daher: $f(t) = 140 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t}$

3. Zurück zur Fragestellung: Setze den Wert für *t* ein und bestimme $f(t)$:

$$f(0{,}5) = 140 \cdot e^{-0{,}11 \cdot 0{,}5} \approx 132{,}51$$

Antwort: Der Blutzuckerspiegel beträgt nach einer halben Stunde 132,51 $\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ (am Ende muss natürlich die Einheit an der Antwort stehen)

Unbeschränkt oder beschränkt?
Es gibt beim Wachstum zwei Fälle, die zu unterscheiden sind:

1. Gibt es keine Beschränkung des Wachstums/Zerfalls, so ist dieses unbeschränkt und wird über $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ beschrieben (mit Startwert $a = f(0)$ und $k > 0$ (Wachstum) bzw. $k < 0$ (Zerfall)). Für die erste Ableitung gilt dann:

$$f(t) = f(0) \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow f'(t) = k \cdot f(0) \cdot e^{k \cdot t} = k \cdot f(t)$$

Gefragt wird bei Sachaufgaben häufig...

...bei unbeschränktem Wachstum nach der **Verdopplungszeit** (Zeit bis zum doppelten Startwert):

$$f(t_2) = f(0) \cdot e^{k \cdot t_2} = 2 \cdot f(0)$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{\ln(2)}{k}$$

...bei unbeschränktem Zerfall nach der **Halbwertszeit** (Zeit bis zum halben Startwert):

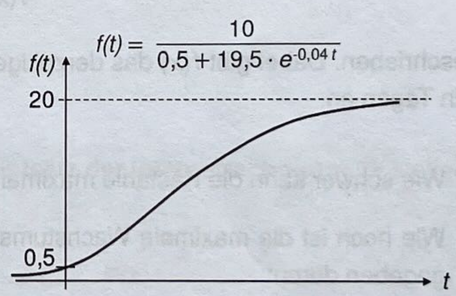
$$f(t_{0,5}) = f(0) \cdot e^{k \cdot t_{0,5}} = 0{,}5 \cdot f(0)$$
$$\Rightarrow t_{0,5} = \frac{\ln(0{,}5)}{k}$$

2. Der Bestand ist im Sachzusammenhang aufgrund bestimmter Bedingungen beschränkt (**Beispiel**: Abkühlung auf Raumtemperatur)

$$f(t) = S \pm c \cdot e^{-k \cdot t} \text{ mit } k > 0, S \in \mathbb{R}$$

Logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum beschreibt Prozesse, bei denen die Wachstumsgeschwindigkeit zunächst zunimmt, bevor sie gegen 0 verläuft. Der Bestand nähert sich also einem Grenzwert asymptotisch an.



Die Funktion für logistisches Wachstum lautet:

$$f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S - a) \cdot e^{-Skt}} \qquad 0 < a < S \text{ und } a = f(0), k > 0, S > 0$$

Dabei ist a der Schnittpunkt mit der y-Achse und S die Schranke.

9.2 Aufgaben

A-9.1. Um was für eine Art von Wachstum/Zerfall handelt es sich?

a) Die Stärke eines Sonnenstrahls auf einen See nimmt je Meter Wassertiefe um 20% ab.

b) Ein Baum wächst jedes Jahr um einen halben Meter.

c) Eine Bakterienkultur nimmt jährlich um 30% zu.

Lösungen

A-9.2. Beim Ablassen von Wasser aus einer quaderförmigen Badewanne, die mit 200 Litern Wasser gefüllt ist, lässt sich der Rückgang der Füllmenge aus der Badewanne durch $f(x) = -5x + b$ beschreiben (x = Zeit in Minuten).

a) Welchen Wert hat die Konstante b in der Funktionsgleichung?

b) Wie viel Liter Wasser sind nach 10 min noch in der Badewanne?

c) Wann ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Füllmenge vorhanden?

A-9.3. Eine Pflanze wird von einem Bakterienstamm ($N = 300$) befallen. Der Bakterienstamm wächst exponentiell. Der Besitzer der Pflanze behandelt den Befall jedoch sofort. Das Mittel reduziert die Anzahl der Bakterien nach

$$f(x) = N \cdot e^{-0{,}25x}$$

mit x als Anzahl der Tage.

a) Wann hat sich der Bakterienstamm halbiert?

b) Wann ist die Pflanze gerettet, also wann ist weniger als eine Bakterie noch vorhanden?

A-9.4. Das Wachstum einer bestimmten Kastanie ist durch

$$f(x) = \frac{40 \cdot e^{0{,}05x}}{9 + e^{0{,}05x}}$$

beschrieben. Dabei gibt $f(x)$ das derzeitige Gewicht der Kastanie in Gramm in Abhängigkeit von x in Tagen an.

a) Wie schwer kann die Kastanie maximal werden?

b) Wie hoch ist die maximale Wachstumsgeschwindigkeit? Hierbei sind 2. und die 3. Ableitung gegeben durch:

$$f'(x) = \frac{18e^{0{,}05x}}{\left(e^{0{,}05x} + 9\right)^2},\ f''(x) = \frac{8{,}1e^{0{,}05x} - 0{,}9e^{0{,}1x}}{\left(e^{0{,}05x} + 9\right)^3},\ f'''(x) = \frac{3{,}645e^{0{,}05x} - 1{,}62e^{0{,}1x} + 0{,}045e^{0{,}15x}}{\left(9 + e^{0{,}05x}\right)^4}$$

10 Integralrechnung

Bisher: Ableitungen berechnet ⇒ Information über die Steigung einer Funktion (Textaufgabe: Änderungsrate) ⇒ Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten

Neu: Integrale

- **Anschaulich**: Berechnung des Flächeninhaltes unter dem Graph einer Funktion
- **Anwendung**: Aus Änderungsrate wird die sich ändernde Größe ermittelt (z.B.: aus der Geschwindigkeit in km/h der zurückgelegte Weg)
- Bestimmte Integrale (Integrale mit Grenzen) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ oder unbestimmte Integrale (ohne Grenzen) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- Integration kann als Umkehrung der Differentiation angesehen werden

10.1 Grundlagen

Bestimmung von Integralen über die Integration (**Hauptsatz der Integralrechnung**) für stetige Funktionen f:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

mit einer Stammfunktion F von f in $[a, b]$.

Definition: F ist eine Stammfunktion von f in einem Intervall J, wenn

$$F'(x) = f(x), \text{ für alle } x \text{ aus } J$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist es auch $F + c$ mit beliebiger Konstante c. Daher immer nur von **einer** Stammfunktion sprechen, wenn das c nicht mit angegeben wird!

	$F(x)$	Stammfunktion
integrieren	$\uparrow$	
	$F'(x) = f(x)$	Ausgangsfunktion
differenzieren	$\downarrow$	
	$f'(x)$	1. Ableitungsfunktion
differenzieren	$\downarrow$	
	$f''(x)$	2. Ableitungsfunktion

Wie beim Ableiten gibt es auch beim Integrieren bzw. Stammfunktion bilden Regeln:

1. **Summenregel** (jeder Summand wird einzeln integriert)

2. **Faktorregel** (ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren erhalten)
3. **Produktintegration** (partielle Integration) $\Rightarrow$ folgt später
4. **Integration durch Substitution** $\Rightarrow$ folgt später

10.2 Typische Stammfunktionen

Erinnerung: Zu einer Funktion $f(x)$ wird eine Stammfunktion $F(x)$ gesucht.
Tipp zur Überprüfung: $F'(x) = f(x)$

Eine Stammfunktion zu der Funktion

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{-1\}$$

ermittelt sich allgemein über

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Nachweis einer Stammfunktion

$f(x)$	$F(x)$
10	$10x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$5x^7$	$\frac{5}{8}x^8$
$3x^4 - 2x^3 + 4$	$\frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + 4x$

Dies lässt sich vielfach verwenden (s. Tabelle). Für Funktionen, welche nicht die oben angegebene Form x^n haben, gelten andere Regeln. Wenn man z.B. für $f(x) = e^{x^2}$ als Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2x}e^{x^2}$ angibt, dann stellt man fest:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2x}e^{x^2}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2x}\right)' \cdot \left(e^{x^2}\right) + \left(\frac{1}{2x}\right) \cdot \left(e^{x^2}\right)' \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

F ist also keine Stammfunktion von f. Solch eine Funktion f ist mit Methoden aus der Schulmathematik nicht integrierbar.

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
e^{3x}	$\frac{1}{3}e^{3x}$
e^{4-2x}	$\frac{-1}{2}e^{4-2x}$
$20e^{10x}$	$2e^{10x}$
$3e^{5-2x}$	$\frac{3}{-2}e^{5-2x}$
e^{x^2}, e^{x^3}	nicht relevant
$2x \cdot e^{-2x}$	Partielle Integration
$2x \cdot e^{x^2}$	Substitution

Logarithmus

Auf die Bildung der Stammfunktionen von $f(x) = 2x \cdot e^{-2x}$ und $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ wird später mittels der Produktintegration (partielle Integration) und der Integration durch Substitution näher eingegangen.

10.3 Unbestimmtes Integral

Unbestimmtes Integral bedeutet ein Integral ohne Grenzen. Als Lösung gibt man **alle möglichen** Stammfunktionen an:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

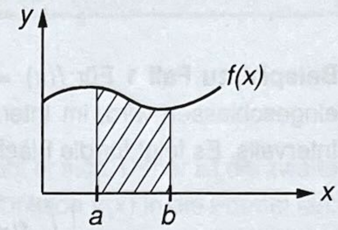
Beispiele $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c$ oder $\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + c$

10.4 Bestimmtes Integral

Ein bestimmtes Integral ist ein Integral mit vorgegebenen Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

F ist dabei irgendeine Stammfunktion von *f*, welche belanglos ist wegen der Differenzbildung mit $c - c$.



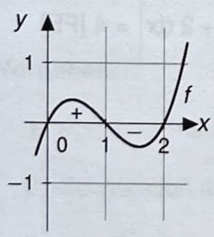
Beispiel $\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - \left(1^2\right) = 8$

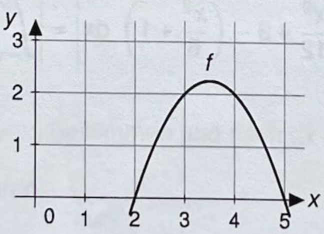
Achte auf das „–" beim Wert der unteren Grenze. Am besten wird der 2. Term in Klammern gesetzt: $F(b) - [F(a)]$! Dadurch werden unnötige Vorzeichenfehler vermieden.

