



Schroedel



fit fürs  
**abi**

Oberstufenwissen

**Physik**



Mit  
Glossar  
im Buch  
und als App

ufe  
k

fit fürs  
**abi**

Oberstufenwissen

**Physik**

22

*Physik  
Oberstufe*

**SCHÜLERCENTER**

StadtBIBLIOTHEK Neuss

704

Schroedel

fit fürs  
**abi**

Oberstufenwissen

# Physik

für Schülerinnen und Schüler zur Vorbereitung auf das Abitur

**Dr.-Ing. Dipl.-Phys. Dirk Kähler** hat 1991 sein Abitur mit den Schwerpunkten Mathematik und Physik als Jahrgangsbester abgeschlossen. Aus den Abiturvorbereitungen ging dann die erste Auflage für **Fit fürs Abi – Wissen: Physik** hervor. Es folgten ein Physikstudium mit sehr gutem Abschluss und eine Promotion mit Auszeichnung über Quantenbauelemente in der Elektrotechnik. Heute arbeitet der Autor als Wissenschaftler bei der Fraunhofer Gesellschaft. Über die Jahre entstand so ein umfangreiches Lehr- und Nachschlagewerk zur Experimentalphysik, dass sich hervorragend zur Abiturvorbereitung und zum Einstieg ins natur- oder ingenieurwissenschaftliche Studium eignet.

© 2012 Bildungshaus Schulbuchverlage

Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig

[www.schroedel.de](http://www.schroedel.de)

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung gescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Auf verschiedenen Seiten dieses Buches befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie bei dem angegebenen Inhalt des Anbieters dieser Seite auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

Druck 1/Jahr 2012

Redaktion & Satz: imprint, Zusmarshausen

Kontakt: [lernhilfen@schroedel.de](mailto:lernhilfen@schroedel.de)

Herstellung: Sandra Grünberg

Umschlaggestaltung und Innenlayout: Janssen Kahlert Design & Kommunikation, Hannover

Umschlagfoto: stockphoto / Andrey Prokhorov

Druck und Bindung: westermann druck GmbH, Braunschweig

ISBN 978-3-507-23049-1

<b>1 Mechanik</b> .....	6
1.1 Bewegungsgleichungen .....	6
1.2 Die drei Axiome NEWTONS .....	8
1.3 Erhaltungssätze der Mechanik .....	9
1.4 Arbeit, Leistung und Energie .....	10
1.5 Stoßvorgänge .....	12
1.6 Reibung .....	14
1.7 Gravitation und Himmelsmechanik .....	15
1.8 Rotation in der Ebene .....	19
1.9 Rotation in vektorieller Darstellung .....	24
1.10 Kräfte im rotierenden System .....	28
<b>2 Elektrisches und magnetisches Feld</b> .....	31
2.1 Elektrostatisches Feld .....	31
2.2 Magnetisches Feld .....	45
2.3 Induktion .....	56
<b>3 Schwingungen</b> .....	67
3.1 Signalformen und Überlagerungen .....	67
3.2 Theorie der harmonischen Schwingungen .....	73
3.3 Spezielle Schwingungen .....	82
<b>4 Wellen</b> .....	91
4.1 Ausbreitung von Wellen .....	91
4.2 Elektromagnetische Wellen .....	101
4.3 Interferenzphänomene .....	107
4.4 Polarisierung .....	116
<b>5 Quantenmechanik</b> .....	124
5.1 Welle-Teilchen-Dualismus .....	124
5.2 Atomaufbau .....	131
<b>6 Spezielle Relativitätstheorie</b> .....	143
6.1 Grundlagen .....	143
6.2 Konsequenzen .....	150
<b>7 Kern- und Teilchenphysik</b> .....	157
7.1 Grundlagen .....	157
7.2 Radioaktive Prozesse .....	167

<b>8 Thermodynamik (Wärmelehre)</b> .....	179
8.1 Kinetische Gastheorie .....	179
8.2 Ideales und reales Gas .....	185
8.3 Hauptsätze der Thermodynamik .....	192
8.4 Wärme und Energie .....	194
8.5 Reversible Zustandsänderungen .....	200
<b>Glossar</b> .....	208
<b>Mathematischer Anhang</b> .....	242
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	251

## Vorwort

# Vorwort

### Fit fürs Abi Oberstufenwissen Physik ist ...

- ⊕ **mehr als eine Abiturhilfe:** Durch die Vielfalt der deutschen Lehrpläne deckt der Inhalt nahezu die gesamte Experimentalphysik ab. Das Buch wird dadurch zu einem praktischen Wegbegleiter durch die Oberstufe/S II bis zum Studium.
- ⊕ **verständlich:** Der Inhalt baut logisch aufeinander auf. Wann immer dies einfach möglich ist, werden Formeln hergeleitet, um ein tieferes Verständnis zu ermöglichen. **Beispiele** zeigen die Anwendung des Gelernten.
- ⊕ **übersichtlich:** Die Kernaussagen jedes Abschnitts sind in **Wissen-Kästen** zusammengefasst. Am Ende jedes Kapitels folgt eine **Zusammenfassung**. Kästen mit **Vorsicht Falle** weisen auf typische Fallstricke hin.
- ⊕ **praktisch:** Ein **Anhang** mit mathematischen Grundlagen, ein sehr ausführliches **Glossar** zum Nachschlagen und Lernen sowie ein umfangreiches **Stichwortverzeichnis** helfen Fragen schnell zu beantworten. Fürs Nachschlagen und Lernen unterwegs gibt es das **Glossar auch als App für Ihr Smartphone**.
- ⊕ **vollständig:** Die einzelnen Themen behandeln alle wichtigen Aspekte, unabhängig davon, in welcher Jahrgangsstufe sie auf dem Lehrplan stehen.
- ⊕ **Zusatz-Wissen:** Inhalte mit dieser Überschrift gehen über den Lehrplan hinaus und runden den Inhalt zu einem vollständigen Bild ab.

Einfach im Apple App Store oder im Google Play Store „Fit fürs Abi“ eingeben und kostenlos herunterladen. Die App erklärt wichtige Fachbegriffe nicht nur für das Fach Physik, sondern auch für sieben weitere Abiturfächer. Digitale „Karteikarten“ erleichtern das Lernen.

