

MATHE

Abiturvorbereitung inkl. Aufgaben & Lösungen



TikTok
@MATHE.NICK

17 Lagebeziehungen

17.1 Lage: Punkt - Gerade

Ein Punkt kann liegt auf der Geraden, wenn der zugehörige Ortsvektor die Geradengleichung erfüllt.

Um die gegenseitige Lage eines Punktes P und einer Geraden $g : \vec{x} = a + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$, herauszufinden, gehen wir folgendermaßen vor.

Vorgehen

Setze den zum Punkt zugehörigen Ortsvektor in die Geradengleichung ein und löse das Gleichungssystem.

- Falls es lösbar ist, liegt der Punkt auf der Geraden.
- Falls es keine Lösung gibt, liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

Beispiel Gegeben sei die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

sowie die Punkte $P(8|3|5)$ und $Q(8|2|0)$. Wir setzen $\vec{OP}$ in g ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I): } 8 = 2 - 3r & \text{(I): } r = -2 \\ \text{(II): } 3 = 0 - 1r & \text{(II): } r = -3 \\ \text{(III): } 5 = 4 + 2r & \text{(III): } r = 0,5 \end{array}$$

Es gibt also kein (einheitliches) $r \in \mathbb{R}$, dass das Gleichungssystem löst. Somit gilt $P \notin g$.

Nun setzen wir $\vec{OQ}$ in g ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I): } 8 = 2 - 3r & \text{(I): } r = -2 \\ \text{(II): } 2 = 0 - 1r & \text{(II): } r = -2 \\ \text{(III): } 0 = 4 + 2r & \text{(III): } r = -2 \end{array}$$

Somit gilt $Q \in g$, da: $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$

17.2 Lage: Punkt - Ebene

Ein Punkt kann

- in einer gegebenen Ebene oder
- nicht in der gegebenen Ebene liegen.

Um die gegenseitige Lage eines Punktes P und einer Ebene E herauszufinden, gehen wir folgendermaßen vor.

Vorgehen

Setze den zum Punkt zugehörigen Ortsvektor in die Ebenengleichung ein und löse das Gleichungssystem (für Gleichungen in Parameterform) bzw. vereinfache die Gleichung für Gleichungen in Koordinatenform).

- Falls das Gleichungssystem lösbar ist bzw. die Gleichung eine wahre Aussage liefert, liegt der Punkt in der Ebene.
- Falls das Gleichungssystem nicht lösbar ist, liegt der Punkt nicht in der Ebene.

Beispiel Gegeben sei der Punkt $P(-1|0|2)$ und die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$$

Wir setzen den $\vec{OP}$ in E ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{(I): } -1 &= 0 + 1r + 1s \Leftrightarrow r = -1 - s \\ \text{(II): } 0 &= 1 + 0r - 1s \Leftrightarrow s = 1 \\ \text{(III): } 2 &= 4 + 2r + 1s \end{array}$$

Gleichung (II) liefert direkt $s = 1$, was wir in (I) einsetzen können um r zu bestimmen und erhalten $r = -2$. Einsetzen der ausgerechneten Werte in (III) ergibt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 &= 4 + 2 \cdot \overbrace{(-2)}^{=r} + 1 \cdot \overbrace{(1)}^{=s} \\ \Leftrightarrow 2 &= 4 - 4 + 1 \\ \Leftrightarrow 2 &\neq 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine falsche Aussage und somit ist das Gleichungssystem nicht lösbar: $P \notin E$.

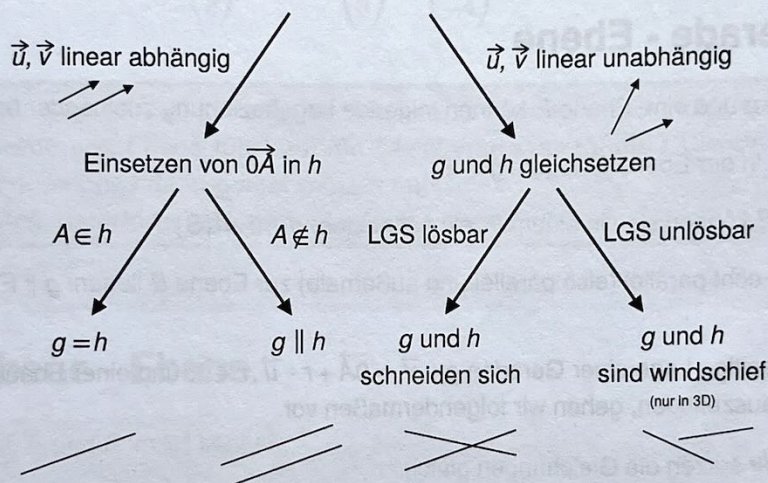
17.3

Lage: Gerade - Gerade

Zwei Geraden g und h im $\mathbb{R}^3$ können

- identisch (und somit auch parallel) sein,
- echt parallel und verschieden sein,
- sich in einem Punkt schneiden oder
- windschief (nicht parallel und ohne Schnittpunkt) sein.

Um die gegenseitige Lage zweier Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ herauszufinden, gehen wir folgendermaßen vor. Wir testen die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit und interpretieren das Ergebnis.



Beispiel Wir untersuchen die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Die Richtungsvektoren sind offensichtlich linear unabhängig. Damit schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt oder sind windschief zueinander. Wir setzen die Geraden gleich, um herauszufinden, ob es einen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt) gibt:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \text{(I): } -3 + 2r &= 4 - 1s \Leftrightarrow s = 7 - 2r \\ \text{(II): } -4 + 2r &= 3 - 1s \\ \text{(III): } -1 + 1r &= 1 + 1s \end{aligned}$$

Wir setzen $s = 7 - 2r$ in Gleichung (II) ein und erhalten:

$$-4 + 2r = 3 - \overbrace{(7 - 2r)}^{=s} \Leftrightarrow 0 = 0$$

Einsetzen von $s = 7 - 2r$ in Gleichung (III) liefert:

$$-1 + r = 1 + \overbrace{(7 - 2r)}^{=s} \Leftrightarrow r = 3$$

Damit folgt mit $r = 3$ in (I): $s = 7 - 2 \cdot 3 = 1$.

Das LGS ist also lösbar, womit sich die Geraden in einem Punkt schneiden. Die Koordinaten des Schnittpunktes S erhalten wir durch Einsetzen von r in g (oder von s in h):

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(3|2|2)$$

17.4 Lage: Gerade - Ebene

Eine Gerade g und eine Ebene E können folgende Lagebeziehung zueinander besitzen:

- g kann in der Ebene E liegen: $g \subset E$
- g und E können sich in einem Punkt schneiden: $g \cap E = \{S\}$
- g kann echt parallel (also parallel und außerhalb) zur Ebene E liegen: $g \parallel E$

Um die gegenseitige Lage einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und einer Ebene E in Koordinatenform herauszufinden, gehen wir folgendermaßen vor.

Vorgehen Wir setzen die Gleichungen gleich:

1. Besitzt die Gleichung unendlich viele Lösungen, so gilt: $g \subset E$.
2. Besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung, so schneiden sich g und E in einem Punkt S . Setze nun die Lösung für r in g ein, um S zu erhalten.
3. Besitzt die Gleichung keine Lösung, so liegt g außerhalb E mit: $g \parallel E$.

Beispiel Wir untersuchen die gegenseitige Lage von

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 12 = 0.$$

Dazu schreiben wir die Geradengleichung zunächst in Form eines Ortsvektors $\vec{x}$ zu einem „allgemeinen“ Punkt auf der Geraden in Abhängigkeit von r :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1r \\ 6 + 2r \\ 2 + 3r \end{pmatrix}$$

Setzen wir diese in die Ebenengleichung ein, so erhalten wir, sofern eine eindeutige Lösung vorliegt, den Wert für r , für den der zugehörigen Geradenpunkt in der Ebene liegt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overbrace{(4+1r)}^{=x_1} + 4 \cdot \overbrace{(6+2r)}^{=x_2} + 6 \cdot \overbrace{(2+3r)}^{=x_3} + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 56 + 28r &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -2 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt also die eindeutige Lösung $r = -2$. Die Koordinaten des Schnittpunktes erhalten wir durch Einsetzen von r in g :

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2|2|-4)$$

Liegt die Ebenengleichung in Parameterform vor, so gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen von Gerade und Ebene führt auf ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten, welches dann gelöst werden muss.
Einfacher: Parameterform in Koordinatenform umwandeln!