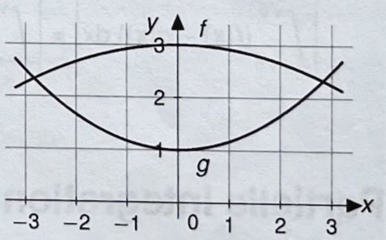
10.5 Flächeninhalte bestimmen

Wir unterscheiden **3 Fälle**:

1. Zwischen dem Graphen und der *x*-Achse in einem Intervall $[a, b]$
2. Zwischen dem Graphen und der *x*-Achse (eingeschlossene Fläche)
3. Zwischen zwei Funktionen (eingeschlossene Fläche)







Vorgehen:

1. Zu integrierende Funktion wählen. Fall 1 und 2: $f(x)$
   Bei Fall 3 muss die Differenzfunktion $f(x) - g(x)$ integriert werden
2. Zur Berechnung des Flächeninhalts nicht über die Nullstellen hinweg integrieren: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im betrachteten Intervall
3. Integration
   - Fall 1: $\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$
   - Fall 2: $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx\right|$
   - Fall 3: $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) - g(x)\,dx\right|$

Beachte: Flächeninhalte können nur positiv sein, daher stehen um jedes Integral noch Betragsstriche |...|. Wir unterscheiden einen Integralwert (kann auch negative Werte annehmen) von einem Flächeninhalt.

Beispiel zu Fall 1 Für $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ soll die Fläche, die vom Graph und der x-Achse eingeschlossen wird, im Intervall $[0,2]$ berechnet werden. Nullstelle: $x = 1$ liegt innerhalb des Intervalls. Es folgt für die Fläche:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 f(x)\,dx\right| = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5 \text{ [FE]}$$

Beispiel zu Fall 2 Für $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ soll die Fläche, die vom Graph und der x-Achse eingeschlossen wird, berechnet werden. Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Es folgt für die Fläche:

$$\left|\int_2^5 -x^2 + 7x - 10\,dx\right| = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right]_2^5$$
$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7\cdot 5^2}{2} - 10\cdot 5\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7\cdot 2^2}{2} - 10\cdot 2\right) = 4{,}5 \text{ [FE]}$$

Beispiel zu Fall 3 Für die Fläche, die durch die Graphen von f und g mit

$$f(x) = -\frac{x^2}{12} + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^2}{6} + 1$$

eingeschlossen wird, benötigen wir zunächst die Schnittstellen der beiden Funktionen mit $x_1 = -\sqrt{8}$ und $x_2 = \sqrt{8}$. Es folgt für die Fläche:

$$\left|\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} (f(x) - g(x))\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} -\frac{x^2}{12} + 3 - \left(\frac{x^2}{6} + 1\right)\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} -\frac{x^2}{4} + 2\,dx\right| = 4 \text{ [FE]}$$

10.6 Partielle Integration

Beispiel $f(x) = x \cdot e^x$

Die Stammfunktion kann nicht direkt mit den bisherigen Regeln bestimmt werden. Es muss die Integration eines Produkts gebildet werden, bei dem jeder Faktor von der zu integrierenden Variablen x abhängig ist. Die Stammfunktion wird durch Produktintegration (partielle Integration) gebildet, wobei hierbei ein Faktor des Produktes integriert und der andere Faktor abgeleitet wird.

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Produktintegration (partielle Integration) bedeutet demnach:

- einen Term ableiten: $u(x) \Rightarrow u'(x)$
- einen Term integrieren: $v'(x) \Rightarrow v(x)$

- einen Term direkt berechnen: $[u(x) \cdot v(x)]_a^b$

Bezüglich des Beispiels von oben, gibt es für $\int_0^2 x \cdot e^x \, dx$ zwei Möglichkeiten für die Wahl von $u(x)$ bzw. $v'(x)$:

1. $u(x) = e^x$ und $v'(x) = x$. Dann ist $u'(x) = e^x$ und $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.
2. $u(x) = x$ und $v'(x) = e^x$. Dann ist $u'(x) = 1$ und $v(x) = e^x$.

Im ersten Fall verkompliziert sich der Term, im zweiten Fall vereinfacht er sich. Daher ist die zweite Möglichkeit zu wählen. Wir setzen also Ableitung $u'(x)$ und Stammfunktion $v(x)$ in die Formel ein:

$$\Rightarrow \int_0^2 (x \cdot e^x) \, dx = [x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 (1 \cdot e^x) \, dx = [x \cdot e^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = e^2 + 1 \approx 8{,}39$$

10.7 Integration durch Substitution

Hat eine zu integrierende Funktion folgende Form

$$f(u(x)) \cdot u'(x)$$

kann das Integral durch Ersetzen (Substitution) eines Teils des Integranden durch eine neue Integrationsvariable vereinfacht werden. u' soll also für die Funktion angesetzt werden, deren Ableitung nicht schwieriger wird als die Funktion (z.B. e^x, $\sin(x)$ usw.), d.h. neben einer inneren Funktion kommt auch deren Ableitung vor.

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, du$$

$f(u)$ = äußere Funktion; $u(x)$ = innere Funktion

Vorgehen:

1. $u(x)$ erkennen, $\frac{du}{dx} = u'(x)$ bestimmen und nach dx umstellen
2. Substitution durchführen
3. Integral lösen
4. Resubstitution durchführen (bei unbestimmten Integralen)

Beispiel

$$\int_4^5 \overbrace{\underbrace{(x^2 - 4)}_{=u(x)}{}^3}^{f(u(x))} \cdot \overbrace{2x}^{u'(x)} \, dx$$

$$\text{mit } u = x^2 - 4 \text{ folgt:} \quad \int_4^5 u^3 \cdot 2x \, dx$$

$$u' = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \quad \int_4^5 u^3 \cdot 2x \, \frac{du}{2x}$$

$$\text{mit } u(4) = 12 \text{ und } u(5) = 21 \text{ folgt:} \quad \int_{12}^{21} u^3 \, du = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{12}^{21} = 43.436,25 \text{ [FE]}$$

Für die Stammfunktion müssen wir u resubstituieren: $F(x) = \frac{1}{4}\underbrace{(x^2-4)}_{=u}{}^4 + c, c \in \mathbb{R}$.

Weitere kurze **Beispiele**:

1)

innere Funktion

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\, dx \qquad u = 2x$$

äußere Funktion

$$= \int_0^{2\pi} \sin(u)\, dx \qquad u' = 2 = \frac{du}{dx}$$

$$= \int_{u(0)=0}^{u(2\pi)=4\pi} \sin(u)\, \frac{du}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

Grenzen ersetzen!

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos(u)]_0^{4\pi}$$

2)

innere Funktion

$$\int_1^2 e^{3x}\, dx \qquad u = 3x$$

äußere Funktion

$$= \int_1^2 e^u\, dx \qquad u' = 3 = \frac{du}{dx}$$

$$= \int_{u(1)=3}^{u(2)=6} e^u\, \frac{du}{3} \qquad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Grenzen ersetzen!

$$= \frac{1}{3}\int_3^6 e^u\, du$$

$$= \frac{1}{3}[\, e^u\,]_3^6$$

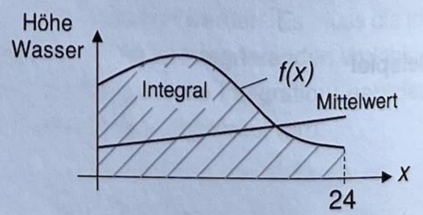
10.8 Mittelwertsatz

Das Integral einer (stetigen) Funktion, kann über den mittleren Funktionswert abgeschätzt werden. Das heißt, es existiert für eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ein z, sodass $f(z)$ dem mittlerem Funktionswert in dem Intervall entspricht.

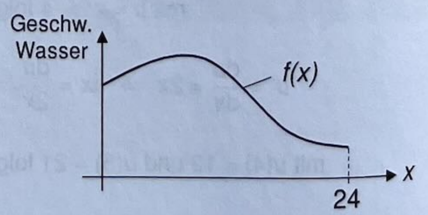
$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}[F(x)]_a^b = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$$

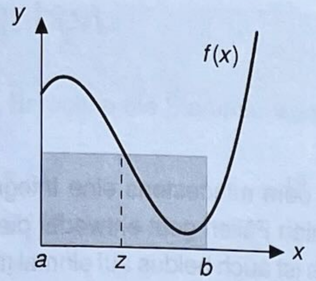
Beispiel $\frac{1}{24-0}\int_0^{24} f(x)\, dx$ ist je nach Bedeutung der Funktion f...

...die durchschnittliche Höhe des Wasserstandes in 24 Std.



...die durchschnittliche Zunahmegeschwindigkeit des Wassers in 24 Std.





In der Form $f(z) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$ können wir immer ein $z \in [a, b]$ finden, so dass der Flächeninhalt unter der Kurve zwischen a und b dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $f(z)$ entspricht.

10.9 Rotationskörper

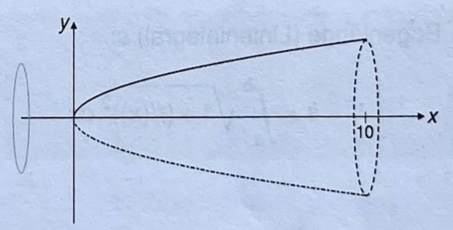
Ein Rotationskörper ist ein Körper, der durch die Rotation eines Graphen um eine Achse entsteht. Häufig ist nach dem Volumen solcher Körper gefragt.

Volumenformel mit Integral für Rotationskörper um die

x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$ bzw. y-Achse: $V = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$, für $f(a) < f(b)$

Die Gleichung für die Volumenberechnung zur Rotation um die y-Achse wird vorausgesetzt, dass die Umkehrfunktion von f existiert. Man lässt dann die Umkehrfunktion im passenden Intervall um die x-Achse rotieren, was zu einem volumengleichen Rotationskörper führt wie die Rotation von f um die y-Achse.

Beispiel Gegeben ist ein Sektglas, das durch die Rotation der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse im Intervall $[0, 10]$ beschrieben wird. Wie groß ist das Volumen des Sektglases, wenn es voll bzw. halbvoll ist? Da eine Rotation um die x-Achse vorliegt, verwenden wir die entsprechende Formel von oben.