## „Abitur, na klar! ... Aber wie?“

Eine effektive Prüfungsvorbereitung gliedert sich in vier Phasen:

1. Lesen sie unterrichtsbegleitend in Ihrem **Fit fürs Abi Oberstufenwissen Physik**, so können sie offene Fragen im Unterricht klären.
2. Prüfen sie vor jeder Klausur, ob das Buch alle behandelten Themen enthält, markieren sie sich die relevanten Seiten und ergänzen sie evtl. fehlende Informationen. Lesen Sie die Texte aufmerksam durch – klären sie offene Fragen im Unterricht oder mithilfe Ihres Physikbuches.
3. Nutzen sie Ihr **Fit fürs Abi Oberstufenwissen Physik**, um alle Themen so lange zu wiederholen, bis sie den Inhalt vollständig verstanden und behalten haben. Denn gute Noten kann nur erzielen, wer den Inhalt verstanden hat. Schauen Sie zum Schluss auch ein wenig über den Tellerrand – gibt es verwandte Themen die in der Klausur drankommen könnten?
4. Übung schadet nicht: Das Ausrechnen von Formeln bringt zur Klausurvorbereitung nur wenig, da es kein Verständnis schafft und viel Zeit kostet. In der Klausur müssen sie es dennoch beherrschen. Zum Abschluss sollten sie daher noch einige Aufgaben, z. B. aus **Fit für Abi Physik Klausur Training**, rechnen oder zumindest den Lösungsweg im Kopf durchgehen. Ihre Vorbereitungen sind nun abgeschlossen – Sie sind **Fit fürs Abi**.

## Abschließend noch einige allgemeine Tipps und Tricks

- ⊕ Achten Sie auf deutlich geschriebene Buchstaben und Zahlen. Wurzeln sollten am Ende abgeschlossen ( $\sqrt{\quad}$ ) werden. Maximalwerte (Scheitelwerte) kennzeichnen sie zeitsparend durch ein Dach (^) über dem Symbol.
- ⊕ Wenn es erlaubt ist, verwenden Sie einen Bleistift: Radieren ist übersichtlicher als durchstreichen.
- ⊕ Skizzen und Versuchsbeschreibungen sollten nur zwingend notwendige Informationen enthalten. I. d. R. ist es überflüssig, Stative zu zeichnen oder das Einschalten der Geräte zu beschreiben. Schwierigkeiten bei der Messung, die evtl. zu einem schlechten Messergebnis führen, sind zu vermerken. Es folgen Messergebnisse in Tabellenform. Für die Fehlerrechnung vermerken Sie unbedingt auch die jeweilige Messunsicherheit.

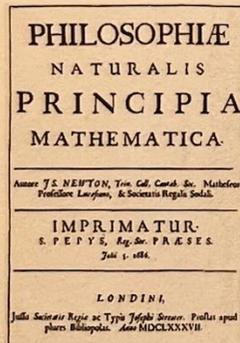
Nun wünsche ich Ihnen viel Erfolg für Ihre Prüfungen!

Dirk Kähler

## 1

# Mechanik

Die Mechanik wird oft als die „Mutter der Physik“ bezeichnet – doch sie war auch eine radikale Revolutionärin: Zahlreiche mythologisch geprägte Weltbilder wurden durch ihren aufklärerischen Geist zerstört. So brauchte es Jahrhunderte, um aus ihren philosophischen Ansätzen eine konsistente, dem heutigen Begriff entsprechende naturwissenschaftliche Lehre, die klassische Mechanik, zu entwickeln.



Quelle: [www.wikipedia.de](http://www.wikipedia.de)

GALILEO GALILEI

1564–1642

SIR ISAAC NEWTON

1643–1727

JOHANNES KEPLER

1571–1630

Für seinen provokativen „Dialog über die zwei wichtigsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische“ (1632, Bild rechts oben) wurde GALILEO von der Inquisition inhaftiert. Nur 70 Jahre später dagegen wurde ISAAC NEWTON als Verfasser der Schrift „Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“ (1687, Bild unten) für sein Lebenswerk geadelt. Vor allem ISAAC NEWTON ist zu verdanken, dass die **klassische Mechanik** sowohl die auf der Erde stattfindenden Vorgänge als auch die Beobachtungen der Astronomen, wie z. B. von JOHANNES KEPLER, erklären konnte. Für uns sind Begriffe wie „Erdanziehungskraft“ und „Umlaufbahn“ heute so selbstverständlich geworden, dass wir NEWTONS Leistung kaum noch genug würdigen können.

## 1.1 Bewegungsgleichungen

Durch die Gesetze der **Kinematik** können Voraussagen über Bewegungen getroffen werden. In einer ersten, groben Näherung werden Körper als Massepunkte betrachtet, die sich ohne jegliche Reibung wie z. B. Luftwiderstand fortbewegen. Die Zusammenhänge von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung können dann nach meist einfachen mathematischen Regeln beschrieben werden. Dabei werden die Differential- und die Integralrechnung eingesetzt.

### Differential-Schreibweise

Ableitungen nach der Zeit werden in der Physik vereinfacht durch Punkte über der Variablen gekennzeichnet:

$$\text{Ortskurve:} \quad \vec{r}(t) \quad [\text{m}]$$

$$\text{Bahnkurve:} \quad \vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \quad [\text{m}]$$

$$\text{Geschwindigkeit:} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \dot{\vec{s}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

$$\text{Beschleunigung:} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{s}} = \ddot{\vec{r}} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

**Ort → Geschwindigkeit → Beschleunigung**

Die Position eines Körpers wird durch den zeitabhängigen **Ortsvektor**  $\vec{r}(t)$  beschrieben, den zeitlichen Verlauf nennt man die **Ortskurve**. Wird die Bewegung auf einen Startpunkt  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$  bezogen, spricht man von der **Bahnkurve**  $\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ . Die Ableitung nach der Zeit (→ Ableitungsregeln, Anhang Seite 246) gibt in beiden Fällen die **Geschwindigkeit**:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \dot{\vec{s}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Geschwindigkeit

Die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit heißt **Beschleunigung**:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Beschleunigung

Bei einer **gleichförmigen Bewegung** ist  $a = 0$  und damit  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konst.}$

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt hingegen:  $\vec{a} = \text{konst.}$

**Beschleunigung → Geschwindigkeit → Ort**

Die zeitliche Integration der Beschleunigung (→ Integrationsregeln, Anhang

Seite 247) liefert eine Geschwindigkeitsänderung:  $\Delta \vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$

Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich erst durch Addition der Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  zu Beginn des betrachteten Vorgangs (Integrationskonstante):  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}$

In gleicher Weise lässt sich aus dem Geschwindigkeitsverlauf die zurückgelegte Wegstrecke  $\Delta \vec{s}(t)$  und die Ortskurve  $\vec{r}(t)$  ermitteln:

$$\Delta \vec{s}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' \quad \text{bzw.} \quad \vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' + \vec{r}(t_0)$$

Der Verlauf des Ortsvektors bei beliebig beschleunigten Vorgängen ist

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right) dt'$$

Ortsvektor

**Gleichförmige Bewegung:**  $\vec{a}(t) = 0; \vec{v}(t) = \vec{v}_0; \vec{s}(t) = \vec{v}_0 \cdot t$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$$

**Gleichmäßig beschleunigte**  $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$

**Bewegung:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t$$

$$\vec{s}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 \cdot t^2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 \cdot t^2$$

**Bewegungsgleichungen**

## 1.2 Die drei Axiome NEWTONS

### Das Trägheitsprinzip (1. Axiom)

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte null ist:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

Dieser Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung wird durch den **Impuls**  $p$  beschrieben:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Die Proportionalitätskonstante  $m$  zur Geschwindigkeit  $v$  wird als „träge“ **Masse** bezeichnet. Mit dieser Definition lässt sich das **Trägheitsprinzip** auch so formulieren:

#### Impulserhaltungssatz

Der Impuls eines Körpers bleibt konstant, solange die Summe aller Kräfte null ist.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum \vec{p} = \text{konst.}$$

### Das Aktionsprinzip (2. Axiom)

Eine Bewegungsänderung (**Beschleunigung**,  $\vec{a}$ ) findet proportional zur einwirkenden Kraft  $\vec{F}$  und in dieselbe Richtung statt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Mit  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  und  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  folgt hieraus der Trägheitssatz:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Die Kraft  $F$  kann also als eine Ableitung des Impulses  $p$  nach der Zeit betrachtet werden.

### Das Reaktionsprinzip (3. Axiom)

Zu jeder Kraft existiert eine gleich starke, ihr entgegen wirkende Kraft – „Actio gleich Reactio“:  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

#### NEWTONS Axiome

Im Inertialsystem gelten nach NEWTONS Axiomen der klassischen Mechanik folgende Zusammenhänge:

Impuls:	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Kraft:	$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{p}$
Gleichgewicht der Kräfte:	$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$
Trägheitssatz:	$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{konstant}$

## 1.3 Erhaltungssätze der Mechanik

Die Erfahrung zeigt, dass in einem abgeschlossenen System bestimmte physikalische Größen grundsätzlich erhalten bleiben, unabhängig davon, was innerhalb des Systems passiert.

### Erhaltung der Energie

**Energie** kann weder erzeugt noch verbraucht werden. Es ist lediglich möglich, verschiedene Energieformen ineinander umzuwandeln. In der Mechanik gilt der Energieerhaltungssatz in der vereinfachten Form: Die Summe aus **potentieller Energie** (→ Seite 10 f.) und **kinetischer Energie** (→ Seite 11) ist in abgeschlossenen Systemen konstant.

$$\Sigma W_{\text{kin}} + \Sigma W_{\text{pot}} = \text{konstant}$$

Allerdings kann man nur selten ein wirklich abgeschlossenes System betrachten: So geht den meisten mechanischen Systemen (z. B. durch Reibung) Energie verloren, die durch Wärme oder auch Schall an die Umgebung abgegeben wird.

### Erhaltung der Masse

In der Mechanik gilt das Gesetz der Erhaltung der Ruhemasse:  $\Sigma m = \text{konstant}$ . Der Begriff der **Ruhemasse** wird im Kapitel über die spezielle Relativitätstheorie (→ Seite 152 f.) eingeführt. Für Geschwindigkeiten, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit klein sind (klassische Mechanik), entspricht die Ruhemasse dem bisher verwendeten Begriff der trägen Masse. Darüber hinaus gibt es Prozesse, bei denen Masse in Energie (**Zerstrahlung**, → Seite 167) oder Energie in Masse (**Paarbildung**, → Seite 167) umgewandelt wird. Die Massenerhaltung ist daher ein Spezialfall der **Energieerhaltung**, der jedoch im Rahmen der klassischen Mechanik stets erfüllt ist.

### Ladungserhaltung

In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Ladungen konstant:  $\Sigma q = \text{konstant}$ .

### Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls (Vektorsumme der Einzelimpulse) eines abgeschlossenen Systems ist konstant, auch wenn sich die Einzelimpulse der beteiligten Massen ändern:  $\Sigma \vec{p} = \text{konstant}$ .

### Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls (→ Seite 22 f.) eines abgeschlossenen Systems ist konstant, auch wenn sich die Einzeldrehimpulse ändern:  $\Sigma \vec{L} = \text{konstant}$ .

## 1.4 Arbeit, Leistung und Energie

In der Physik bezeichnet die **Arbeit**  $W$  (von engl. *work*) den Energieumsatz bei einer mechanischen Bewegung. Zur Berechnung dient das Skalarprodukt aus Kraft und Weg.

Arbeit 
$$W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad \text{mit Skalarprodukt } \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

### Vorsicht: Falle

Bei der Integration des Weges wird das Skalarprodukt aus Kraft und Weg gebildet (vektorielles Kurvenintegral, → Anhang Seite 247). Mit anderen Worten: Es trägt nur die Kraft in Richtung des Weges zur Arbeit bei. Die senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende Zentripetalkraft bei einer Rotation verrichtet also keine Arbeit.

Ist die Kraft konstant und wirkt in der Bewegungsrichtung, dann gilt die Formel „Arbeit = Kraft mal Weg“:

$$W = F \cdot s$$

Für den Betrag der umgesetzten **Energie** ist es nicht entscheidend, wie schnell ein Vorgang stattfindet – erst mit der Definition der **Leistung**  $P$  (engl. *power*) bekommt die Zeit für die Energieumsetzung eine Bedeutung:

Leistung 
$$P(t) = \frac{d}{dt} W \Leftrightarrow W = \int P(t) dt$$

Bei wiederum konstanter Kraft vereinfacht sich das Integral der Leistung zu der bekannten Formel „Kraft mal Weg pro Zeit“:

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

Das Wort „**Energie**“ ist heute einer der am häufigsten verwendeten Begriffe in unserem täglichen Leben und beschreibt eines der Grundkonzepte der Physik – und doch wurde dieser Begriff erst lange nach NEWTON eingeführt.