17.5 Lage: Ebene - Ebene

Zwei Ebenen E und F im $\mathbb{R}^3$ können

- identisch (und somit auch parallel) sein,
- echt parallel (also parallel und verschieden) sein oder
- sich in einer Geraden g schneiden.

Ebenen in Parameterform und Koordinatenform

Um die gegenseitige zweier Ebenen $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, r, s \in \mathbb{R}$ und $F: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + d = 0$ herauszufinden, gehen wir folgendermaßen vor.

Wir setzen die Ebene E als allgemeinen Punkt (bzw. die Koordinatenbedingungen für Ebene E) in die Ebene F ein und erhalten folgende mögliche Lösungen:

- Ist die Gleichung für alle $r, s \in \mathbb{R}$ erfüllt, so gilt $E = F$.
- Besitzt die Gleichung eine von r und s abhängige Lösung, so schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgerade g . Löse nach einer Variablen auf und setze in E ein, um die Schnittgerade zu erhalten.
- Besitzt die Gleichung keine Lösung, so gilt: $E \neq F$ und $E \parallel F$.

Beispiel Gegeben sind die Ebene E in Parameterform und die Ebene F in Koordinatenform mit

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad F: x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 12 = 0$$

Wir stellen die Gleichungen für die Koordinaten für die Ebene E auf

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + r - s \\ 4 + 2r + 2s \\ 3 + 3s \end{pmatrix}$$

und setzen diese in die Gleichung von F ein:

$$\begin{aligned} \overbrace{(2+r-s)}^{x_1=} + 2 \cdot \overbrace{(4+2r+2s)}^{x_2=} + 4 \cdot \overbrace{(3+3s)}^{x_3=} - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5r + 15s + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -2 - 3s \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt eine von r und s abhängige Lösung, womit sich die beiden Ebenen in einer Gerade schneiden. Die Gleichung der Schnittgeraden erhalten wir durch Einsetzen von r in E :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2 - 3s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3s-1s \\ -6s+2s \\ 0s+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenen in Koordinatenform

Um die gegenseitige Lage zweier Ebenen $E: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + a = 0$ und $F: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + b = 0$ herauszufinden, gehen wir folgendermaßen vor.

Wir untersuchen die beiden Normalenvektoren $\vec{m} = (m_1 \ m_2 \ m_3)^T$ und $\vec{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T$ auf lineare Abhängigkeit.

- Sind $\vec{m}$ und $\vec{n}$ linear abhängig, so sind die Ebenen identisch oder echt parallel. Wir setzen einen Punkt $P \in E$ in die Gleichung von F ein:
 - Liegt P auch in F , so gilt: $E = F$
 - Liegt P nicht in F , so gilt: $E \parallel F$
- Sind $\vec{m}$ und $\vec{n}$ linear unabhängig, so schneiden sich die Ebenen. Für die Berechnung der Schnittgeraden g betrachten wir die beiden Ebenengleichungen als Gleichungssystem.
 1. Setze $x_1 = r$.
 2. Drücke die anderen beiden Variablen (also x_2 und x_3) in beiden Gleichungen durch r aus.

3. Schreibe $g : \vec{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ und setze für die Komponenten die jeweiligen r -Ausdrücke ein. Dies liefert dann die Gleichung der Schnittgeraden in Parameterform.

Beispiel Wir betrachten die Ebenen E und F in Koordinatenform mit

$$E : 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8 \quad \text{und} \quad F : x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5$$

Die Normalenvektoren $\vec{n} = (2 \ -4 \ 6)^T$ und $\vec{m} = (1 \ 4 \ -3)^T$ sind offensichtlich linear unabhängig. Damit schneiden sich die beiden Ebenen.

Wir bestimmen die Schnittgeraden in dem wir zunächst $x_1 = r$ setzen und in die beiden Ebenengleichungen einsetzen:

$$(I): \quad 2r - 4x_2 + 6x_3 = 8$$

$$(II): \quad r + 4x_2 - 3x_3 = -5$$

Addition von Gleichung (I) und (II) mit anschließender Auflösung nach x_3 liefert $x_3 = 1 - r$. Den Wert für x_3 setzen wir in Gleichung (II) ein und erhalten

$$r + 4x_2 - 3 \cdot (1 - r) = -5 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - r$$

Jetzt müssen wir nur noch die Gleichung der Schnittgeraden aufschreiben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1r \\ -0,5 - 1r \\ 1 - 1r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Ebenen in Parameterform

Liegen beide Ebenengleichungen in Parameterform vor, so werden die Ebenen gleichgesetzt und auf ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten überführt, welches dann gelöst werden muss.

Einfacher ist es jedoch, eine der beiden Ebenengleichungen in Koordinatenform zu überführen und dann wie im Abschnitt *Ebenen in Parameterform und Koordinatenform* auf Seite 101 weiterzurechnen.

17.6 Schnittwinkel

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist bereits bekannt:

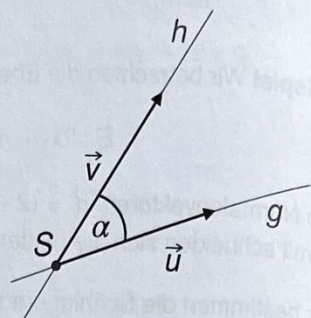
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Damit (bzw. damit leicht modifiziert) lassen sich auch die Schnittwinkel von Geraden und Ebenen berechnen.

Gerade - Gerade

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$, welche sich im Punkt S schneiden. Der Schnittwinkel α kann direkt mit Hilfe der beiden Richtungsvektoren berechnet werden. Damit stets der kleinere Winkel berechnet wird, ist der Zähler in Betrag zu setzen:

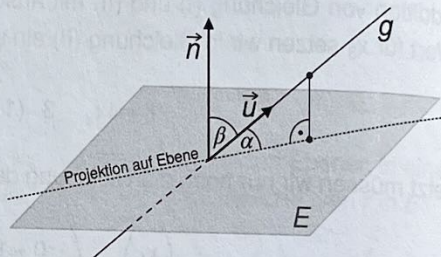
$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Rightarrow \alpha = \arccos(\dots)$$



Gerade - Ebene

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + a = 0$. Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, schließen $\vec{u}$ und $\vec{n}$ den zum Schnittwinkel α komplementären Winkel β ein.

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \Rightarrow \beta = \arccos(\dots)$$



Der Schnittwinkel α zwischen Gerade und Ebene ergibt sich dann zu: $\alpha = 90^\circ - \beta$.

Wegen $\sin(x) = \cos(90^\circ - x)$ kann somit der Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene direkt mit dem Sinus berechnet werden:

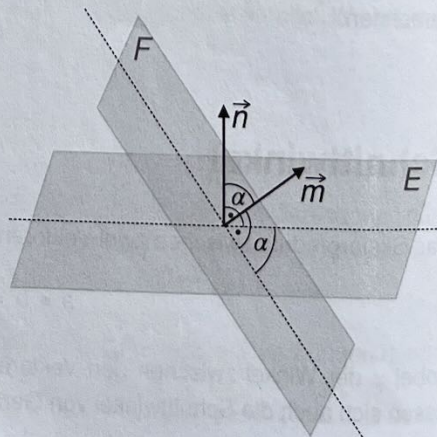
$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \Rightarrow \alpha = \arcsin(\dots)$$

Ebene - Ebene

Gegeben sind die beiden Ebenen $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + a = 0$ und $F: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + b = 0$, die sich in einer Schnittgeraden schneiden.

Der Schnittwinkel α der beiden Ebenen ist genauso groß wie der Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen, denn sie ergänzen sich jeweils mit demselben Winkel zu 90° .