Das volle Sektglas hat ein Volumen von

$$V_{\text{voll}} = \pi \cdot \int_0^{10} (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{10} x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 50\pi\ [\text{VE}]$$

und das halbvolle Sektglas ein Volumen von

$$V_{\text{halb}} = \pi \cdot \int_0^{5} (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{5} x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{5} = 12{,}5\pi\ [\text{VE}].$$

10.10 Zusatz

Integralfunktion

Das Integral aus einer festen unteren Grenze a und einer variablen oberen Grenze x nennt sich Integralfunktion:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Uneigentliches Integral

Uneigentliches Integral

Als uneigentliches Integral bezeichnet man ein Integral, bei dem mindestens eine Integrationsgrenze (also untere oder obere) keine konkrete Zahl ist. In vielen Fällen geht entweder die untere Grenze gegen $-\infty$ oder die obere Grenze gegen $+\infty$. Natürlich ist auch beides auf einmal möglich.

Um ein solches Integral zu berechnen, bestimmt man den Grenzwert der Integrale mit reellen Zahlen als Integrationsgrenzen.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Wenn $f > 0$ im Intervall $[a, \infty]$ gilt, dann liefert dieser Grenzwert den Flächeninhalt unterhalb des Graphen von f in diesem unendlichen Intervall.

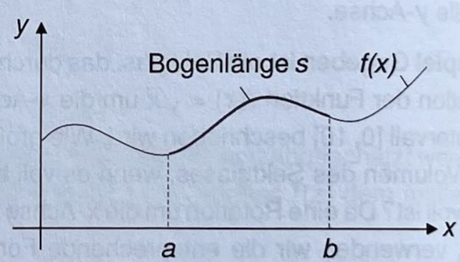
Beispiel $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}[-e^{-x}]_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}[-e^{-b}-(-e^0)] = \lim\limits_{b\to+\infty}[\underbrace{-e^{-b}}_{\to 0}+1] = 1$

Bogenlänge bei Funktionen

Die Bogenlänge (Linienintegral) einer Funktion f ist die Länge des Graphen der Funktion in einem Intervall $[a, b]$. Sie wird berechnet mithilfe der Ableitung f', die so sein muss, dass das Integral zu berechnen ist.

Bogenlänge (Linienintegral) s:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

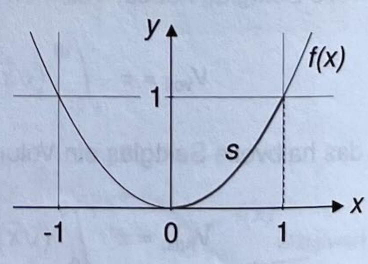


Beispiel Bestimme die Bogenlänge der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

Die Bogenlänge beträgt mit $f'(x) = 2x$:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{\ln\left(\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right|\right) + 2x\sqrt{4x^2+1}}{4}\right]_0^1 \approx 1{,}48\ [\text{LE}]$$



Der Bogen hat im Bereich zwischen 0 und 1 ungefähr die Länge $s = 1{,}48$ Längeneinheiten.

Auch wenn ihr den Integrationsschritt nicht nachvollziehen könnt, lässt sich die numerische Berechnung mit dem Taschenrechner durchführen.

10.11 Aufgaben

Lösungen

A-10.1. Berechne die Stammfunktion folgender Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$
b) $f(x) = \frac{1}{6}x^5 + 2x^2 + x - 10$
c) $f(x) = 7x^{-2}$
d) $f(x) = 5 \cdot e^x$
e) $f(x) = 2x^3 + \cos(x + 2)$

A-10.2. Bestimme die folgenden Integrale.

a) $\int_1^6 3x \, dx$
b) $\int_1^2 \frac{1+x}{x} \, dx$
c) $\int_0^{2\pi} \cos(3x + 10) \, dx$
d) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x + 3) + x) \, dx$
e) $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$

A-10.3. Löse folgende Integrale unter Verwendung von Produktintegration (partieller Integration) oder Substitution.

a) $\int 12(x + 1)^3 \, dx$
b) $\int x \sin(x) \, dx$
c) $\int x \sin\left(x^2\right) \, dx$
d) $\int x^2 \ln(x) \, dx$

A-10.4. Wie groß ist die Fläche im zweiten Quadranten, die von den Koordinatenachsen und der Funktion $f(x) = x^3 + 8$ eingeschlossen wird?

11 Scharfunktionen

Enthält eine Funktionsgleichung neben ihrer Variablen noch einen Parameter (z.B. a) spricht man von einer Scharfunktion.

11.1 Zusammenhänge

Wir betrachten die Funktion $f_a(x) = a \cdot x^2, a \in \mathbb{R}$.

> Der Parameter a ist auch eine Variable, für die man Zahlen einsetzen kann. In der Regel ist vorgegeben, welche Zahlen für a eingesetzt werden dürfen. Der Parameter ist Teil der Funktions-Zuordnungsvorschrift, aber im Unterschied zur Variablen x wird kein Funktionswert $f(x)$ zugeordnet.

Ist eine Scharfunktion gegeben, können dieselben Fragen wie bei „normalen" Funktionen gestellt werden (Nullstellen und Extrempunkte bestimmen, Ableiten usw.). Bei der Lösung solcher Aufgaben ist dabei folgendes zu beachten:

1. Die Nullstellen/Extrempunkte sind meist von a abhängig. Behandle a beim Umstellen der Gleichung wie eine Zahl!

   - **Wenn $a > 0$ bzw. $a \in \mathbb{R}^+$: keine Fallunterscheidung nötig**
   - **Wenn $a \in \mathbb{R}$ oder $a \neq 0$: Parameter a kann auch negative Werte annehmen! Hier ist eine Fallunterscheidung nötig.**

2. Ableiten/Integrieren: Behandle a wie eine Konstante!

$f_a(x)$	$f_a'(x)$
$2a$	0
a^2	0
a^2x	a^2
$(a-1)x$	$a-1$
$3a^2x^3$	$9a^2x^2$
$ax^4 - 4ax + a^3$	$4ax^3 - 4a$

$f_a(x)$	$F_a(x)$
a	ax
a^2	a^2x
a^2x	$\frac{a^2}{2}x^2$
ax^2	$\frac{a}{3}x^3$
$a^2x^4 - ax + a^3$	$\frac{a^2}{5}x^5 - \frac{a}{2}x^2 + a^3x$
$a(x^3 - a)$	$a(\frac{1}{4}x^4 - ax)$

3. Achte z.B. auf Definitionslücken, welche die Werte für a einschränken

4. Ortskurve = Kurve auf der alle Extrempunkte/Wendepunkte liegen (siehe Beispiel)

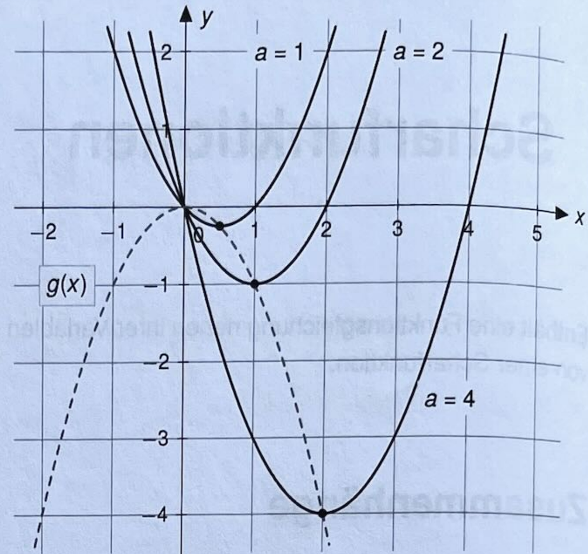
Beispiel zu Ortskurve Gegeben sei die Funktionsschar $f_a(x) = x^2 - ax,\ a \in \mathbb{R}$.

Bestimme die Ortskurve, auf der alle Extrempunkte der Funktion liegen.

Als erstes bestimmen wir die Extrempunkte in Abhängigkeit von a:

$$f_a'(x) = 2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

Es handelt sich um einen Tiefpunkt, da $f_a''(x) = 2 > 0$ ist. Alle Tiefpunkte der Funktionsschar liegen bei $T(\frac{a}{2} | -\frac{a^2}{4})$. Wir müssen die Stelle $\frac{a}{2}$ durch x ausdrücken, um die Funktion zur Ortskurve zu erhalten. Es folgt:



$$x = \frac{a}{2} \leftrightarrow a = 2x$$

$$\underbrace{T(x \mid g(x))}_{\text{Ortskurve}} = T\left(\frac{a}{2} \,\middle|\, -\frac{a^2}{4}\right) = T\left(\frac{2x}{2} \,\middle|\, -\frac{(2x)^2}{4}\right) = T(x \mid \overbrace{-x^2}^{g(x)\,=})$$

Damit lautet die Ortskurve $g(x) = -x^2$, die alle Tiefpunkte der Funktionenschar verbindet.

11.2 Aufgaben

Lösungen

A-11.1. Zeichne die Graphen zu den Funktionen $f_a(x) = ax^2 + (1 - a)^2$ mit $a = 1, 2, 3, 4$.

A-11.2. Gegeben ist der Funktionsterm $f_a(x) = ax^2 + x + \frac{2}{a}$.
Was haben die Funktionen mit $a = 1, 2, 5$ alle gemeinsam?

A-11.3. Gegeben ist der Funktionsterm $f_a(x) = 3x^3 - \frac{3}{a}x^2$, mit $a \neq 0$.
Ermittle in Abhängigkeit vom Parameter a die Extrempunkte.

A-11.4. Wie muss a gewählt werden, damit der Graph der Funktion $f_a(x)$ aus **A-11.3.** durch den Punkt $P(1|\sqrt{2})$ geht?

12 Specials

Rationale Funktionen

Allgemeine Form = Bruch aus zwei Polynomen:

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$$

mit $z(x)$ dem Zählerpolynom und $n(x)$ dem Nennerpolynom.