### Vorsicht: Falle

Im Alltag wird das Wort „Energie“ häufig ungenau oder falsch verwendet: „Energieverbraucher“ oder ähnliche Dinge existieren aus physikalischer Sicht nicht. Ein Gerät nimmt lediglich elektrische Energie auf und wandelt sie in mechanische Arbeit und Wärme um.

Energie kommt in zahlreichen Formen wie z. B. als Bewegungsenergie, Wärme (Thermodynamik, → Seite 179 ff.), Feldenergie (Felder, → Seite 40 und 62), Ruheenergie (Spezielle Relativitätstheorie, → Seite 144 f.) oder Nullpunktsenergie (Quantenmechanik, → Seite 131) vor. Die Mechanik unterscheidet nur zwischen zwei Energieformen: **potentieller Energie** und **kinetischer Energie**.

Die **potentielle Energie** wird häufig auch als **Lageenergie** bezeichnet. Sie beschreibt die Energie eines Körpers aufgrund seiner Position. Eine Masse, die

gegen die **Gravitation** (→ Abschnitt 1.7, Seite 15) auf eine Höhe  $h$  angehoben wurde, hat beispielsweise die potentielle Energie  $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ . Die potentielle Energie entspricht somit der Arbeit, die aufgewendet werden muss, um den Körper in diese Position zu bringen. Die potentielle Energie hängt nur vom Ort ab, nicht von dem Verlauf des zurückgelegten Weges!

$$W_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

potentielle Energie

Eine Funktion, die die Ortsabhängigkeit der potentiellen Energie beschreibt, wird als **Potential** bezeichnet. Ebenso wie die potentielle Energie bezieht sich ein Potential immer auf einen Referenzpunkt.

Die zweite Energieform, mit der sich die Mechanik beschäftigt, ist die **kinetische Energie (Bewegungsenergie)**. Ihre Größe hängt von der Geschwindigkeit und der Masse des bewegten Körpers ab. Zur Herleitung führen wir folgendes Gedankenexperiment durch: Eine Masse  $m$  wird auf die Höhe  $h$  angehoben. Ihre potentielle Energie beträgt somit  $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ . Nun lassen wir die Masse wieder herunterfallen. Vernachlässigen wir die Luftreibung, so wird die potentielle Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt. Wir verwenden die Bewegungsgleichungen für eine konstante **Beschleunigung**  $g$ , um ihre Geschwindigkeit bei  $h = 0$  zu berechnen:

$$v(t) = \int g dt \Rightarrow v(t) = g \cdot t \quad \text{und} \quad s(t) = \int v(t) dt \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Mit  $s(t) = h$  ergibt sich:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{bzw.} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} v^2$$

freier Fall

Die Geschwindigkeit beim **freien Fall** ist also unabhängig von der Masse. Die kinetische Energie bei dieser Geschwindigkeit entspricht der potentiellen Energie  $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ . Setzt man für  $g \cdot h$  den aus dem obigen Ergebnis errechneten Ausdruck  $g \cdot h = \frac{1}{2} v^2$  ein, so kommt man zu

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{bzw.} \quad W_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{mit} \quad p = m \cdot v$$

kinetische Energie

Diese beiden Formeln gelten unabhängig von diesem Beispiel für alle Arten der Bewegung. Für Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit ergeben sich Abweichungen von diesen Formeln, die durch die spezielle Relativitätstheorie (→ Seite 152 ff.) beschrieben werden.

**Kinetische Energie:**  $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$  mit  $p = m \cdot v$

**Potentielle Energie:**  $W_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$

**Leistung:**  $P(t) = \frac{d}{dt} W \Leftrightarrow W = \int P(t) dt$

Energie und Leistung

## 1.5 Stoßvorgänge

Bleibt während eines Stoßes die kinetische Energie vollkommen erhalten, so wird der Stoß als vollkommen **elastisch** bezeichnet. Wird die kinetische Energie ganz in Deformationsarbeit, Schall usw. umgewandelt, so wird von einem vollkommen **unelastischen Stoß** gesprochen. Im Normalfall hat man es mit gemischten Vorgängen zu tun, doch oft kann eine Komponente auch vernachlässigt werden.

Stöße werden am zweckmäßigsten im **Schwerpunktsystem** der beteiligten Stoßpartner beschrieben: In diesem **Bezugssystem** ist der Gesamtimpuls gleich null, sodass die Gleichungen besonders einfach werden.

Seien  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der beiden Stoßpartner mit den Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  vor dem Stoß sowie den Geschwindigkeiten  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  nach dem Stoß. Sei  $W_{\text{kin}}$  die gesamte kinetische Energie des Stoßvorganges und sei  $\varepsilon$  die Energiemenge, die beim Stoß in Deformationsarbeit, Schall usw. umgewandelt wird. Dann gilt:

**Energieerhaltungssatz:**  $\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2 + \varepsilon$  bzw.  
 $m_1\vec{v}_1^2 + m_2\vec{v}_2^2 = m_1\vec{u}_1^2 + m_2\vec{u}_2^2 + 2\varepsilon$

**Impulserhaltungssatz:**  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$  und  $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$

Aus dem Impulserhaltungssatz folgt durch Umstellen und Quadrieren:

$$(m_2\vec{v}_2)^2 = (-m_1\vec{v}_1)^2 \Rightarrow m_2\vec{v}_2^2 = \frac{m_1^2}{m_2} \cdot \vec{v}_1^2$$

In gleicher Weise stellen wir die nach dem Stoß geltende Impulsgleichung um:

$$m_2\vec{u}_2^2 = \frac{m_1^2}{m_2} \cdot \vec{u}_1^2$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich nun leicht in den Energiesatz einsetzen, sodass vom zweiten Stoßpartner nur noch die Masse, nicht mehr die Geschwindigkeit erscheint:

$$m_1\vec{v}_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2} \cdot \vec{v}_1^2 = m_1\vec{u}_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2} \cdot \vec{u}_1^2 + 2\varepsilon,$$

bzw. nach Division der Gleichung durch  $m_1$ :

$$\vec{v}_1^2 \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \vec{u}_1^2 \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) + \frac{2\varepsilon}{m_1}$$

Auflösen nach  $u_1$  ergibt so die Geschwindigkeit des ersten Stoßpartners nach dem Stoß:

$$|u_1| = \sqrt{\vec{v}_1^2 - \frac{2\varepsilon}{m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}}}$$

Wir wollen die Gleichung nun noch so umstellen, dass die Deformationsenergie und die gesamte kinetische Energie des Stoßes miteinander in Bezug stehen.