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow \alpha = \arccos(\dots)$$

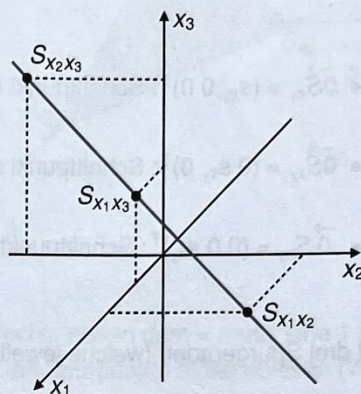


17.7 Spurpunkte und Spurgeraden

Spurpunkte von Geraden

Spurpunkte bezeichnen die Schnittpunkte (SP) von Geraden mit den Koordinatenebenen. Allgemein kann eine Gerade bis zu drei Spurpunkte besitzen:

- $\vec{OS}_{x_1x_2} = (s_{x_1} \ s_{x_2} \ 0)^T$:
SP mit $x_1 - x_2$ -Ebene (hier gilt: $x_3 = 0$)
- $\vec{OS}_{x_1x_3} = (s_{x_1} \ 0 \ s_{x_3})^T$:
SP mit $x_1 - x_3$ -Ebene (hier gilt: $x_2 = 0$)
- $\vec{OS}_{x_2x_3} = (0 \ s_{x_2} \ s_{x_3})^T$:
SP mit $x_2 - x_3$ -Ebene (hier gilt: $x_1 = 0$)



Um die Spurpunkte einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ zu erhalten, gehen wir so vor:

Vorgehen

1. Setze eine Koordinate gleich 0 (z.B. $x_1 = 0$ für $S_{x_2x_3}$) und löse die entsprechende Zeile nach r auf.
2. Setze den erhaltenen r Wert in die Geradengleichung ein, um den Spurpunkt zu erhalten.

Beispiel Wir berechnen die Spurpunkte der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

und setzen dafür die einzelnen x -Komponenten gleich Null.

$$x_1 = 0: 0 = -4 + 2r \Leftrightarrow r = 2 \Rightarrow \vec{OS}_{x_2x_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0: 0 = 3 \nmid \Rightarrow g \text{ ist parallel zur } x_1 - x_3\text{-Ebene}$$

$$x_3 = 0: 0 = 2 + r \Leftrightarrow r = -2 \Rightarrow \vec{OS}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spurpunkte und -geraden von Ebenen

Spurpunkte bezeichnen hier die Schnittpunkte von Ebenen mit den Achsenabschnittspunkten; Spurgeraden die Schnittgeraden von Ebenen mit den Koordinatenebenen.

Allgemein besitzt eine Ebene drei Spurpunkte:

- $\vec{0S}_{x_1} = (s_{x_1} \ 0 \ 0)^T$: Schnittpunkt mit der x_1 -Ebene (hier gilt: $x_2 = x_3 = 0$)
- $\vec{0S}_{x_2} = (0 \ s_{x_2} \ 0)^T$: Schnittpunkt mit der x_2 -Ebene (hier gilt: $x_1 = x_3 = 0$)
- $\vec{0S}_{x_3} = (0 \ 0 \ s_{x_3})^T$: Schnittpunkt mit der x_3 -Ebene (hier gilt: $x_1 = x_2 = 0$)

und drei Spurgeraden (welche jeweils durch 2 Spurpunkte verlaufen)

- $\vec{g}_{x_1x_2} = (g_{x_1} \ g_{x_2} \ 0)^T$: Schnittgerade mit der x_1x_2 -Ebene (verläuft durch: S_{x_1} und S_{x_2})
- $\vec{g}_{x_1x_3} = (g_{x_1} \ 0 \ g_{x_3})^T$: Schnittgerade mit der x_1x_3 -Ebene (verläuft durch: S_{x_1} und S_{x_3})
- $\vec{g}_{x_2x_3} = (0 \ g_{x_2} \ g_{x_3})^T$: Schnittgerade mit der x_2x_3 -Ebene (verläuft durch: S_{x_2} und S_{x_3})

Vorgehen, wenn Ebene in Parameterform $E: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, r, s \in \mathbb{R}$ vorliegt:

1. Setze zwei Koordinaten gleich 0 (z.B. $x_2 = x_3 = 0$ für S_{x_1}) und löse das Gleichungssystem. (Gibt es keine Lösung, so verläuft die Ebene parallel zu dieser Achse.)
2. Setze die Werte für r und s in die Ebenengleichung ein, um den Spurpunkt zu erhalten. Ebene in Koordinatenform:

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + a = 0$$

3. Setze zwei Koordinaten gleich 0 (z.B. $x_2 = x_3 = 0$ für S_{x_1}) und löse nach der dritten Variable auf. (keine Lösung: Ebene parallel zu dieser Achse)
4. Schreibe den Spurpunkt auf.

Beispiel Wir berechnen die Spurpunkte der Ebene $E: \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 1 = 0$.

$$x_2 = x_3 = 0: \frac{1}{3}x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow \vec{0S}_{x_1} = (3 \ 0 \ 0)^T$$

$$x_1 = x_3 = 0: \frac{1}{2}x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow \vec{0S}_{x_2} = (0 \ 2 \ 0)^T$$

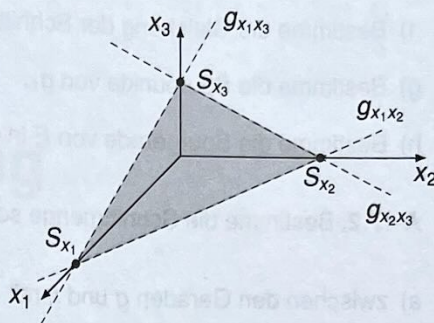
$$x_1 = x_2 = 0: x_3 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow \vec{0S}_{x_3} = (0 \ 0 \ 1)^T$$

Die Spurgeraden ergeben sich durch die Spurpunkte:

$$g_{x_1 x_3} : \vec{x} = \vec{0S_{x_1}} + r \cdot \vec{S_{x_1} S_{x_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$g_{x_1 x_3} : \vec{x} = \vec{0S_{x_1}} + s \cdot \vec{S_{x_1} S_{x_3}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$g_{x_2 x_3} : \vec{x} = \vec{0S_{x_2}} + t \cdot \vec{S_{x_2} S_{x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



Alternativer Weg für Spurpunkte: Achsenabschnittsform (rechts neben dem = muss eine 1 stehen) der Ebene lautet $E : \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 1$. Hier können wir die Spurpunkte direkt ablesen (Wert des Nenners gibt jeweiligen Spurpunkt an):

$$\frac{1}{3}x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3 \quad \frac{1}{2}x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 2 \quad \frac{1}{1}x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = 1$$

17.8 Aufgaben

Oft sind SchülerInnen verwirrt, wenn in den Aufgaben auf einmal nicht mehr r oder s als Parameter auftauchen, sondern griechische Buchstaben wie λ oder μ . Aus diesem Grund enthalten unsere Aufgaben immer wieder andere Parameter, damit du dich daran gewöhnen kannst und nicht überrascht wirst!

A-17.1. Gegeben sind die Punkte $A(3|1|6)$, $B(4|7|4)$ und $C(4|0|c)$, die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu, \tau \in \mathbb{R}$ sowie die Ebenen

$$E : 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0, F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \sigma, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\text{und } G : 2x_1 + ax_2 - 2ax_3 - 8a = 0$$

- Untersuche die Lage des Punktes A zu den Geraden g_1 und g_2 .
- Untersuche die Lage des Punktes A zur Ebene E .
- Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_3 sowie g_2 und g_3 .



Lösungen

- d) Wie muss c gewählt werden, damit Punkt $C \in E$ gilt?
- e) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist g_1 orthogonal zur Ebene G ?
- f) Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden g von E und F .
- g) Bestimme die Spurpunkte von g_1 .
- h) Bestimme die Spurgerade von E in der $x_1 - x_2$ -Ebene.

A-17.2. Bestimme die Schnittmenge sowie die Schnittwinkel

- a) zwischen den Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

- b) zwischen der Gerade g und der Ebene E mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

- c) zwischen den Ebenen E und F mit

$$E: 3x_1 + x_3 - 5 = 0 \quad \text{und} \quad F: -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$$

A-17.3. (Abitur 2006 Bayern) In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt A , die Ebene E und die Gerade g gegeben mit

$$A(0|\sqrt{2}|2), \quad E: x_1 + x_3 = 2 \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \vec{0A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem.