Tricks bei der (Kurven-)Diskussion solcher Funktionen:

1. Definitionsbereich: Alle Nullstellen des Nenners sind Definitionslücken
2. Nullstellen: Nur durch die Nullstellen des Zählers bestimmen, da „0 durch irgendetwas" = 0
3. Polstellen: Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind
4. Grenzwertverhalten (im Unendlichen): In Zähler und Nenner höchste Potenz von x ausklammern und dann $\lim_{x\to\infty}(\ldots)$ bilden
5. Ableiten: Zuerst Polynomdivision, dann ableiten (oder Quotientenregel)

Terme mit x im Nenner

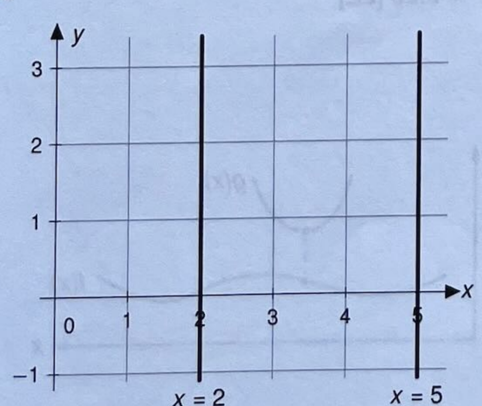
Bruchgleichung lösen

Trick

Geraden mit besonderer Lage

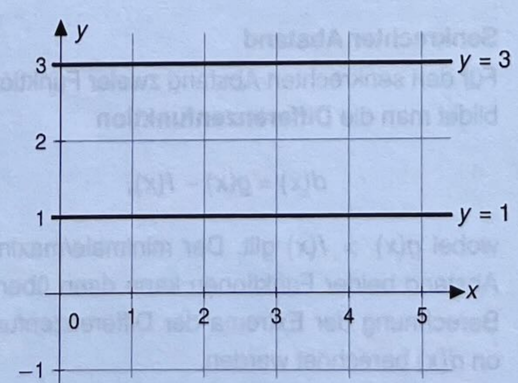
Parallelen zur y-Achse

Achtung: Diese Geraden sind keine Funktionen, da einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet sind!



Parallelen zur x-Achse

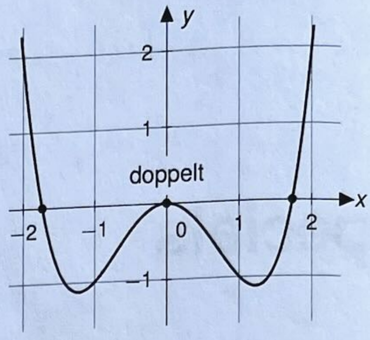
Ist die Steigung einer linearen Funktion gleich 0, so ist die Gerade parallel zur x-Achse: $y = 0 \cdot x + b = b$.



Mehrfache Nullstellen

Doppelte Nullstelle

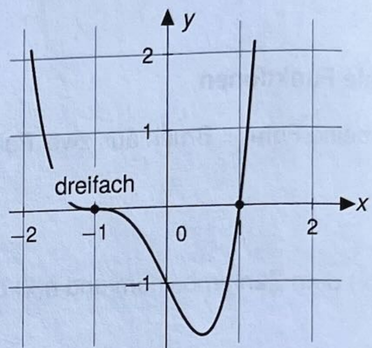
$$0 = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2$$
$$0 = \frac{1}{2}x^2 \cdot (x^2 - 3)$$
$$x^2 = 0 \lor x^2 - 3 = 0$$



Bei $x_{1,2} = 0$ ist eine doppelte Nullstelle, bei $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ liegen einfache Nullstellen vor.

Dreifache Nullstelle (selten bis nie)

$$f(x) = (x+1)^3(x-1)$$
$$0 = (x+1)^3(x-1)$$
$$(x+1)^3 = 0 \lor x - 1 = 0$$



Bei -1 liegt eine dreifache Nullstelle vor.

Stückweise definierte Funktionen

In der Mathematik ist eine abschnittsweise definierte Funktion eine Funktion, die mehrere Unter-Funktionen hat, und jede ist gültig für bestimmte Werte für x! Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ h(x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Das bedeutet, dass für x-Werte zwischen 0 und 2 die Funktion $f(x)$ den Verlauf von $g(x)$ beschreibt. Für x-Werte größer 2 wird die Funktion $g(x)$ durch $h(x)$ beschrieben.

Abstand zweier Punkte

> Eine allgemeine Formel, die den Abstand von zwei Punkten berechnet, lautet:
>
> $$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

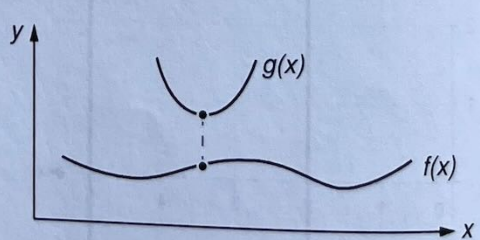
Beispiel Berechne den Abstand der Punkte $P_1(1|2)$ und $Q(3|10)$:

$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (2-10)^2} = 8{,}25 \text{ [LE]}$$

Senkrechter Abstand

Für den senkrechten Abstand zweier Funktionen bildet man die **Differenzenfunktion**

$$d(x) = g(x) - f(x),$$



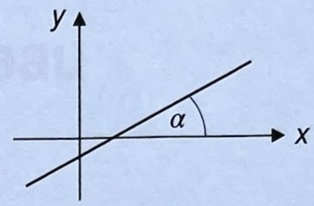
wobei $g(x) > f(x)$ gilt. Der minimale/maximale Abstand beider Funktionen kann dann über die Berechnung der Extrema der Differenzenfunktion $d(x)$ berechnet werden.

Interpretation:

- ein Hochpunkt bedeutet ein maximaler senkrechter Abstand
- ein Tiefpunkt bedeutet ein minimaler senkrechter Abstand

Schnittwinkel zwischen Gerade und x-Achse

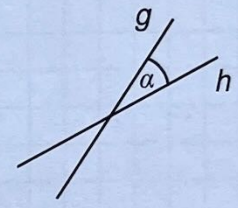
Der Schnittwinkel α (im mathematisch positiven Sinn - also gegen den Uhrzeigersinn) zwischen einer Geraden und der x-Achse ist der Steigungswinkel der Geraden.
Der Tangens des Steigungswinkels einer Geraden ist für $\alpha \neq 90°$ gleich ihrer Steigung m:



$$\tan(\alpha) = m$$

Winkel zwischen zwei Geraden

Der Winkel zwischen zwei Graphen linearer Funktionen (Schnittwinkel α) kann mittels ihrer Steigungen (m_1 bzw. m_2) berechnet werden, wenn sie nicht senkrecht zueinander stehen:



$$\tan(\alpha) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

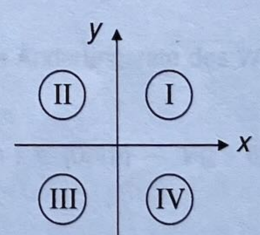
Stehen die Geraden senkrecht zueinander, gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Bei kurvigem Verlauf zweier Funktionen nehmen wir im Schnittpunkt den Winkel zwischen ihren Tangenten. Wir müssen also erst deren Steigung an der Stelle des Schnittpunktes bestimmen.

Quadranten

Dadurch, dass die beiden Koordinatenachsen sich schneiden, entstehen vier voneinander getrennte Abschnitte in der Ebene. Sie werden als Quadranten bezeichnet.

Der 1. Quadrant liegt oben rechts. Die anderen Quadranten werden gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert.

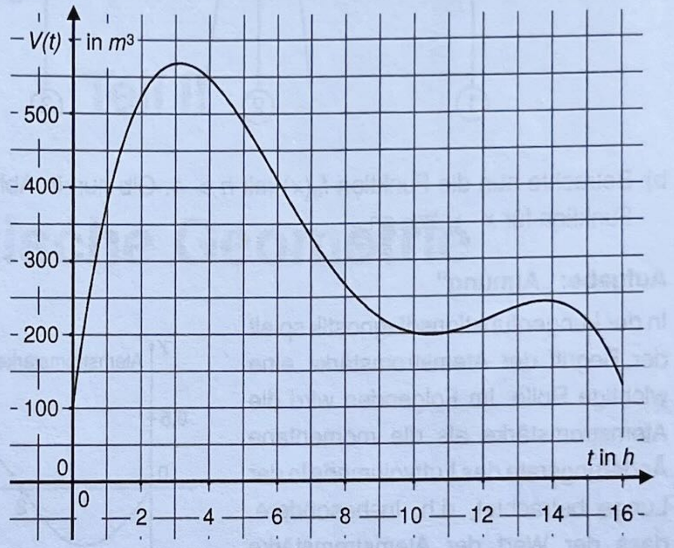


13 Aufgaben auf Abiturniveau

Lösungen

Aufgabe: „Wasserbecken“

Zu sehen ist der Graph einer im $[0, 16]$ definierten Funktion $V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Wasservolumen in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden, wobei $t \geq 0$. $V(t)$ gibt das Volumen in Kubikmetern an.



a) Gib mit Hilfe der Abbildung näherungsweise das Volumen 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn, sowie den Zeitraum an, in welchem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

b) Bestimme mit Hilfe der Abbildung näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens 2 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

c) Erläutere, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0; 10] \rightarrow V(t + 6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheide, ob diese Beziehung für $t = 5$ erfüllt ist.

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Diese momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die Funktion $g(t) = 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden h und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in m^3/h.

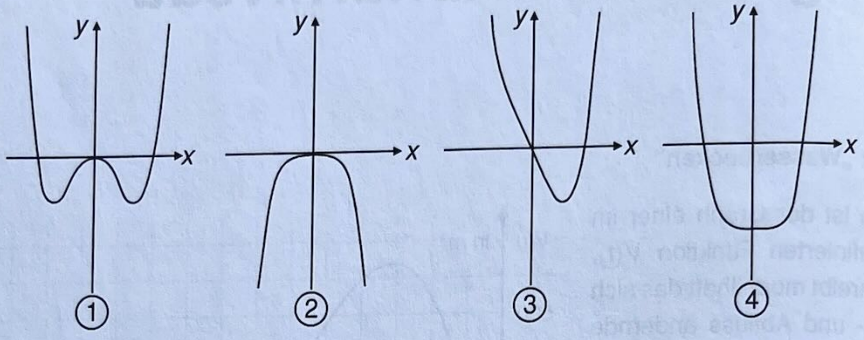
d) Begründe, dass die Funktionswerte von $g(t)$ für $0 < t < 7{,}5$ positiv und für $7{,}5 < t < 12$ negativ sind.

e) Erläutere die Bedeutung des Wertes des Integrals $\int_a^b g(t)\,dt$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechne das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beginn 150 m^3 im Becken waren. Begründe, warum dies das maximal vorhandene Volumen über den gesamten Beobachtungszeitraum ist.

Aufgabe: „Scharfunktion"

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n(x) = x^4 - 2x^n$ mit ganzzahligem Parameter $n \geq 0$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0(x) = x^4 - 2$.