Für  $W_{\text{kin}}$  gilt:  $2 \cdot W_{\text{kin}} = m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2$ , bzw. mit der bereits oben aus der Impulsgleichung erhaltenen Beziehung:

$$2 \cdot W_{\text{kin}} = m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2} \vec{v}_1^2.$$

Somit beträgt der in der Geschwindigkeitsgleichung von  $u_1$  rechts im Nenner stehende Ausdruck  $m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} = \frac{2 \cdot W_{\text{kin}}}{\vec{v}_1^2}$ .

Es kann also die Geschwindigkeit nach dem Stoß folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$|\vec{u}_1| = |\vec{v}_1| \cdot \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{W_{\text{kin}}}}$$

Beim vollkommen unelastischen Fall ist  $\epsilon = W_{\text{kin}}$  und somit die Geschwindigkeit (im Schwerpunktsystem) beider Stoßpartner nach dem Stoß gleich null.

Der Übergang zu einem anderen Bezugssystem geschieht durch vektorielle Addition der Geschwindigkeit des Schwerpunkts in Bezug auf das neue System zu den Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  vor bzw.  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  nach dem Stoß (**GALILEI-Transformation**, → Seite 143).

Über die Richtung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß sagen diese Gleichungen nichts aus. Darüber hinaus gelten sie nur für den **zentralen Stoß**. Weicht die Betrachtung hiervon ab, so müssen Effekte wie die Reibung (→ nächster Abschnitt) zwischen Oberflächen einbezogen werden. Insbesondere muss im allgemeinen Fall auch der Drehimpulserhaltungssatz (→ Seite 9) erfüllt werden, wodurch sich Abweichungen von den hier betrachteten Gleichungen ergeben.

**Vorsicht:  
Falle**

Anhand einer Reihe von fünf bifilar (d. h. an zwei Fäden) aufgehängten Stahlkugeln gleicher Masse  $m$  wird die **Impulserhaltung** im elastischen Stoßvorgang demonstriert:

Hebt man auf der rechten Seite  $n_R = 2$  Kugeln an und lässt sie auf die ruhenden Kugeln prallen, so entfernen sich links

ebenso  $n_L = 2$  Kugeln mit derselben Geschwindigkeit. Versetzt man rechts

$n_R = 3$  Kugeln in Bewegung, so werden sich auch  $n_L = 3$  Kugeln links entfernen. Nach der Impulserhaltung gilt:  $n_R \cdot m \vec{v} = n_L \cdot m \vec{u}$ ;  $\vec{u} = \vec{v} \cdot \frac{n_R}{n_L}$

Der Energieerhaltungssatz dagegen besagt für den vollkommen elastischen Stoß:

$$n_R \cdot \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = n_L \cdot \frac{1}{2} m \vec{u}^2; \quad u = v \cdot \sqrt{\frac{n_R}{n_L}}$$

Es können nur dann beide Bedingungen erfüllt sein, wenn der Quotient  $n_R/n_L$  gleich eins, d. h.  $n_R = n_L$  ist. Daraus folgt automatisch  $u = v$ .

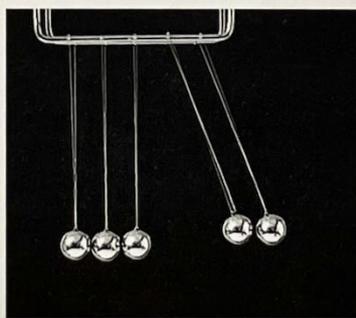


Abb. 1.1: Stoß von Metallkugeln

**Kugelstoß-  
pendel**

**Tipp:** Unelastische Stöße können mit Bleikugeln untersucht werden. Die Deformationsenergie  $\epsilon$  ist dann zu berücksichtigen.

## 1.6 Reibung

Liegen zwei Flächen bewegungslos aufeinander, so haften die Oberflächen durch atomare Wechselwirkungen und mikroskopischen Verzahnungen aufeinander. Um die Flächen gegeneinander zu bewegen, muss die **Haftreibung**  $F_H$  überwunden werden, die nur von der Anpresskraft  $F_\perp$  und den Materialien, nicht jedoch von der Kontaktfläche abhängt. Dasselbe gilt für die etwas kleinere **Gleitreibung**  $F_G$ , die auftritt, sobald die Oberflächen sich bewegen. Nochmals wesentlich kleiner ist die vom Radius  $r$  abhängige **Rollreibung**  $F_R$ , die durch Deformation und Haftung der Oberflächen verursacht wird.

COULOMB-Reibung  $F_H = \mu_H \cdot F_\perp$  und  $F_G = \mu_G \cdot F_\perp$  und  $F_R = \frac{\mu_R}{r} \cdot F_\perp$

CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB  
1736–1806

Unabhängig von ihrer Ursache werden alle diese Reibungsphänomene, die von der Geschwindigkeit unabhängig sind, als **COULOMB-Reibung** bezeichnet. Bewegt sich ein Körper langsam durch ein Gas oder eine Flüssigkeit, so entsteht eine **laminare Strömung**, deren Geschwindigkeitsverteilung nur von der Geschwindigkeit  $v$  und der **Viskosität**  $\eta$  des Mediums abhängt.

viskose Reibung  $F_V = \mu_V \cdot v$  mit  $\mu_V = \mu_{\text{Geometrie}} \cdot \eta$   
STOKES'sches Reibungsgesetz  $F_{ST} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$  für eine Kugel mit Radius  $r$

SIR GEORG GABRIEL STOKES  
1819–1903

Bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten  $v$  bilden sich Wirbel und es entsteht eine turbulente Strömung. Der Strömungswiderstand ist proportional zur Strömungsfläche  $A$  und der Dichte des Mediums  $\rho$ :

NEWTON-Reibung  $F_N = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2$

Der Widerstandsbeiwert  $c_W$  beschreibt den Unterschied zwischen einem umströmten Objekt und einer vollständigen Abbremsung des Mediums.

$$c_W = \frac{F_N}{F_{\text{Stau}}} \text{ mit Staukraft } F_{\text{Stau}} = \frac{1}{2} \rho A v^2 = p_{\text{Stau}} \cdot A \text{ und Staudruck } p_{\text{Stau}} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Eine Kugel hat den  $c_W$ -Wert 0,35, ein Fallschirm 1,4 und ein Pkw 0,25.