Die $x_1 - x_2$ -Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g . Der Vektor $\vec{v} = (-1 \ \sqrt{2} \ 1)^T$ beschreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

- b) Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt.

18 Abstandsberechnung

18.1 Abstand: Punkt - Punkt

Um den Abstand zweier Punkte A und B zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor:

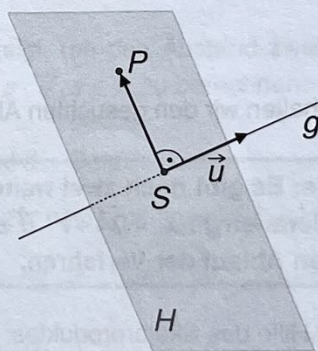
Vorgehen

1. Berechne den Verbindungsvektor der beiden Punkte: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$
2. Berechne die Länge dieses Vektors: $|\vec{AB}|$

18.2 Abstand: Punkt - Gerade

Ziel ist es, denjenigen Punkt S auf der Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}$ zu finden, der dem gegebenen Punkt P am nächsten liegt, um dann den Abstand der beiden Punkte P und S zu bestimmen. Dabei ist der senkrechte Abstand immer der kürzeste Abstand.

Um diesen sogenannten Lotfußpunkt S zu finden, wir eine Hilfsebene H verwendet.



Vorgehen

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene H , welche senkrecht auf g steht und durch P verläuft. Verwende dazu den Richtungsvektor $\vec{u}$ von g als Normalenvektor und P als Aufpunkt von H :

$$H: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{OP}) = 0$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Hilfsebene H (S ist der Lotfußpunkt von P auf g).
3. Die Länge des Vektors $\vec{SP}$ (also den Betrag davon) gibt den gesuchten Abstand des Punktes von der Geraden an.

Beispiel Es soll der Abstand des Punktes $P(-1|2|-3)$ von der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

berechnet werden. Wir stellen eine Hilfsebene H senkrecht zu g auf, um den Lotfußpunkt S von P zu finden. Dazu verwendet man P als Aufpunkt und den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor von H :

$$H: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Ausmultiplizieren liefert die Koordinatenform $H: 3x_1 - 2x_3 - 3 = 0$. Um den Schnittpunkt S zu bestimmen, setzen wir g als allgemeinen Punkt mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3r \\ -4 \\ 2 - 2r \end{pmatrix}$$

in H ein und formen nach r um:

$$3 \cdot \overbrace{(-2 + 3r)}^{=x_1} - 2 \cdot \overbrace{(2 - 2r)}^{=x_3} - 3 = 0 \Leftrightarrow -13 + 13r = 0 \Leftrightarrow r = 1 \Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir den gesuchten Abstand $d(P, g) = |\vec{SP}| = |(-2 \ 6 \ -3)^T| = \sqrt{49} = 7$ [LE].

Hinweis: Es gibt noch zwei weitere Verfahren, um den Lotfußpunkt eines Punktes P zu einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}$ zu bestimmen. Wir zeigen im Folgenden für Interessierte kurz den Ablauf der Verfahren.

1. Mit Hilfe des Skalarproduktes:

Der Verbindungsvektor $\vec{SP}$ zwischen Lotfußpunkt S und dem Punkt P muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden stehen. Fassen wir $\vec{OS}_r = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}$ als beliebigen Punkt von g auf, so suchen wir dasjenige r , das die Bedingung

$$\vec{S_rP} \cdot \vec{u} = 0$$

erfüllt. Auflösen nach r und einsetzen in g liefert S .

2. Als Optimierungsaufgabe:

Der Punkt S ist derjenige Punkt von g , der zu P den geringsten Abstand besitzt. Fassen wir $\vec{OS}_r = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}$ als beliebigen Punkt von g auf, so wird das Minimum der Funktion

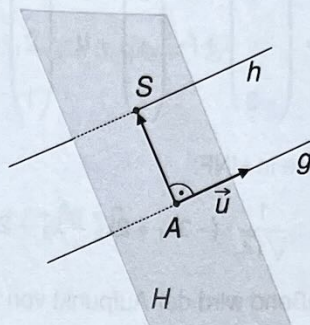
$$d(r) = |\vec{S_rP}|$$

gesucht. Leiten wir $d(r)$ nach r ab und setzen den Ausdruck gleich 0, so erhalten wir den passenden Wert für r . Einsetzen in g liefert S .

18.3 Abstand: Gerade - Gerade

Geraden sind parallel

Zwei parallele Geraden besitzen überall denselben Abstand. Damit lässt sich der Abstand zweier paralleler Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ genauso bestimmen, wie der Abstand eines beliebigen Punktes zu einer Geraden.



Vorgehen: Lotebenen-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene H , welche senkrecht auf g steht und durch den Aufpunkt A von g verläuft. Verwende dazu den Richtungsvektor $\vec{u}$ von g als Normalenvektor und A als Aufpunkt der Ebene H :

$$H: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden h mit der Hilfsebene H .
3. Die Länge des Vektors $\vec{AS}$ (also den Betrag davon) gibt den gesuchten Abstand der beiden Geraden an.

Geraden sind windschief

Im Folgenden werden zwei verschiedene Verfahren aufgezeigt, um den Abstand zweier windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$ zu berechnen:

1. **Parallelebenen-Verfahren:** liefert lediglich den Abstand der Geraden
2. **Lotvektor-Verfahren:** liefert Abstand und Koordinaten der nächstgelegenen Punkte

Vorgehen: Parallelebenen-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsebene $H: \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{u} + u \cdot \vec{v}, t, u \in \mathbb{R}$, die die Gerade g enthält und zu h parallel ist. Verwende dazu den Aufpunkt A und den Richtungsvektor $\vec{u}$ von g sowie den Richtungsvektor $\vec{v}$ von h .
2. Wandle H in die HNF um mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.
3. Berechne den Abstand eines beliebigen Punktes von h (z.B. des Aufpunktes B) zu H .

Beispiel Gesucht ist der Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

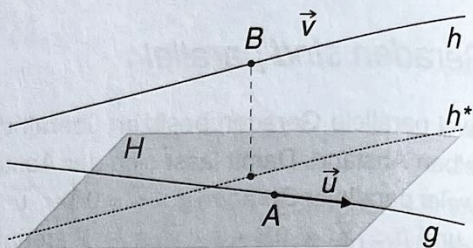
Hilfsebene in Parameterform:

$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t, u \in \mathbb{R}$$

Hilfsebene in HNF:

$$H_{\text{HNF}}: \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 28) = 0$$

Anschließend wird der Aufpunkt von h mit $(-3 \ -3 \ 3)^T$ in die HNF eingesetzt und liefert: $\frac{-28}{\sqrt{14}} = 0$, sodass $d(g; h) = \frac{28}{\sqrt{14}} \approx 7,48 \text{ [LE]}$.



Vorgehen: Lotvektor-Verfahren

Gegeben sind die windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{0B} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$. Wir suchen die beiden nächstgelegenen Punkte $P \in g$ und $Q \in h$.

1. Da $P \in g$, können wir schreiben: $\vec{0P} = \vec{0A} + r \cdot \vec{u}$. Analog dazu: $\vec{0Q} = \vec{0B} + s \cdot \vec{v}$. Damit stellen wir den Vektor $\vec{PQ}$ auf.
2. Da die nächstgelegenen Punkte die Geraden g und h senkrecht verbinden, gilt:

$$(I): \vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(II): \vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$

Wir lösen das LGS und ermitteln r und s .