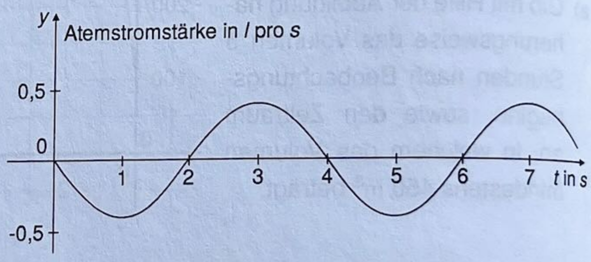
a) Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ und $f_4(x)$. Ordne jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründe drei dieser Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.



b) Betrachte nun die Funktion $f_n(x)$ mit $n > 4$. Gib nun in Abhängigkeit von n das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ an.

Aufgabe: „Atmung"

In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d.h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist.



Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $g(t) = -0{,}4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Die obige Abbildung zeigt den durch die Funktion $g(t)$ beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.

a) Berechne $g(1{,}5)$ und interpretiere das Vorzeichen im Sachzusammenhang.

b) Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Gib auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist. Ziehe in deine Argumentation auch die Abbildung mit ein.

c) Berechne $\int_2^4 g(t)\,dt$ und deute den Wert im Sachzusammenhang.

Die Testperson benötigt für einen kompletten Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

d) Gib zunächst die Atemfrequenz der Testperson an. Die Atmung einer anderen Testperson, deren Atemfrequenz um 20% schneller ist, wird über die Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ beschrieben. Bestimme den Wert von b.

Teil II

Analytische Geometrie

Motivational #2

Jeder will ein Top-Schüler sein. Aber niemand will ein Top-Schüler werden.

Organisation ist die halbe Miete für deinen Lernerfolg. Dein Setup muss passen, um künftig bessere Noten zu schreiben. Doch warum ist es so wichtig, dass du einen aufgeräumten Schreibtisch hast, regelmäßig Pausen einlegst und einen Lernplan anfertigst? Das alles erfährst du in meinen nächsten Tutorials. Viel Spaß damit :-)

Zu den Motivationsvideos

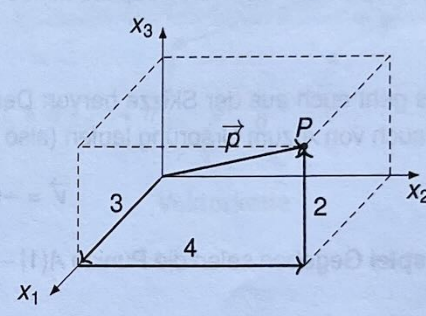
@mathe.nick

14 Vektoren

14.1 Punkte und Vektoren im Koordinatensystem

Punkte im dreidimensionalen Koordinatensystem werden durch Angabe ihrer drei Koordinaten (x-, y- und z-Koordinate bzw. x_1-, x_2- und x_3-Koordinate) festgelegt.

Beispiel
Der Punkt $P(3|4|2)$ wird erreicht, indem ausgehend vom Ursprung $(0|0|0)$ des Koordinatensystems 3 Einheiten in x_1-Richtung. 4 Einheiten in x_2-Richtung und 2 Einheiten in x_3-Richtung gegangen wird.



> Die Menge aller zueinander paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnet man als **Vektor**. Jeder einzelne Pfeil heißt Repräsentant des Vektors.

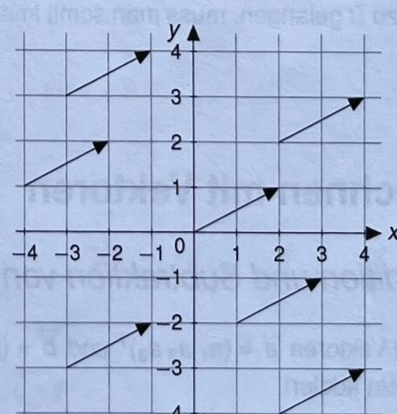
Ein Vektor in der Ebene bzw. im Raum wird dabei durch Angabe seiner zwei bzw. drei Koordinaten beschrieben.

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ \ 1)^T$ im $\mathbb{R}^2$

verläuft zwei Einheiten in x-Richtung und eine Einheit in y-Richtung.

Der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = (-4\ \ 3{,}5\ \ -2)^T$

im $\mathbb{R}^3$ verläuft 4 Einheiten in negativer x_1-Richtung, 3,5 Einheiten in x_2-Richtung und 2 Einheiten in negativer x_3-Richtung.



In der oberen Abbildung sehen wir verschiedene Repräsentanten des Vektors $\vec{v}$.

Ortsvektor eines Punktes

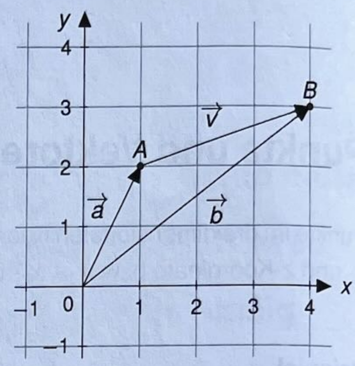
Ist $P(p_1|p_2|p_3)$ ein Punkt im Koordinatensystem, so heißt $\vec{p} = \vec{0P} = (p_1\ p_2\ p_3)^T$ der Ortsvektor zum Punkt P. Dieser gibt an, wie man vom Ursprung O zum Punkt P gelangt.

Beispiel Der zum Punkt $P(2|-4|3)$ gehörige Ortsvektor lautet $\vec{p} = (2\ -4\ 3)^T$.

Verbindungsvektor zweier Punkte

Allgemein verbindet ein Vektor $\vec{v} = \vec{AB}$ zwei Punkte: Seinen Fußpunkt A mit seiner Spitze B. Dadurch sind die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ eindeutig festgelegt und wir erhalten:

> Verbindungsvektor zweier Punkte
>
> $\vec{v} = \vec{AB} = \vec{0B} - \vec{0A}$ „Spitze minus Fuß“



Dies geht auch aus der Skizze hervor: Der Vektor $\vec{v}$ verläuft von A nach B. Stattdessen können wir auch von A zum Ursprung laufen (also $-\vec{0A}$) und von dort zu B (also $+\vec{0B}$). Wir erhalten:

$$\vec{v} = -\vec{0A} + \vec{0B} = \vec{0B} - \vec{0A}$$

Beispiel Gegeben seien die Punkte $A(1|-3|6)$ und $B(3|0|-2)$. Der Verbindungsvektor $\vec{AB}$ lautet:

$$\vec{AB} = \vec{0B} - \vec{0A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

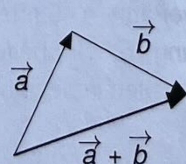
Der Vektor $\vec{AB}$ gibt an, wie man nach B gelangt, wenn man bei A steht. Will man vom Ursprung aus zu B gelangen, muss man somit immer zunächst den Ortsvektor $\vec{0A}$ laufen und anschließend $\vec{AB}$.

14.2 Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1\ a_2\ a_3)^T$ und $\vec{b} = (b_1\ b_2\ b_3)^T$ werden addiert, in dem man jede Komponente einzeln addiert.

> **Addition von Vektoren**
>
> $$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



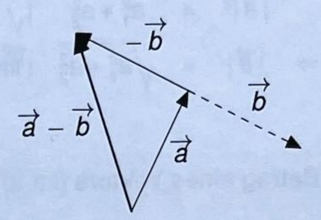
Vektoraddition

Der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ verläuft dabei vom Fußpunkt von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$.

Ein Vektor $\vec{b} = (b_1\ b_2\ b_3)^T$ wird von einem Vektor $\vec{a} = (a_1\ a_2\ a_3)^T$ subtrahiert, indem man seinen Gegenvektor $-\vec{b} = (-b_1\ -b_2\ -b_3)^T$ addiert:

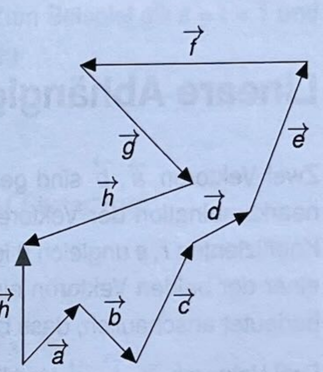
Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Vektorsubtraktion

Allgemein können beliebig viele Vektoren miteinander addiert bzw. subtrahiert werden. Dabei wird jeweils der „Fuß" des Folgevektors an die „Spitze" des vorherigen Vektors gehängt. Wir sprechen dann von einer **Vektorkette**. Endet die Vektorkette wieder am Ausgangspunkt, so heißt sie geschlossen. Die Summe aller Vektoren einer geschlossenen Vektorkette ergibt immer den **Nullvektor** $\vec{0}$. Seine Komponenten sind alle gleich Null, er führt von keinem Punkt zu einem anderen weiter.



Vektorkette

S-Multiplikation

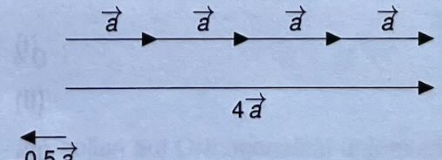
Die Skalarmultiplikation (Skalar = „Zahl") bezeichnet die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer Zahl $s \in \mathbb{R}$. Anschaulich entspricht dies einer Streckung des Vektors $\vec{a}$ mit dem Faktor s (mit Umkehr der Richtung für $s < 0$).

Skalarmultiplikation

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}, \quad \text{für } s \in \mathbb{R}$$

Beispiel Für $s = 4$ wird die Länge des Vektors $\vec{a}$ vervierfacht.

Der Vektor $-0{,}5\vec{a}$ ist halb so lang wie $\vec{a}$ und entgegengesetzt gerichtet.

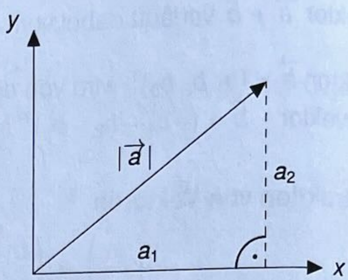


Betrag eines Vektors

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ verstehen wir die Länge eines Repräsentanten von $\vec{a}$. Wir schreiben $|\vec{a}|$.

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für einen Vektor $\vec{a} = (a_1\ a_2)^T$ in der Ebene:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= a_1^2 + a_2^2 \quad |\sqrt{} \\ \Rightarrow \quad |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad | \text{ immer positiv} \end{aligned}$$



Länge Vektor

Betrag eines Vektors (im $\mathbb{R}^3$)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

14.3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt, $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$, in der mindestens einer der Koeffizienten r, s ungleich 0 ist. Sonst sind sie linear unabhängig. Im Fall linearer Abhängigkeit ist einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen. Lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren bedeutet anschaulich, dass beide nicht parallel sind.