Ob eine Strömung laminar oder turbulent ist lässt sich mit der REYNOLDS-Zahl abschätzen, in die eine charakteristische Länge  $l$  des Objekts eingeht.

REYNOLDS-Zahl  $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$

OSBORNE REYNOLDS  
1842–1912

Je höher ihr Wert ist, umso wahrscheinlicher ist eine turbulente Strömung. Bei einer fallenden starren Kugel erfolgt der Übergang bei  $2 \cdot 10^5$  bis  $6 \cdot 10^5$ , bei einem Regentropfen hingegen schon bei  $Re \approx 300$  und für die Strömung in Rohren bei rund 2300. Im Windkanal nutzt man die REYNOLDS-Zahl, um an kleinen Modellen bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten, die Strömung an großen Objekten zu simulieren und den  $c_W$ -Wert zu messen.

## 1.7 Gravitation und Himmelsmechanik

### KEPLER'sche Gesetze

Die Bewegung der Planeten um die Sonne bzw. des Mondes um die Erde wurde erstmals von JOHANNES KEPLER im Jahr 1609 mathematisch korrekt beschrieben. Die von ihm aufgestellten **KEPLER'schen Gesetze** beschreiben die Bewegung eines einzelnen Planeten oder eines einzelnen Mondes (allgemein eines Trabanten) um ein wesentlich massereicheres Zentralgestirn (Zwei-Körper-Problem).

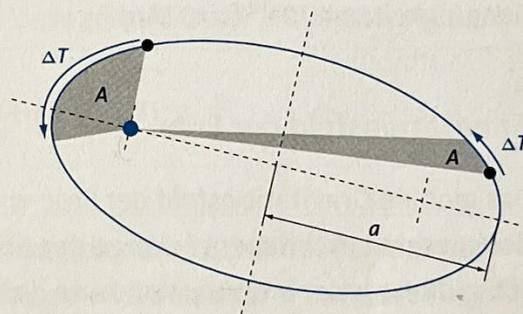
JOHANNES KEPLER  
1571–1630

#### 1. Ellipsensatz (Erstes KEPLER'sches Gesetz)

Die **Umlaufbahn** eines Trabanten ist eine Ellipse, deren einer Brennpunkt im Schwerezentrum des Systems liegt.

#### 2. Flächensatz (Zweites KEPLER'sches Gesetz)

In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl zwischen umlaufendem Objekt und Gravizentrum des Systems gleiche Flächen.



**Tip:** Der Flächensatz gilt auch für einmalig passierende Himmelskörper: Ihre Bahnkurve ist eine Hyperbel, die wie die Ellipse den Rand einer Kegelschnittfläche darstellt.

Im **Dritten KEPLER'schen Gesetz** wird ein Zusammenhang der Bahnbewegungen zweier Planeten um dasselbe Zentralgestirn hergestellt: Demnach sind die Quadrate der Umlaufzeiten  $T$  der beiden Planeten proportional zu den dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen  $a$ :

Abb. 1.2: Umlaufbahn und Geschwindigkeit eines Planeten nach KEPLER'S Gesetzen;  $a$  markiert die große Halbachse der Ellipse.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \propto \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

$\propto$  bedeutet:  
proportional zu  
(oft auch:  $\sim$ )

Der Abstand zwischen Erde und Sonne schwankt im Jahresverlauf ( $T = 365,26$  Tage) zwischen 147,1 Mio. km und 152,1 Mio. km.

Die große Halbachse der Bahnellipse ist damit 149,6 Mio. km und wird als eine **Astronomische Einheit (AE)** definiert.

Der Mars benötigt für einen Sonnenumlauf 686,98 Tage. Sein Sonnenabstand entspricht einer Halbachse von 1,524 AE. Das 3. KEPLER'sche Gesetz wird damit bestätigt:

$$\left(\frac{686,98}{365,26}\right)^2 \approx \left(\frac{1,524}{1}\right)^3 \approx 3,54$$

**Erde und  
Mars**

## NEWTONS Gravitationsgesetz

NEWTON suchte nach einer weitergehenden Erklärung für die von KEPLER beschriebenen Planetenbewegungen. Er fand einen Zusammenhang mit den Massen der Himmelskörper und nahm eine zwischen den Körpern wirkende Kraft an, die mit zunehmender Entfernung  $r$  schwächer wird.

Gravitationsgesetz 
$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ mit } G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

HENRY CAVENDISH  
1731–1810

Der Wert der **universellen Gravitationskonstanten**  $G$  wurde erst viel später, im Jahr 1798, von HENRY CAVENDISH gemessen.

„Träge“ und  
„schwere“  
Masse

In NEWTONS Aktionsprinzip (→ Seite 8) wird die „träge“ Masse als Proportionalitätsfaktor zwischen Beschleunigung und Kraft eingeführt. Im Gegensatz hierzu steht die Definition der Masse als Ursache der Gravitation („schwere“ Masse). Beide sind gleich groß, doch dauerte es lange, um dies zu beweisen. Heute kennt man die Übereinstimmung mit einer Genauigkeit von  $10^{-10}$  (1:10 Mrd.).

## Gravitationsfeld der Erde

Das globale **Gravitationsfeld** der Erde wird durch das NEWTON'sche **Gravitationsgesetz** beschrieben. Solange der Abstand zum Erdmittelpunkt wesentlich größer als der Erdradius ist, kann die Erde als punktförmig angenommen werden (**Astronomische Näherung**). Um die Gravitationswirkung der Erde in der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche auf eine im Verhältnis kleine Masse  $m$  zu beschreiben, wird die **Schwerebeschleunigung** (**Gravitationsbeschleunigung**)  $g$  verwendet. Die Gewichtskraft  $F_G$  vereinfacht sich damit zu

Gewichtskraft 
$$F_G = m \cdot g.$$

Die Schwerebeschleunigung  $g$  ist stets zum Erdmittelpunkt gerichtet. Ein annähernder Wert von  $g$  lässt sich aus NEWTONS Gravitationsgesetz ermitteln:

$$F_G = m \cdot G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(r_{\text{Erde}} + h)^2} =: m \cdot g(h) \Rightarrow g(h) = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(r_{\text{Erde}} + h)^2}$$

Bei Einsetzen der entsprechenden Werte ergibt sich *rechnerisch* die Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche ( $h = 0$ ;  $r_{\text{Erde}} = 6368 \text{ km}$ ):

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,368 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9,826 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dieser Wert weicht von der tatsächlich gemessenen Schwerebeschleunigung geringfügig ab, da weder die Abplattung der Erde noch die von der Erdrotation verursachte **Zentrifugalkraft** (→ Seite 28) berücksichtigt werden. Letztere führt zu einer Abnahme der Schwerebeschleunigung von  $9,83 \text{ m/s}^2$  am Pol auf  $9,78 \text{ m/s}^2$  am Äquator.