3. Einsetzen von r bzw. s liefert P bzw. Q . Damit gilt $d(g, h) = |\vec{PQ}|$.

Beispiel Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Für die allgemeinen Punkte P und Q gilt:

$$\vec{0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in g \quad \text{und} \quad \vec{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in h$$

Daraus folgt:

$$\vec{PQ} = \vec{0Q} - \vec{0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 - r - 2s \\ -1 + s \\ 1 - r + s \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor muss nun senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren stehen:

$$(I): \begin{pmatrix} -1-r-2s \\ -1+s \\ 1-r+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2r-s=0 \Leftrightarrow s=-2r$$

$$(II): \begin{pmatrix} -1-r-2s \\ -1+s \\ 1-r+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2+r+6s=0$$

Einsetzen von (I) in (II) und auflösen liefert $r = \frac{2}{11}$, was wir wiederum in (I) einsetzen: $s = -\frac{4}{11}$. Die beiden nächstgelegenen Punkte sind also

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/11 \\ 1 \\ 13/11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/11 \\ -4/11 \\ 18/11 \end{pmatrix}$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt $d(g, h) = |\vec{PQ}| = \frac{1}{11} \cdot \sqrt{275} \approx 1,51$ [LE].

18.4 Abstand: Punkt - Ebene

Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + a = 0$ lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Hesse'schen Normalenform bestimmen.

Vorgehen: HNF

1. Bringe die Gleichung der Ebene E in HNF und setze den Punkt P ein.
2. Der Betrag der linken Seite gibt den Abstand von P zu E an. Das Vorzeichen liefert den Halbraum von P .

Ist darüber hinaus der Lotfußpunkt von P gesucht (d.h. derjenige Punkt in E , der P am nächsten liegt), hilft das folgende Verfahren (das wir auch für Projektionen und Spiegelungen noch gebrauchen werden).

Vorgehen: Lotgeraden-Verfahren

1. Notiere die Gleichung einer Hilfsgeraden h , die durch P und senkrecht zu E verläuft. Verwende dazu P als Aufpunkt und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene als Richtungsvektor:

$$h: \vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{n}, r \in \mathbb{R}$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S von h und E . S ist der Lotfußpunkt von P .
3. Der Abstand von P zu E ist also $|\vec{SP}|$.

Beispiel Gegeben sei die Ebene $E : 2x_1 - x_2 + x_3 - 8 = 0$ sowie der Punkt $P(2|1|3)$. Wir stellen eine Hilfsgerade h auf, die durch P und senkrecht zur Ebene E verläuft:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Wir berechnen den Schnittpunkt von h und E , in dem wir h in E einsetzen:

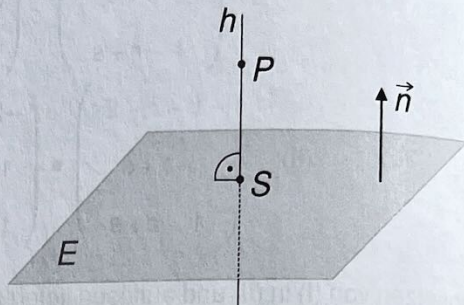
$$2 \cdot (2 + 2r) - (1 - r) + (3 + r) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 6r = 0$$

Mit $r = \frac{1}{3}$ folgt für den Schnittpunkt:

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{SP} = \vec{OP} - \vec{OS} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

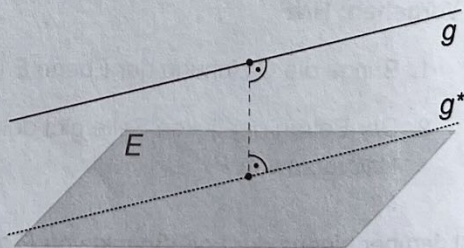
Der Abstand von P zu E beträgt damit $d(P, E) = |\vec{SP}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \approx 0,82 \text{ [LE]}$.



18.5 Abstand: Gerade - Ebene

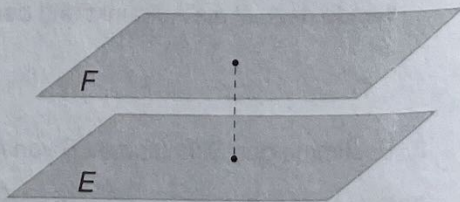
Eine Abstandsberechnung zwischen einer Geraden g und einer Ebene E ist nur sinnvoll, wenn diese parallel zueinander liegen.

Dann besitzt jeder Punkt der Geraden denselben Abstand zur Ebene und wir können den Abstand eines Punktes der Geraden (z.B. des Aufpunktes) zur Ebene berechnen.



18.6 Abstand: Ebene - Ebene

Auch hier ist eine Abstandsberechnung nur für zueinander parallelen Ebenen sinnvoll. Dann kann der Abstand eines Punktes der einen Ebene E zur anderen Ebene F berechnet werden, z.B. mit Hilfe der HNF.



Liegen beide Ebenengleichungen in HNF vor, so kann der Abstand auch an der Differenz der beiden Konstanten abgelesen werden.

18.7 Aufgaben

Oft sind SchülerInnen verwirrt, wenn in den Aufgaben auf einmal nicht mehr r oder s als Parameter auftauchen, sondern griechische Buchstaben wie λ oder μ . Aus diesem Grund enthalten unsere Aufgaben immer wieder andere Parameter, damit du dich daran gewöhnen kannst und nicht über-
rascht wirst!

A-18.1. Berechne

- a) den Abstand des Punktes P von der Geraden g mit

$$P(8|1|1) \text{ und } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) den Abstand der parallelen Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

- c) den kürzesten Abstand der windschiefen Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Überprüfe den Abstand anschließend mit Hilfe des Parallelebenen-Verfahrens.

- d) den Abstand sowie den Lotfußpunkt des Punktes P von der Ebene E mit

$$P(6|3|3) \text{ und } E: 3x_1 + 4x_3 = 5$$

- e) den Abstand der Gerade g zur ihrer parallel verlaufenden Ebene E mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau, \sigma \in \mathbb{R}$$

A-18.2. Gegeben ist der Punkt $P(3a|a|0)$ sowie die Ebene $E: 3x_1 - 4x_2 - 15 = 0$. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ sodass gilt: $d(P, E) = 1$.

A-18.3. Bestimme denjenigen Punkt A auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

der von den Punkten $P(5|1|0)$ und $Q(6|3|7)$ dieselbe Entfernung hat.



Lösungen

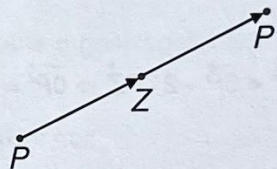
19 Projektion und Spiegelung

19.1 Spiegelung

an einem Punkt

Spiegelung eines Punktes P an einem Punkt Z :

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PZ}$$



Spiegelung einer Geraden an einem Punkt:

1. Spiegel zwei Punkte der Geraden.
2. Stelle mit den Spiegelpunkten die Spiegelgerade auf.

Spiegelung einer Ebene an einem Punkt:

1. Spiegel drei Punkte der Ebene (die nicht auf einer Geraden liegen).
2. Stelle mit den drei Spiegelpunkten die Spiegelebene auf.

an einer Gerade

Vorgehen - Spiegelung Punkt an Gerade

Gegeben ist ein Punkt P , der an einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ gespiegelt wird.

1. Berechne den Lotfußpunkt $Z \in g$ von P mit dem Lotebenen-Verfahren

- Hilfsebene $H: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ verwenden
- g und H schneiden sich in Schnittpunkt Z

2. Spiegel P an Z : $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PZ}$

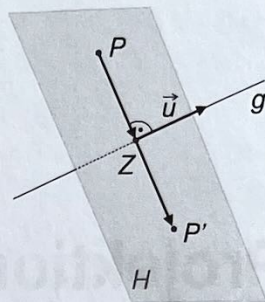
Beispiel Der Punkt P soll an der Geraden g gespiegelt werden mit

$$P(2|3|4) \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Die Hilfsebene lautet

$$H: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Ausmultiplizieren liefert: $H: x_1 + x_3 - 6 = 0$. Anschließend setzen wir g in H ein, um das Spiegelzentrum Z zu erhalten:



$$(2+r) + (2+r) - 6 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \Rightarrow \vec{OZ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Spiegeln von P an Z liefert:

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PZ} \Rightarrow \vec{OP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(4|-1|2)$$

Vorgehen - Spiegelung Gerade an Gerade

Gegeben ist eine Gerade $h: \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{v}, s \in \mathbb{R}$, die an einer parallelen Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$ gespiegelt wird ($\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig).

1. Spiegel den Aufpunkt B von h an g und behalte den Richtungsvektor bei:

$$h': \vec{x} = \vec{OB'} + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

an einer Ebene

Vorgehen - Spiegelung Punkt an Ebene

Gegeben ist ein Punkt P , der an eine Ebene $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$ gespiegelt wird.