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig, wenn es keine reellen Zahlen r, s, t gibt, die alle drei $\neq 0$ sind, sodass gilt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Sonst sind sie linear unabhängig. Im Fall linearer Abhängigkeit lässt sich ein Vektor als Summe vom Vielfachen der beiden anderen darstellen, anschaulich: die drei Vektoren liegen in einer Ebene. Drei linear unabhängige Vektoren liegen nicht in einer Ebene.

Beispiel Die Vektoren $\vec{a} = (1\ 1\ 2)^T$, $\vec{b} = (3\ -1\ 1)^T$ und $\vec{c} = (-1\ 3\ 3)^T$ sollen auf lineare Unabhängigkeit überprüft werden.

Ansatz: $$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \begin{cases} \text{lin. unabh.,} & \text{für } r = s = t = 0 \\ \text{lin. abh.,} & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier also: $$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt drei Gleichungen (für jede Zeile eine Gleichung):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad r + 3s - t &= 0 \\ \text{(II)} \quad r - s + 3t &= 0 \\ \text{(III)} \quad 2r + s + 3t &= 0 \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem z.B. mit dem Additionsverfahren, in dem wir (I)+(−1·(II)) rechnen. Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{(I)} + (-1 \cdot \text{(II)}) \quad 4s - 4t &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad t &= s \end{aligned}$$

Wir setzen $t = s$ in (III) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \text{aus (III) folgt:} \quad 2r + s + 3\overbrace{s}^{=t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2r + 4s &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad r &= -2s \end{aligned}$$

Zum Schluss setzen wir $t = s$ und $r = -2s$ in (I) ein:

$$\begin{aligned} \text{aus (III) folgt:} \quad \overbrace{-2s}^{=r} + 3s - \overbrace{s}^{=t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen: $t = s$ beliebig und dazu $r = -2s$. Zum Beispiel gilt $s = t = 1$ und $r = -2 : -2\vec{a} + 1\vec{b} + 1\vec{c} = \vec{0}$. Die drei Vektoren sind linear abhängig.

Skalarprodukt

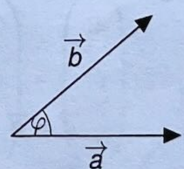
Das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$ ordnet zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Zahl („Skalar") zu:

Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Dabei gilt:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$



wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Durch Auflösen nach $\cos(\varphi)$ lässt sich somit der Winkel zwischen zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann aufeinander senkrecht („orthogonal") stehen, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist (denn bei $\varphi = 90°$ oder $\varphi = 270°$ gilt: $\cos(\varphi) = 0$):

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

Beispiel Die Vektoren $\vec{a} = (1 \ -3 \ 6)^T$ und $\vec{b} = (3 \ 0 \ -2)^T$ sollen auf Orthogonalität untersucht werden. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot (-2) = -9 \neq 0$$

Also stehen die Vektoren nicht senkrecht aufeinander. Genauer gilt:

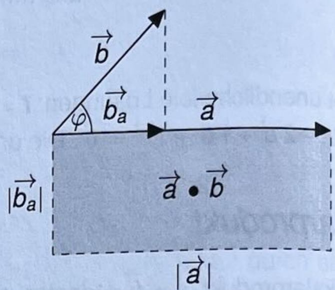
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-9}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{46} \cdot \sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{-9}{\sqrt{46} \cdot \sqrt{13}}\right) \approx 111{,}6°$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen also einen Winkel φ von etwa 111,6° ein.

Expertenwissen für Interessierte:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}_a|$ an, wobei $\vec{b}_a$ der auf $\vec{a}$ projizierte Vektor $\vec{b}$ ist.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_a|$$



Kreuzprodukt/Vektorprodukt

Das Kreuzprodukt oder Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ordnet zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen dritten Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ folgendermaßen zu:

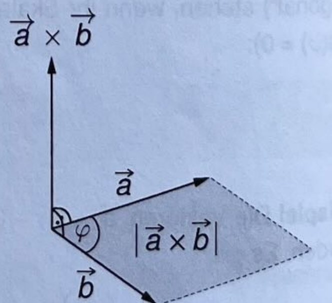
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Merkhilfe: ↘= „VZ +“ ↗= „VZ x –“

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$



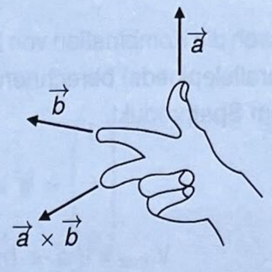
Eigenschaften des Kreuzprodukts

Dabei gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

wobei φ wiederum der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Weitere Eigenschaften des Kreuzprodukts:



- Der Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem, d.h. zeigt $\vec{a}$ in Richtung des Daumens und $\vec{b}$ in Richtung des Zeigefingers der rechten Hand, so zeigt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung des rechten Mittelfingers.
- $\vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{b} \times \vec{a}]$
- $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms an:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks erhalten wir damit zu:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$
(Denn dann sind sie parallel zueinander und spannen keine Fläche auf).

Beispiel Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = (1\ 2\ -2)^T$ und $\vec{b} = (3\ 0\ 1)^T$. Dann gilt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, denn es gilt:

$$\vec{a} \bullet \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-7) + (-2) \cdot (-6) = 0 \checkmark$$

und

$$\vec{b} \bullet \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) + 1 \cdot (-6) = 0 \checkmark$$

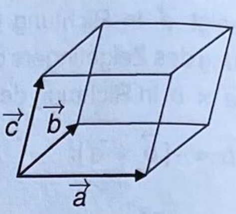
Der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ergibt sich zu:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{89}\ [\text{FE}]$$

Spatprodukt

Durch die Kombination von Skalarprodukt und Kreuzprodukt lässt sich das Volumen eines Spats (= Parallelepipeds) berechnen (ein Spat ist sozusagen ein „schiefer Quader"). Wir sprechen deshalb vom Spatprodukt.

$$V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$$



Expertenwissen für Interessierte:
Für das Spatvolumen gilt die bekannte Formel

$$\text{Volumen} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

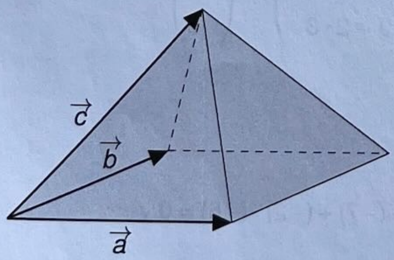
Die Höhe h ist die senkrechte Projektion des Vektors $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$. Mit dem Expertenwissen zum Skalarprodukt folgt:

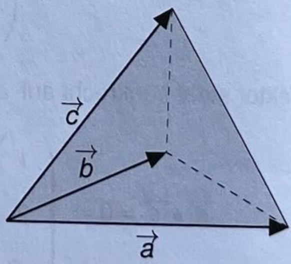
$$h = |c \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \Rightarrow h \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$$

Mit der bekannten Volumenformel der Pyramide

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

erhält man nun noch Volumenformeln für die Viereckspyramide (Grundseite: $G = |\vec{a} \times \vec{b}|$) und die Dreieckspyramide (Grundseite: $G = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$):





$$V_{\text{Viereckspyramide}} = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$$

$$V_{\text{Dreieckspyramide}} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$$

14.4 Aufgaben

A-14.1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen

a) Berechne:

(i) $\vec{a} + \vec{b}$

(ii) $\vec{b} - \vec{d}$

(iii) $3\vec{d} + 2\vec{e}$

(iv) $\vec{a} + 0{,}5\vec{c} - 4\vec{e}$

(v) $\vec{b} \bullet \vec{c}$

(vi) $\vec{c} \bullet \vec{e}$

(vii) $\vec{b} \times \vec{c}$

(viii) $\vec{c} \times \vec{b}$

(ix) $\vec{d} \times \vec{d}$

(x) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

(xi) $|\vec{a} + \vec{b}|$

(xii) $\angle(\vec{a}, \vec{b})$

b) Zeige, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig voneinander sind.

c) Untersuche die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{d}$ auf lineare Unabhängigkeit.

d) Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

e) Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Dreiecks.

f) Berechne das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats.

g) Ergänze die x_3- Komponente des Vektors $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a} \perp \vec{f}$ gilt.

A-14.2. Gegeben sind die Punkte $A(1|3|-1), B(3|1|1)$ und $C(4|4|0)$.

a) Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

b) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Anmerkung: Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden; er teilt jede im Verhältnis 2 : 1.

c) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

d) Bestimme den Punkt D, der gegenüber von C liegt, so, dass die vier Punkte A, B, C und D eine Raute bilden.

A-14.3. (Aus Abitur GK Bayern 2006) In einem kartesischen Koordinatensystem sind folgende Punkte gegeben:

$$A(3|-2|3), B(3|2|3), C(6|2|7), D(6|-2|7)$$

a) Zeige, dass das Viereck $ABCD$ ein ebenes Rechteck mit Flächeninhalt 20 [FE] ist.

b) Zeige, dass der Punkt $E(3/6/3)$ auf der Halbgeraden $\overline{AB}$, aber nicht auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

c) Berechne die Koordinaten des Punktes $F \in BA$ so, dass das Viereck $ECDF$ ein achsensymmetrisches Trapez ist.

d) Bestimme die Innenwinkel dieses Trapezes und zeige, dass es den Flächeninhalt 40 [FE] hat.

A-14.4. (Aus Abitur Bayern 2014) Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$$

spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ einen Körper auf.

a) Zeige, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b) Bestimme diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 [VE] besitzt.

15 Geraden

Eine Gerade g in Parameterform wird durch einen Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u}$ beschrieben. Die Gerade g besteht aus allen Punkten $\vec{x}$, die wir erreichen können, wenn wir von $\overrightarrow{0A}$ (oft $\vec{a}$) ausgehend alle Vielfachen (r-fachen) von $\vec{u}$ „entlang gehen".

Geradengleichung in Parameterform

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{u}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Beispiel Die Gerade

$$g : \vec{x} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Stützvektor}} + r \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Richtungsvektor}}, r \in \mathbb{R}$$

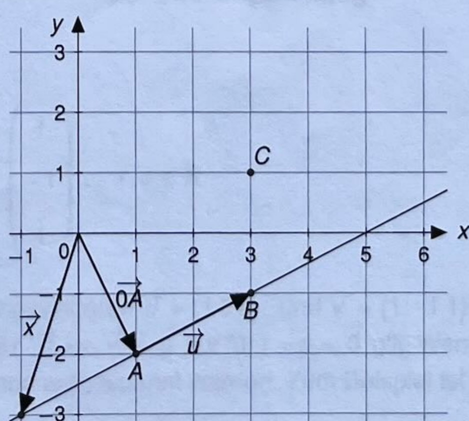
liegt in der $x_1 - x_2$-Ebene. $A(1|-2|0)$ ist der Aufpunkt und $\vec{u} = (2\ 1\ 0)^T$ ist der Richtungsvektor der Geraden g. Die Gerade wird durch die Menge aller Ortsvektoren beschrieben, die auf die Punkte der Geraden zeigen.