Selbst innerhalb von Deutschland ist dieser Effekt deutlich messbar, wie ein Vergleich der gemessenen Schwerebeschleunigung in Hamburg ( $9,8137 \text{ m/s}^2$ ) und München ( $9,8074 \text{ m/s}^2$ ) zeigt.

Die beste Näherung zur Berechnung der Schwerebeschleunigung  $g$  in Abhängigkeit vom Breitengrad  $\varphi$  und der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel wird von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) angegeben als:

$$g(h, \varphi) = 9,780\,327 \cdot [1 + 0,005\,3024 \cdot \sin^2(\varphi) - 0,000\,0058 \cdot \sin^2(2\varphi)] - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

mit  $g$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  und  $h$  in m.

Die Schwerebeschleunigung  $g$  nimmt, durch die von der Erdrotation hervorgerufene Fliehkraft, von den Polen zum Äquator von  $9,83 \text{ m/s}^2$  auf  $9,78 \text{ m/s}^2$  ab.

Für Deutschland gilt ein mittlerer Wert von  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

**Tipp:** Auch die ungleichmäßige Verteilung der Masse im Innern der Erde führt zu einer als **Schwereanomalie** bezeichneten lokalen Schwankung von  $g$  in der Größenordnung von  $\Delta g/g \approx 10^{-4}$ .

### Schwerebeschleunigung

potentielle Energie:  
 $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$   
 (→ Seite 11)

Viele Haushalte verfügen über eine Parabolantenne, mit der Fernsehübertragungen von einem Satelliten empfangen werden. Dieser befindet sich auf einer geostationären Umlaufbahn, d. h. er steht scheinbar über einem festen Punkt am Äquator. Auf einer solchen Umlaufbahn entspricht die Gravitationskraft genau der erforderlichen Zentripetalkraft (→ Seite 28):  $F_g = F_z$ . Wir wollen die Höhe des Satelliten über der Erde bestimmen, so dass seine Umlaufzeit genau 24 Stunden beträgt.

$$\text{Gravitationsgesetz: } F_G = G \cdot \frac{m_{\text{sat}} \cdot m_{\text{Erde}}}{r^2}$$

$$\text{Zentripetalkraft: } F_Z = m_{\text{sat}} \cdot r \cdot \omega^2$$

$$m_{\text{sat}} \cdot G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{r^2} = m_{\text{sat}} \cdot r \cdot \omega^2 \quad \text{mit } r = r_{\text{Erde}} + h$$

$$r^3 = \frac{G \cdot m_{\text{Erde}}}{\omega^2}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit } T = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$$

$$h = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{G \cdot m_{\text{Erde}}} - r_{\text{Erde}}$$

Mit den bekannten Werten  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ ,  $m_{\text{Erde}} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;

$r_{\text{Erde}} = 6,368 \cdot 10^6 \text{ m}$  folgt für die Höhe der geostationären Umlaufbahn über der Erdoberfläche:

$$h = 35\,868 \text{ km}$$

### Geostationäre Umlaufbahn

## Der schiefe Wurf

Als **schiefer Wurf** wird die Bewegung einer Masse  $m$  im Gravitationsfeld der Erde bezeichnet, die unter einem Startwinkel  $\varphi$  mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  startet:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

In  $y$ -Richtung ist sie der konstanten Erdbeschleunigung ausgesetzt, während im Idealfall keine weitere **Beschleunigung** in  $x$ -Richtung auftritt (der Luftwiderstand wird hier nicht berücksichtigt: Vakuum oder sehr kleine Reibung).

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Die Bahnkurve folgt unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen auf  $\rightarrow$  Seite 7.

### Wurfweite (x-Richtung) zum Zeitpunkt $t$

Gleichförmige Bewegung:

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi$$

### Wurfhöhe (y-Richtung) zum Zeitpunkt $t$

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2$$

Die vertikale Position der Masse zum Zeitpunkt  $t$  ist

$$r_y(t) = r_{0,y} + y(t).$$

### Wurfparabel

Wird die Wurfweite nach  $t$  aufgelöst und in die Wurfhöhe eingesetzt, erhält man die sogenannte Wurfparabel:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \varphi}$$

$$\Rightarrow y(x) = \tan(\varphi) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot x^2$$

Anstelle der hier verwendeten Winkel-funktionen können auch direkt die Geschwindigkeitskomponenten zum Startzeitpunkt eingesetzt werden.

Daraus ergibt sich:

$$y(x) = r_{0,y} + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_{0,x}^2} \cdot x^2$$

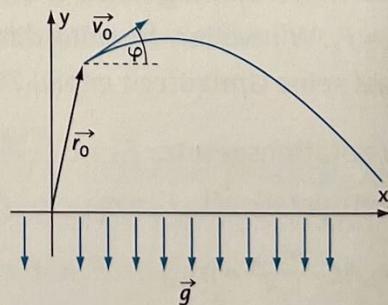


Abb. 1.3: Wurfparabel

## 1.8 Rotation in der Ebene

### Bewegungsgleichungen

Drehbewegungen werden am Einfachsten in einem polaren Koordinatensystem beschrieben, dessen Ursprung auf der Drehachse liegt. Die Position wird dann durch den Abstand  $r$  von der Drehachse und den **Drehwinkel**  $\varphi$  angegeben. Verändert sich der Winkel mit der Zeit, so hat er eine **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega$ . Ist diese ebenfalls veränderlich, dann nennt man dies die **Winkel- oder Drehbeschleunigung**.

- $\varphi$ : Drehwinkel
- $\dot{\varphi} = \omega$ : Winkelgeschwindigkeit
- $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ : Winkelbeschleunigung

Wird eine Kreisbewegung auf eine der kartesischen Achsen projiziert, so wird aus der gleichmäßigen Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eine harmonische Schwingung ( $\rightarrow$  Seite 73 ff.) mit der **Kreisfrequenz**  $\omega$ .