1. Berechne den Lotfußpunkt $Z \in E$ von P mit dem Lotgeraden-Verfahren

- Hilfsgerade $h: \vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{n}, r \in \mathbb{R}$ aufstellen
- h und E schneiden sich in Schnittpunkt Z

2. Spiegel P an Z : $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PZ}$

Beispiel Der Punkt $P(1|4|7)$ soll an der Ebene $E: x_1 - x_2 - 2x_3 + 7 = 0$ gespiegelt werden. Die Hilfsgerade

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R},$$

geht durch P und ist senkrecht zu E . Einsetzen von h in E liefert das Spiegelzentrum Z :

$$(1+r) - (4-r) - 2 \cdot (7-2r) + 7 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \Rightarrow \vec{OZ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Anschließend spiegeln wir P an Z

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PZ} \Rightarrow \vec{OP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Spiegelbild $P'(3|2|3)$.

Vorgehen - Spiegelung Gerade an Ebene

Gegeben ist eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{OB} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$, die an einer Ebene E gespiegelt wird.

1. Fall: Gerade und Ebene liegen parallel

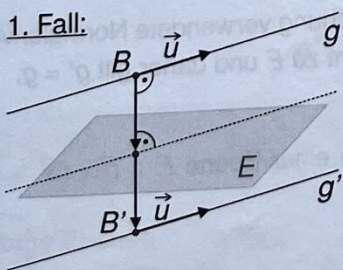
Spiegle den Aufpunkt B von g und behalte den Richtungsvektor bei:

$$g': \vec{x} = \vec{OB'} + s \cdot \vec{u}, s \in \mathbb{R}$$

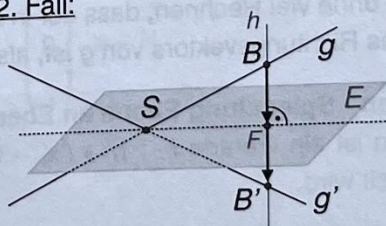
2. Fall: Gerade und Ebene schneiden sich

- Schneide die Gerade g mit der Ebene E , um den Schnittpunkt S zu erhalten. Dieser liegt in der Ebene, ist deshalb sein eigenes Spiegelbild ($S = S^*$) und liegt somit auch auf der Bildgeraden g' .
- Spiegle einen weiteren Punkt von g an E und ermittle mit diesem Punkt und S die Gleichung der Bildgeraden g' .

1. Fall:



2. Fall:



Beispiel Die Gerade g soll an die Ebene E gespiegelt werden mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E: x_1 - x_3 = -3$$

Der Schnittpunkt S von g und E beträgt $S(-7|2|-4)$. Wir stellen eine Hilfsgerade h auf, die durch den Aufpunkt B der Geraden g und senkrecht zu E (Normalenvektor der Ebene ist Richtungsvektor von h)

tor) verläuft:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Der Schnittpunkt der Lotgeraden h mit der Ebene E ergibt den Lotfußpunkt F :

$$(1+t) - (-t) = -3 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir spiegeln den Aufpunkt B von g am Lotfußpunkt F und erhalten:

Aus diesen Informationen ergibt sich die gespiegelte Gerade g' :

$$\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad g': \vec{x} = \vec{OS} + s \cdot \vec{SA'} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel Die Gerade g soll an E gespiegelt werden mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -12$$

Wir könnten hier wie im 1. Beispiel rechnen und kämen zum Ergebnis: $g' = g$, dass sich hier aber auch ohne Rechnung finden lässt:

Wir sehen ohne viel Rechnen, dass der in der Ebenengleichung verwendete Normalenvektor das 2-fache des Richtungsvektors von g ist, also ist g senkrecht zu E und daher gilt $g' = g$.

Vorgehen - Spiegelung Ebene an Ebene

Gegeben ist eine Gerade $F: \vec{m} \cdot (\vec{x} - \vec{OB}) = 0$, die an einer Ebene $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$ gespiegelt wird.

1. Fall: Die Ebenen liegen parallel

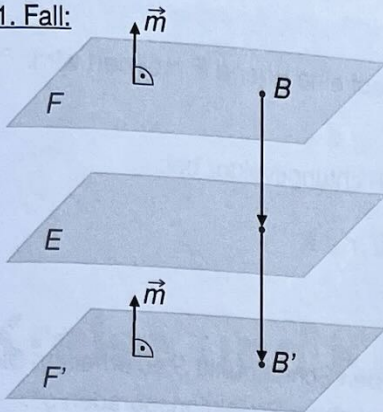
Spiegel den Aufpunkt B von F an E und behalte den Normalenvektor bei:

$$F': \vec{m} \cdot (\vec{x} - \vec{OB'}) = 0$$

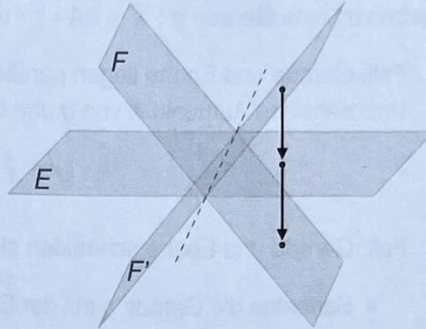
2. Fall: Die Ebenen schneiden sich

- Schneide die beiden Ebenen und ermittle die Schnittgerade.
- Spiegel einen weiteren Punkt von F und bestimme aus diesem Punkt und der Schnittgeraden die Gleichung der Bildebene F' .

1. Fall:



2. Fall:



19.2 Projektion

Eine Projektion bezeichnet die senkrechte Abbildung eines Objekts (z.B. eines Punktes oder einer Geraden) auf eine Ebene.

auf Koordinatenebenen

Bei der Projektion auf eine Koordinatenebene wird die entsprechende Koordinate gleich 0, alle anderen Koordinaten bleiben unverändert.

Beispiele

- $A(2 | -1 | 6)$ ergibt projiziert auf die $x_1 - x_2$ -Ebene (hier ist $x_3 = 0$): $A^*(2 | -1 | 0)$

- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ ergibt projiziert auf die $x_1 - x_3$ -Ebene:

$$g^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

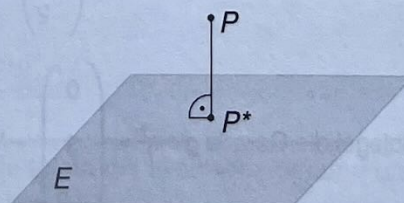
auf beliebige Ebenen

Vorgehen - Punkt auf Ebene

Der gesuchte Punkt ist der Lotfußpunkt von P . Ermittle diesen mit dem Lotgeraden-Verfahren.

Beispiel Betrachten wir das Beispiel aus Abschnitt 18.4, dann ergibt sich bei der Projektion des Punktes $P(2 | 1 | 3)$ auf die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + x_3 - 8 = 0$:

$$P^* \left(\frac{8}{3} \mid \frac{2}{3} \mid \frac{10}{3} \right)$$



Vorgehen - Gerade auf Ebene

Gegeben ist eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$, die auf eine Ebene E projiziert wird.

1. Fall: Gerade und Ebene liegen parallel

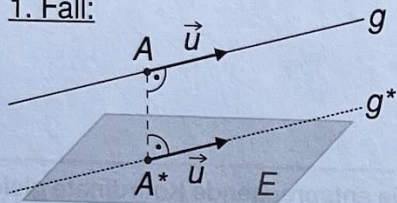
Projiziere den Aufpunkt A von g und behalte den Richtungsvektor bei:

$$g^*: \vec{x} = \vec{OA}^* + r \cdot \vec{u}, r \in \mathbb{R}$$

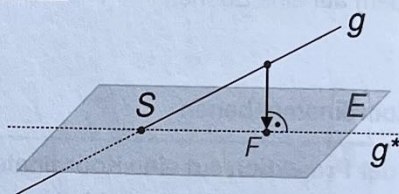
2. Fall: Gerade und Ebene schneiden sich

- Schneide die Gerade g mit der Ebene E , um den Schnittpunkt S zu erhalten. Dieser liegt bereits in der Ebene und somit in der gesuchten Projektionsgeraden g^* .
- Projiziere einen weiteren Punkt von g auf E und stelle aus diesem Punkt und dem Schnittpunkt S die Projektionsgerade g^* auf.