Geraden im Raum

Indem wir beispielsweise ausgehend von A den Vektor $\vec{u}$ entlang gehen, landen wir beim Punkt $B(3|-1|0)$. B liegt also auf der Geraden g, es gilt:

$$\overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0A} + 1 \cdot \vec{u}$$

Dagegen können wir ausgehend von A beliebige Vielfache von $\vec{u}$ laufen und wir werden niemals beim Punkt $C(3|1|0)$ landen, d.h. es gibt kein $r \in \mathbb{R}$, welches die Gleichung $\overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{u}$ erfüllt.



Vorgehen: Aufstellen einer Geradengleichung in Parameterform
Um eine Gleichung einer Geraden g durch zwei gegebene Punkte A und B zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor:

1. Wähle einen Punkt (z.B. A) als Aufpunkt: Stelle den Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ dazu auf.
2. Wähle den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ der beiden Punkte als Richtungsvektor $\vec{u}$.

Beispiel Gegeben sind die Punkte $A(1|0|2)$ und $B(3|1|3)$. Gesucht ist eine mögliche Geradengleichung durch A und B. Mit $\overrightarrow{0A}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor folgt:

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

15.1 Aufgaben

Lösungen

A-15.1. Stelle jeweils die Geradengleichung auf und überprüfe anschließend, ob der Punkt $T(2|1|3)$ auf der jeweiligen Geraden liegt.

a) Die Gerade g geht durch die Punkte $P(2|5|1)$ und $Q(1|7|0)$.

b) Die Gerade g geht durch den Punkt $P(2|0|3)$ und verläuft parallel zur x_2-Achse.

c) Die Gerade g geht durch den Ursprung und verläuft parallel zur Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

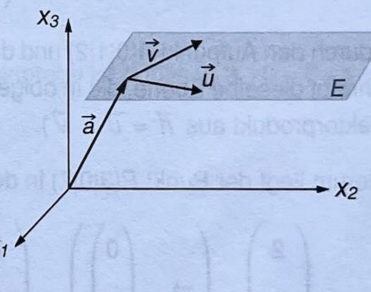
16 Ebenen

16.1 Darstellungsformen der Ebenengleichung

Parameterform

Eine Ebene E in Parameterform wird beschrieben durch einen Stützvektor $\overrightarrow{0A} = \vec{a}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die linear unabhängig sind.

Die Ebene E besteht aus allen Punkten X, die wir erreichen können, wenn von Punkt A ausgehend alle möglichen Linearkombinationen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ „gegangen" werden.



Veranschaulichung der Parameterform der Ebenengleichung

Ebenengleichung in Parameterform

$$E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel Die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

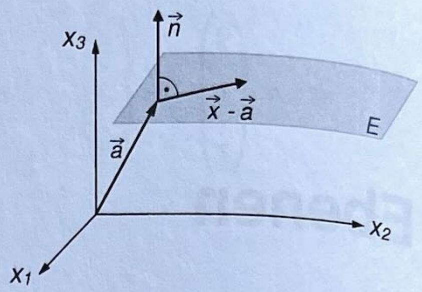
wird durch den Stützvektor $\vec{a} = (0\ 1\ 2)^T$ und die Richtungsvektoren $\vec{u} = (1\ 0\ 2)^T$ und $\vec{v} = (1\ -1\ 1)^T$ eindeutig festgelegt. $\vec{u}, \vec{v}$ sind linear unabhängig, weil $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \vec{0}$ nur für $r = s = \vec{0}$ gilt. Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig wären, würde nur eine Gerade aufgespannt werden. Zum Beispiel ist

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ein Punkt der Ebene E. Wir erreichen ihn, indem wir von Punkt A ausgehend zweimal den Vektor $\vec{u}$ und einmal den Vektor $\vec{v}$ entlang laufen.

Normalenform

Eine weitere Darstellung der Ebene ist die Normalenform. Hierbei wird die Ebene durch einen Stützvektor $\vec{a}$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$, welcher senkrecht (das heißt „normal") auf der Ebene steht, festgelegt. Die Ebene E enthält dabei alle Punkte X, deren Verbindungsvektor $\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a}$ zum Aufpunkt A senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene ist.



Veranschaulichung der Normalenform der Ebenengleichung

Ebenengleichung in Normalenform

$$E : \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

Beispiel Die Ebene

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

wird durch den Aufpunkt $A(0|1|2)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = (2\ 1\ -1)^T$ eindeutig festgelegt und beschreibt dieselbe Ebene, die in obigem Beispiel in Parameterform gegeben war ($\vec{n}$ erhalten wir als Vektorprodukt aus $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$).

Wiederum liegt der Punkt $P(3|0|7)$ in der Ebene, denn Einsetzen von $\vec{x} = \overrightarrow{0P}$ liefert:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

Koordinatenform

Multiplizieren wir die Normalenform aus, so erhalten wir eine dritte Darstellungsmöglichkeit der Ebenengleichung, die Koordinatenform:

$$E : \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - \underbrace{(n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3)}_{=d} = 0$$

Ist $\vec{n} = (n_1\ n_2\ n_3)^T$ der Normalenvektor der Ebene, so lautet die

Ebenengleichung in Koordinatenform

$$E : n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

wobei sich $d \in \mathbb{R}$ als Skalarprodukt von Normalenvektor $\vec{n}$ und Stützvektor $\vec{a}$ ergibt. Ein Punkt $X\,(x_1|x_2|x_3)$ liegt genau dann in der Ebene, wenn er die Ebenengleichung erfüllt, d.h. wenn man durch Einsetzen seiner drei Koordinaten auf der linken Seite der Ebenengleichung als Ergebnis Null erhält.

Beispiel Ausmultiplizieren der linken Seite der Ebenengleichung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

aus obigem Beispiel ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$$

Damit lautet die Koordinatenform der Ebenengleichung: $E: 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$.

Z.B. liegt der Punkt $P(3|0|7)$ in der Ebene E, denn die Punktprobe ist erfüllt: $2 \cdot 3 + 0 - 7 + 1 = 0$ ✓

Hesse'sche Normalenform

Die Hesse'sche Normalenform (kurz: HNF) der Ebenengleichung ist ein Spezialfall der Normalenform, bei der als Normalenvektor ein Vektor $\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ der Länge 1 verwendet wird:

$$\vec{n_0} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n_0} \bullet \vec{x} - \vec{n_0} \bullet \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{n_0} \bullet \vec{x} - d = 0, \text{ mit } d = \vec{n_0} \bullet \vec{a}$$

oder in Koordinatenform: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0$

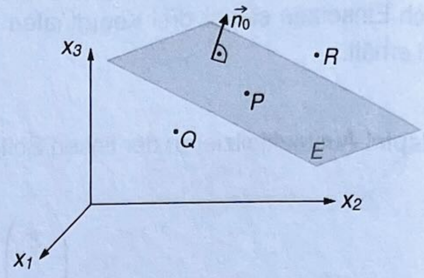
Zusätzlich wird die Richtung des Normalen-Einheitsvektors so gewählt, dass $d = \vec{n_0} \bullet \vec{a} \geq 0$. Er zeigt dann vom Ursprung zur Ebene und d gibt den Abstand zum Ursprung an.

Ebenengleichung in Hesse'scher Normalenform

$\vec{n_0} \bullet \vec{x} - d = 0$	mit $\lvert\vec{n_0}\rvert$ für den Normalenvektor
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0$	und einer reellen Zahl $d \geq 0$

Die HNF bringt einen entscheiden Vorteil bei der Abstandsberechnung: Setzen wir die Koordinaten eines Punktes in die HNF ein, so ergibt der Rechenterm direkt den gerichteten Abstand des Punktes zur Ebene. Das Vorzeichen gibt dabei an, in welchem Halbraum der Punkt sich befindet:

- Rechenterm < 0:
  Der eingesetzte Punkt liegt näher zum Ursprung, als die Ebene (siehe Q).
- Rechenterm $= 0$:
  Der eingesetzte Punkt (siehe P) liegt in der Ebene. Der Abstand Punkt-Ebene ist demnach gleich Null.
- Rechenterm > 0:
  Der eingesetzte Punkt liegt weiter weg zum Ursprung, als die Ebene (siehe R).



Veranschaulichung der HNF der Ebenengleichung
(mit Q im Halbraum, in den $\vec{n_0}$ nicht zeigt, P in der Ebene E und R im Halbraum, in den $\vec{n_0}$ zeigt)

Beispiel Die Ebene

$$E: -\frac{2}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

liegt in HNF vor und besitzt die Länge eins, denn für den Normalenvektor gilt:

$$|\vec{n}_0| = \left|\begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} = 1$$

Einsetzen von $P(3|0|7)$ in E ergibt $0 = 0$, womit $P \in E$ gilt. Setzen wir z.B. die Koordinaten des Punktes $Q(1|2|1)$ in E ein, so erhalten wir $-\frac{4}{\sqrt{6}} < 0$. Offensichtlich gilt somit $Q \notin E$. Genauer gilt: Q besitzt zu E den Abstand $\frac{4}{\sqrt{6}}$ und liegt in dem Halbraum, in den auch $\vec{n_0}$ zeigt.

16.2 Aufstellen der Ebenengleichung in Parameterform

Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist eindeutig festgelegt durch:

a) drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen

b) einer Geraden und einem Punkt außerhalb dieser Geraden

c) zwei sich schneidende Geraden

d) zwei verschiedene, aber parallele Geraden

Im Folgenden sollen die verschiedenen Situationen aufgezeigt werden.

zu a) Drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen

Gegeben sind drei Punkte A, B und C. Gesucht ist eine Ebenengleichung derjenigen Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält.

Vorgehen

1. Wähle den Ortsvektor $\vec{0A}$ als Stützvektor der Ebene.
2. Wähle als Richtungsvektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$.

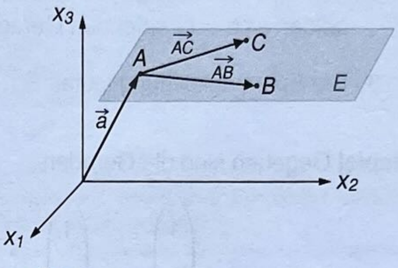
3. Die Ebenengleichung lautet: $E: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}, \quad r, s \in \mathbb{R}$

Beispiel Gegeben sind die Punkte $A(1|4|3)$, $B(2|7|-3)$ und $C(3|5|1)$. Wir wählen $\vec{0A} = (1\ 4\ 3)^T$ als Stützvektor, sowie die Richtungsvektoren

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-4 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-4 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Ebene:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$



zu b) Eine Gerade und ein Punkt außerhalb dieser Geraden

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und der Punkt $B \notin g$. Gesucht ist eine Ebenengleichung derjenigen Ebene E, die die Gerade g sowie den Punkt B enthält.

Vorgehen

1. Wähle den Ortsvektor $\vec{0A}$ als Stützvektor der Ebene.
2. Wähle als Richtungsvektoren $\vec{AB}$ und den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden.
3. Die Ebenengleichung lautet: $E: \vec{x} = \vec{0A} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{u}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

Beispiel Gegeben sind die Gerade g und der Punkt B mit

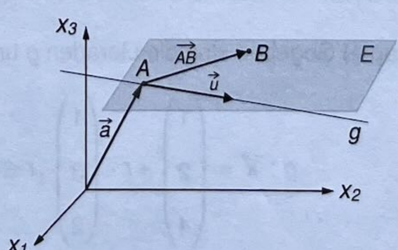
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B(1|3|6).$$

Wir wählen $\vec{0A} = (-1\ 2\ 4)^T$ als Stützvektor sowie als Richtungsvektoren

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 3-2 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Ebene:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$



zu c) Zwei sich schneidende Geraden

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$, welche sich im Punkt S schneiden. Gesucht ist eine Ebenengleichung derjenigen Ebene E, die die beiden angegebenen Geraden enthält.

Vorgehen

1. Wähle einen beliebigen Punkt einer Geraden (z.B. einen der beiden Aufpunkte oder den Schnittpunkt S der Geraden) als Aufpunkt der Ebene.
2. Wähle als Richtungsvektoren der Ebene die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der beiden sich schneidenden Geraden.
3. Die Ebenengleichung lautet: $E: \vec{x} = \overrightarrow{0S} + t \cdot \vec{u} + u \cdot \vec{v}, \quad t, u \in \mathbb{R}$

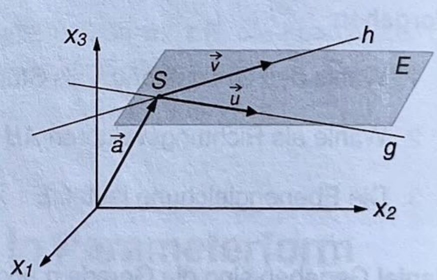
Beispiel Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

welche sich im Punkt $S(1|2|4)$ schneiden ($S \in h$ mit $s = -1$).

Eine mögliche Ebenengleichung der Ebene E, die die beiden Geraden enthält, lautet:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t, u \in \mathbb{R}$$



zu d) Zwei echt parallele Geraden

Gegeben sind zwei echt parallele Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Ebenengleichung derjenigen Ebene E, die die beiden angegeben Geraden enthält.

Vorgehen

1. Wähle $\overrightarrow{0A}$ als Stützvektor der Ebene E.
2. Wähle als Richtungsvektoren den Richtungsvektor $\vec{u}$ sowie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der beiden Aufpunkte der Geraden.
3. Die Ebenengleichung lautet: $E: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \vec{u} + u \cdot \overrightarrow{AB}, t, u \in \mathbb{R}$

Beispiel Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Sie sind parallel, weil ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind, denn

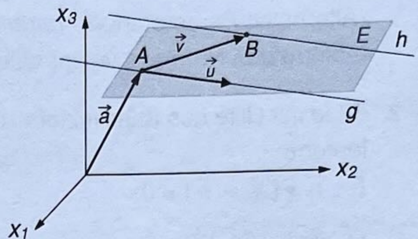
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Ebene:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \ t, u \in \mathbb{R}$$

Wir wählen $\overrightarrow{0A} = (1\ 2\ 4)^T$ als Stützvektor sowie als Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-2 \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



In der Abiprüfung wird meistens nicht explizit angegeben, dass sich irgendwas schneidet, parallel ist oder ähnliches. Das musst du in der Prüfung dann selbst herausfinden!

16.3 Umwandeln von Ebenengleichungen

Häufig ist es praktisch, eine Ebenengleichung in einer bestimmten Form vorliegen zu haben. Dazu können wir die einzelnen Formen ineinander umwandeln. Der häufigste Fall besteht darin, dass eine Ebene in Parameterform aufgestellt wird und diese anschließend in die praktischere Koordinatenform umgewandelt werden soll.

Wir schauen uns die folgenden Umwandlungen genauer an:

Parameterform: $E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, r, s \in \mathbb{R}$

a)

c) Normalenform: $E : \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

a)

Koordinatenform: $E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + a = 0$

b)

Hesse'sche Normalenform: $E_{\text{HNF}} : n_{0,1}x_1 + n_{0,2}x_2 + n_{0,3}x_3 - d = 0$

zu a) Parameterform → Normalenform → Koordinatenform

Gegeben ist eine Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, r, s \in \mathbb{R}$ in Parameterform, die in Koordinatenform umgewandelt werden soll.

Vorgehen

1. Berechne aus den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ mit Hilfe des Vektor-/Kreuzproduktes den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.
(Alternativ: Parameterform *parameterfrei machen* (r und s raus) und aus der Koordinatenform den Normalenvektor ablesen.)
2. Bilde mit Hilfe des Stützvektors zum Aufpunkt A und des Normalenvektors $\vec{n}$ die Normalenform:
$E: \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0$.
3. Multipliziere die Gleichung aus, um die Koordinatenform zu erhalten.

Beispiel Wir betrachten die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$$

und arbeiten das Vorgehen ab.

Zur Berechnung des Normalenvektors bilden wir das Vektor-/Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alternative Berechnung des Normalenvektors über ablesen aus Koordinatenform:

$$\begin{aligned} x_1 &= r + s \\ x_2 &= 1 - s \\ x_3 &= 2 + 2r + s \end{aligned} \quad \Rightarrow \mathbf{2}x_1 + \mathbf{1}x_2 \mathbf{-1}\, x_3 + 1 = 0$$

Diesen setzen wir zusammen mit dem Aufpunkt $A(0|1|2)$ in die Normalenform ein

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Wenn wir die linke Seite ausmultiplizieren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$$

erhalten wir die Ebene in Koordinatenform: $E: 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$.

zu b) Koordinatenform → HNF

Gegeben ist eine Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0$ in Koordinatenform, die in die HNF umgewandelt werden soll.

Vorgehen

1. Bestimme den Betrag des Normalenvektors $|\vec{n}|$.
2. Teile die Gleichung der Koordinatenform durch $|\vec{n}|$:

$$E: \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d) = 0$$

3. Multipliziere falls nötig mit (-1), um $d = -d^*$ zu erreichen mit einem $d^* \geq 0$.

Beispiel Gegeben sei die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$ in Koordinatenform. Der Normalenvektor $\vec{n} = (2\ 1\ -1)^T$ besitzt den Betrag

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Nun muss noch das Vorzeichen vor dem letzten Summanden angepasst werden, indem man die Gleichung mit (-1) multipliziert. Damit gilt:

$$E_{\text{HNF}}: \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-2x_1 - x_2 + x_3 - 1) = 0$$

zu c) Koordinatenform → Parameterform

Selten wird auch die Umformung von einer Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + a = 0$ in Koordinatenform in die Parameterform $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, r, s \in \mathbb{R}$ benötigt.

Vorgehen

1. Setze $x_1 = r$ und $x_2 = s$.
2. Löse die Koordinatenform nach x_3 auf.
3. Schreibe die Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 passend als Vektor (untereinander) und schreibe die fertige Parameterform auf.

Beispiel Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6 = 0$, welche in Parameterform umgewandelt werden soll. Wir setzen $x_1 = r$ und $x_2 = s$ und lösen die Gleichung nach x_3 auf:

$$x_3 = 3 + r + 2s$$

Schreiben wir die Ausdrücke für die einzelnen Komponenten von $\vec{x}$ als Vektor (untereinander), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + 1 \cdot r + 0 \cdot s \\ x_2 &= 0 + 0 \cdot r + 1 \cdot s \\ x_3 &= 3 + 1 \cdot r + 2 \cdot s \end{aligned}$$

und damit die Parameterform:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; r, s \in \mathbb{R}$$

16.4 Aufgaben

Oft sind SchülerInnen verwirrt, wenn in den Aufgaben auf einmal nicht mehr *r* oder *s* als Parameter auftauchen, sondern griechische Buchstaben wie λ oder μ. Aus diesem Grund enthalten unsere Aufgaben immer wieder andere Parameter, damit du dich daran gewöhnen kannst und nicht überrascht wirst!

Lösungen

A-16.1. Gegeben sind die Punkte $A(3|1|2), B(4|7|3)$ und $C(4|0|-1)$ sowie die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Gib jeweils eine Ebenengleichung in Parameterform und Koordinatenform an, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

a) Die Ebene E verläuft durch die Punkte A, B und C.

b) Es gilt $A \in E$ und $g_1 \subset E$.

c) Die Ebene E wird von den Geraden g_1 und g_2 aufgespannt.

d) Die Ebene E enthält den Punkt B und verläuft parallel zur x_1-x_2-Ebene.

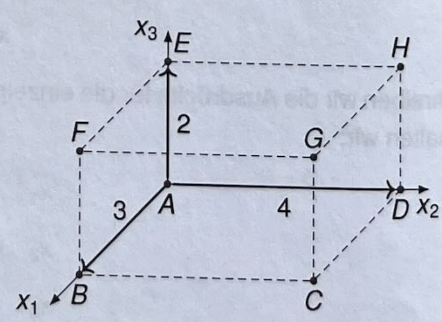
e) Die Ebene E steht senkrecht auf g_1 und enthält den Punkt A.

A-16.2. Die Ebene E ist Spiegelebene zwischen $P(1|4|7)$ und $P'(3|2|3)$

a) Stelle die Ebenengleichung der Ebene E in Koordinatenform auf.

b) Berechne den Abstand von P zu E einmal vektoriell und einmal unter Verwendung der HNF.

A-16.3. Gegeben ist der nebenstehende Quader.



a) Gib die Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders an.

b) Gib jeweils eine Ebenengleichung aller Seitenflächen in Koordinatenform an.