1. Fall:



2. Fall:



19.3 Aufgaben



Lösungen

A-19.1. Spiegel den Punkt $P(5|-2|1)$

a) am Koordinatenursprung

b) am Punkt $Z(-3|1|4)$

c) an der x_1 -Achse

d) an $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

e) an $E: x_1 - x_2 + 3 = 0$

A-19.2. Projektion und Spiegelung:

a) Projiziere die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ auf die $x_1 - x_2$ -Ebene.

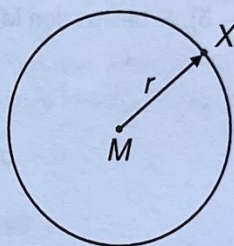
b) Projiziere die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ auf die Ebene $E: x_1 + x_3 = 2$.

c) Spiegel die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ an der Ebene $E: x_1 + x_3 = 2$.

20 Kreise und Kugeln

20.1 Kreis- und Kugelgleichung

Ein Kreis (eine Kugel) bezeichnet die Menge aller Punkte X in einer Ebene (im Raum), die von einem gegebenen Punkt M (dem Mittelpunkt) einen festen Abstand r (den Radius) haben.



Es gilt also: $|\overrightarrow{MX}| = r$.

Wenn wir $r = |\overrightarrow{MX}| = |\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}| = \left| \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \\ x_3 - m_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2}$ quadrieren, erhalten wir die

Kugelgleichung

$$K : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

Beispiel Eine Kugel mit Mittelpunkt $M(2|0|-1)$ und Radius $r = 3$ wird beschrieben durch die Gleichung

$$K : (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 = 9$$

Analog ergibt sich im $\mathbb{R}^2$ die

Kreisgleichung

$$k : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

Unter einem Kreis verstehen wir stets die Kreislinie (nicht die Kreisscheibe) und unter einer Kugel stets die Kugeloberfläche (nicht die Vollkugel).

20.2 Lagebeziehung und Abstand

Punkt - Kugel

Um die gegenseitige Lage eines Punktes P und einer Kugel K zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor:

1. Bestimme den Abstand $d(P, M)$ des Punktes P vom Mittelpunkt M der Kugel.
2. Interpretation, falls:
 - $d(P, M) < r$ liegt P innerhalb der Kugel.
 - $d(P, M) = r$ liegt P auf der Kugel (P erfüllt die Kugelgleichung).
 - $d(P, M) > r$ liegt P außerhalb der Kugel.
3. Der Abstand von P zu K ergibt sich aus der Differenz von $d(P, M)$ und r .

Beispiel Gegeben sind die Kugel $K : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 7)^2 = 25$ sowie die Punkte $P(4|1|3)$ und $Q(1|6|-5)$. K besitzt den Mittelpunkt $M(1|1|7)$ und den Radius $r = 5$. Der Abstand von P zu M beträgt:

$$d(P, M) = |\overrightarrow{MP}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 5 = r$$

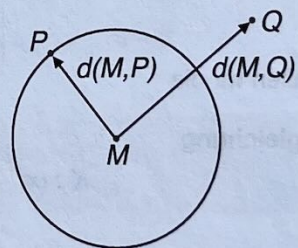
Also liegt P auf der Kugeloberfläche Kreis. Dies ergibt sich auch durch Einsetzen von P in die Kugelgleichung $K : (4 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (3 - 7)^2 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \checkmark$.

Der Abstand von Q zu M beträgt:

$$d(Q, M) = |\overrightarrow{MQ}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = 13 > r$$

Q liegt also außerhalb der Kugel. Der Abstand von Q zur Kugel beträgt:

$$d(Q, K) = d(Q, M) - r = 13 - 5 = 8$$

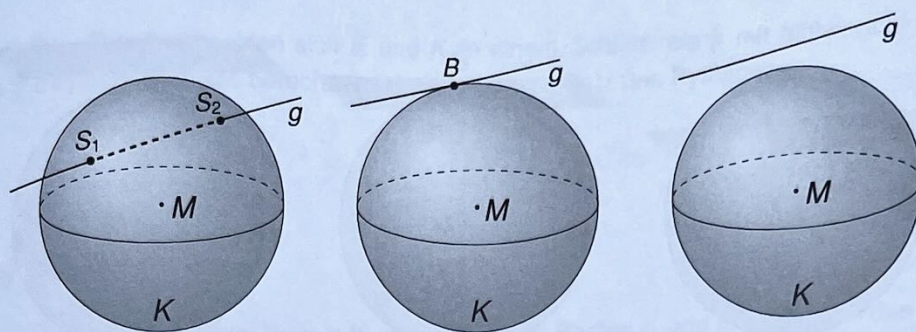


Kugel im Querschnitt

Gerade - Kugel

Eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{0A} + s \cdot \vec{u}, s \in \mathbb{R}$ kann eine Kugel $K : (\vec{x} - \vec{0M})^2 = r^2$

- in zwei Punkten schneiden (**Sekante**),
- in einem Punkt berühren (**Tangente**) oder
- an ihr vorbeigehen (**Passante**).

**Vorgehen**

Setze einen „allgemeinen“ Punkt der Geraden $g: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{u}, s \in \mathbb{R}$ in die Kugelgleichung K ein und löse das Gleichungssystem. Hat dieses

- **zwei Lösungen** s_1 und s_2 , so handelt es sich um eine **Sekante**. Um die beiden Schnittpunkte zu berechnen, setze s_1 und s_2 jeweils in die Geradengleichung ein.
- **genau eine Lösung** s , so handelt es sich um eine **Tangente**. Um den Berührungspunkt B zu berechnen, setze s in die Geradengleichung ein.
- **keine Lösung**, so handelt es sich um eine **Passante**. Um den Abstand der Geraden von der Kugel zu bestimmen, berechne deren Abstand vom Mittelpunkt der Kugel und subtrahiere davon den Radius der Kugel.

Beispiel Wir untersuchen die Lage der Kugel K zur Geraden g mit

$$K: (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 + 2)^2 = 27 \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Dafür setzen wir die Gerade als allgemeinen Punkt mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 + 3s \\ -4 + 4s \\ s \end{pmatrix}$ in K ein:

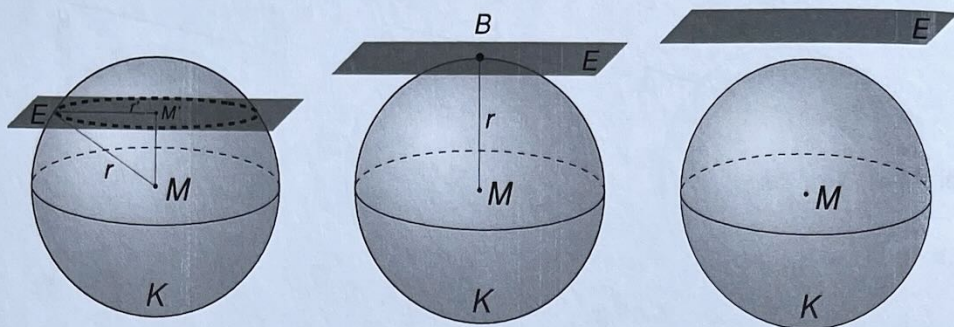
$$(-1 + 3s + 1)^2 + (-4 + 4s - 3)^2 + (s + 2)^2 = 27 \Leftrightarrow s^2 - 2s + 1 = 0 \Rightarrow s = 1$$

Da nur eine Lösung herauskommt, ist g eine Tangente von K und berührt die Kugeloberfläche im Punkt $B(2|0|1)$.

Ebene - Kugel

Eine Ebene E kann eine Kugel $K: (\vec{x} - \vec{OM})^2 = r^2$

- in einem **Schnittkreis** schneiden,
- in einem Punkt berühren (**Tangentialebene**) oder
- nicht schneiden.



Um die gegenseitige Lage einer Ebene $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{0A}) = 0$ und einer Kugel $K: (\vec{x} - \vec{0M})^2 = r^2$ zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor.

Vorgehen

1. Notiere die Gleichung einer Lotgeraden $g: \vec{x} = \vec{0M} + s \cdot \vec{n}, s \in \mathbb{R}$, welche senkrecht auf E steht und durch den Mittelpunkt M der Kugel verläuft.
2. Schneide die Gerade g mit der Ebene E um den Punkt M' zu erhalten. Interpretation:
 - $|\overrightarrow{MM'}| < r$, so schneidet die Ebene E die Kugel in einem Schnittkreis k um M . Den Radius r' des Schnittkreises k erhalten wir über den Satz des Pythagoras:

$$r' = \sqrt{r^2 - |\overrightarrow{MM'}|^2}$$

- $|\overrightarrow{MM'}| = r$, so berührt die Ebene E die Kugel im Punkt M' .
- $|\overrightarrow{MM'}| > r$, so haben Ebene und Kugel keinen gemeinsamen Punkt.

Beispiel Wir untersuchen die gegenseitige Lage der Kugel K mit der Ebene E mit

$$K: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 9)^2 + (x_3 - 4)^2 = 85 \quad \text{und} \quad E: 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 49 = 0$$

Aufstellen der Lotgeraden zu E durch den Kugelmittelpunkt $M(1|9|4)$ liefert:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Gerade g in Gleichung E :

$$6 \cdot (1 + 6s) - 2 \cdot (9 - 2s) + 3 \cdot (4 + 3s) - 49 = 0 \Leftrightarrow 49s - 49 = 0 \Leftrightarrow s = 1$$

Es folgt mit M' als Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebenen E und $|\overrightarrow{MM'}|$ als Abstand des Kugelmittelpunkts vom Schnittpunkt:

$$\overrightarrow{0M'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{MM'}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 7 < \sqrt{85} = r$$

Interpretation: Damit schneiden sich E und K in einem Schnittkreis k mit Mittelpunkt M' . Den Radius r' des Schnittkreises berechnen wir mit Hilfe vom Satz des Pythagoras:

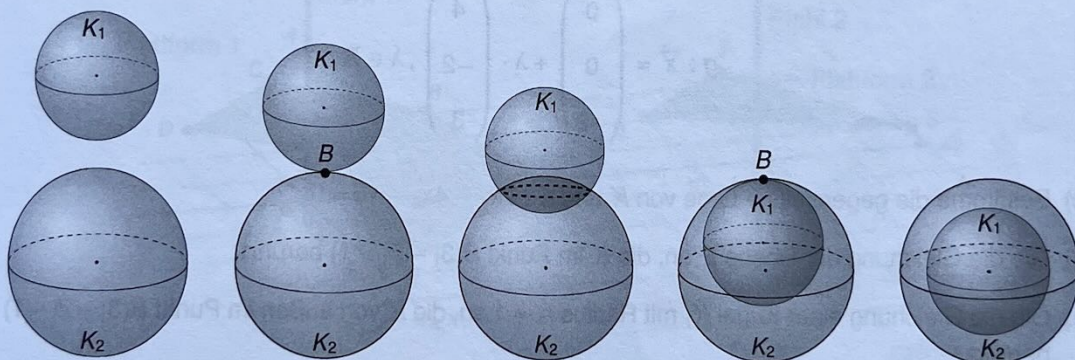
$$|\overrightarrow{MM'}|^2 + (r')^2 = r^2 \Rightarrow r' = \sqrt{r^2 - |\overrightarrow{MM'}|^2} = \sqrt{85 - 49} = \sqrt{36} = 6$$

Kugel - Kugel

Die gegenseitige Lage zweier Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 wird durch den Abstand d der Mittelpunkte M_1 und M_2 bestimmt: $d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1 M_2}|$.

Hier gibt es fünf mögliche Fälle:

1. $d(M_1, M_2) > r_1 + r_2 \Rightarrow$ Die Kugeln haben **keine gemeinsamen Punkte**.
Abstand: $d(K_1, K_2) = d(M_1, M_2) - (r_1 + r_2)$
2. $d(M_1, M_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow$ Die Kugeln berühren sich **von außen in einem Punkt**.
3. $|r_1 - r_2| < d(M_1, M_2) < r_1 + r_2 \Rightarrow$ Die Kugeln **schneiden sich in einem Schnittkreis**.
4. $d(M_1, M_2) = |r_1 - r_2| \Rightarrow$ Die Kugeln **berühren sich von innen in einem Punkt**.
5. $d(M_1, M_2) < |r_1 - r_2| \Rightarrow$ Die Kugeln **liegen ineinander**.



20.3 Aufgaben

Oft sind SchülerInnen verwirrt, wenn in den Aufgaben auf einmal nicht mehr r oder s als Parameter auftauchen, sondern griechische Buchstaben wie λ oder μ . Aus diesem Grund enthalten unsere Aufgaben immer wieder andere Parameter, damit du dich daran gewöhnen kannst und nicht überrascht wirst!



Lösungen

A-20.1. Kreis- und Kugelgleichung

- Bestimme die Kreisgleichung k mit Mittelpunkt $M(3|-2)$ und Radius $r = 3$.
- Bestimme die Kugelgleichung K mit Mittelpunkt $M(1|-4|2)$ und Radius $r = 2$.
- Bestimme die Kugelgleichung K mit Mittelpunkt $M(2|0|-1)$ so, dass $P(-2|-3|-1) \in K$.
- Gib den Mittelpunkt und den Radius von $K : (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 9)^2 + x_3^2 = 5$ an.

A-20.2. Gegeben ist die Kugel $K : (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 4$.

- Gib die Lage von K zu den Punkten $A(2|2|0)$ und $B(3|-2|-1)$ an.
- Bestimme die Lage von K und mit der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- Bestimme die gegenseitige Lage von K und $E : 2x_1 - 4x_2 - 15 = 0$.
- Gib die Gleichung der Ebene E an, die K im Punkt $B(3|-2|-1)$ berührt.
- Gib die Gleichung einer Kugel K_1 mit Radius $r_1 = 1$ an, die K von außen im Punkt $B(3|-2|-1)$ berührt.

21 Aufgaben auf Abiturniveau

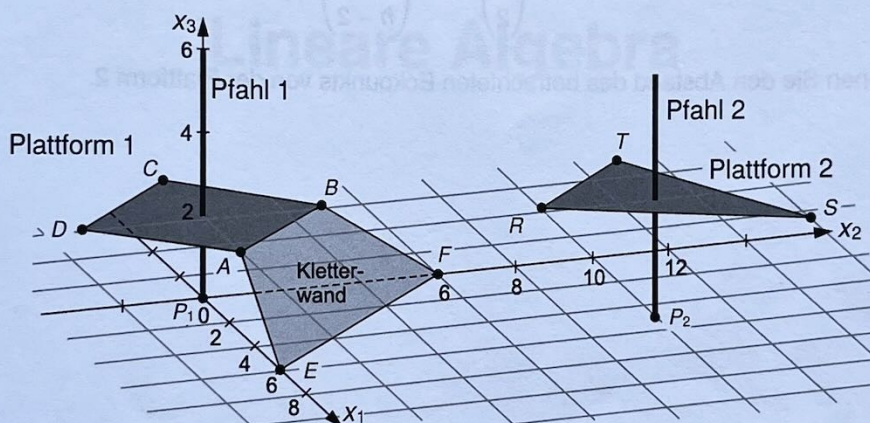
Aufgabe: „Kletteranlage“¹

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Teile einer Kletteranlage:

- zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind
- eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist



Lösungen



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2 - Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

- In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20% länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.
- Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L . Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.
[zur Kontrolle: $L : 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$]
- Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

¹ Abitur Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 2018 - Prüfungsteil B - Geometrie - Aufgabengruppe 2

- d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt. Einer der beiden unteren Eckpunkte befindet sich an Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt an Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes 1,80 m. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

- e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Netzes und erläutern Sie Ihren Ansatz.
- f) Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch die Strecke $[RT]$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Im Modell hat dieser Eckpunkt die Koordinaten $(5|10|h)$ mit einer reellen Zahl $h > 3$. Die untere Netzkante liegt auf

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie den Abstand des betrachteten Eckpunkts von der Plattform 2.