Im Gegensatz zu den Ingenieurwissenschaften ist es in der Physik und Mathematik üblich, Winkel in der natürlichen Einheit **Radian** anzugeben, da sich die Berechnung von Integralen, die trigonometrische Funktionen enthalten, hierdurch wesentlich vereinfacht. Ein Vollkreis von  $360^\circ$  entspricht hier dem Wert  $2\pi$  und die Länge eines Kreisbogens  $r \cdot \varphi_{\text{RAD}}$ .

Grad- und Bogenmaß

$$\varphi_{\text{DEG}} = \varphi_{\text{RAD}} \cdot \left( \frac{360^\circ}{2\pi} \right)$$

Bei der Verwendung von trigonometrischen Funktionen muss der Taschenrechner auf den richtigen Modus eingestellt werden:

DEG = Grad (engl. *degree*), RAD = Bogenmaß (engl. *radian*).

In Analogie zur Translation ergeben sich folgenden Bewegungsgleichungen für die Rotation:

Bewegungsgleichungen

**Gleichförmige Rotation:**  $\dot{\omega} = 0; \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$

**Gleichmäßig beschleunigte Rotation:**  $\dot{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2$$

## Vom Hebelgesetz zum Drehmoment

Mittels eines Hebels kann eine geringe Kraft in eine große Kraft umgewandelt werden – sie muss jedoch über eine lange Strecke wirken, um die hohe Kraft nur über ein kurzes Stück aufzubringen. Nach dem **Hebelgesetz** ist das Produkt aus tangentialer Kraft und radialem Hebelarm für jeden Punkt auf dem Hebel gleich:

Hebelgesetz  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

Zur Erklärung betrachten wir die **Arbeit** (= Kraft mal Weg), die bei einer Drehung um den Winkel  $\varphi$  verrichtet wird. Wir erhalten:

$$W_1 = F_1 \cdot s_1 = F_1 \cdot (l_1 \cdot \varphi_{\text{RAD}}) = F_2 \cdot (l_2 \cdot \varphi_{\text{RAD}}) = F_2 \cdot s_2 = W_2.$$

Auf beiden Seiten des Hebels wird die gleiche Arbeit verrichtet: Mit einem Hebel lässt sich also keine Energie gewinnen. Ähnlich wie bei einem Seilzug können wir jedoch kleine Kräfte über einen langen Weg in hohe Kräfte über einen kurzen Weg transformieren. Ausschlaggebend ist nicht die Form des Hebels, sondern der radiale Abstand der Kräfte vom Drehpunkt – bei allen drei in Abb. 1.4 gezeigten Fällen sind die Hebelarme im Gleichgewicht.

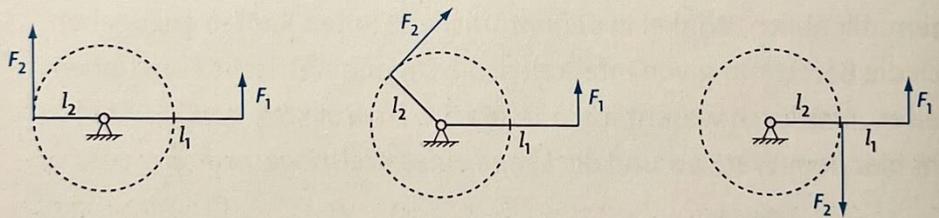


Abb. 1.4: Drei Fälle des Kräftegleichgewichts am Hebelarm

Das im Hebelgesetz beschriebene Produkt aus einer tangential wirkenden Kraft  $F$  und ihrem radialen Abstand  $r$  zur Drehachse nennt man auch das **Drehmoment**  $M$ . In der Ebene lautet die verallgemeinerte Definition des Drehmoments:

Drehmoment  $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$  mit Winkel  $\alpha$  zwischen  $r$  und  $F$ .

Im Raum wird das Drehmoment durch ein Vektorprodukt (Kreuzprodukt) beschrieben ( $\rightarrow$  „1.9 Rotation in vektorieller Darstellung“ auf Seite 24).

Das Hebelgesetz veranschaulicht die Wirkung eines Drehmoments auf einen Körper: Der Körper verharrt in Ruhe, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Drehmomente null ist. Existiert hingegen ein effektives Drehmoment (Summe ungleich null), so wird der Körper in Rotation versetzt. Bei der Rotation spielt das Drehmoment eine äquivalente Rolle zur Kraft bei der Translation  $\rightarrow$  Seite 8 und Seite 23).

## Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Bei einer Translationsbewegung beträgt die kinetische Energie  $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ . Betrachten wir nun einen Körper der Masse  $m$ , der um seinen Schwerpunkt rotiert. Um seine kinetische Energie auszurechnen, müssen wir die Geschwindigkeit  $v_i$  jedes einzelnen Massepunktes  $m_i$  berechnen und anschließend die kinetische Energie der einzelnen Punkte aufaddieren:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Da sich die Punkte auf einer Kreisbahn um die Rotationsachse bewegen, beträgt ihre Geschwindigkeit  $v_i = r_i \dot{\varphi}_{\text{RAD}} = r_i \omega$ . Somit folgt:

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{=J} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Rotationsenergie

Die hier mit  $J$  bezeichnete Summe wird als **Trägheitsmoment** bezeichnet. Bei der Rotation spielt sie eine äquivalente Rolle zur Masse bei der Translation.

→ Seite 8 und Seite 23)

Das Trägheitsmoment hängt von der Lage der Rotationsachse ab.

Bei der Berechnung gibt  $r_i$  den radialen Abstand des Massepunktes  $m_i$  zur Rotationsachse an.

**Vorsicht:**  
Falle

Das Trägheitsmoment muss für jeden Körper durch Integration über sein Volumen unter Berücksichtigung seiner Dichteverteilung errechnet werden. Für viele homogene geometrische Körper können jedoch Berechnungsformeln in Tabellen nachgeschlagen werden. Normalerweise beziehen sie sich auf eine durch den Schwerpunkt verlaufende Rotationsachse und werden deshalb mit  $J_S$  bezeichnet.

Zylindermantel	massiver Zylinder	Hohlkugel	massive Kugel
$J_S = m r^2$	$J_S = \frac{1}{2} m r^2$	$J_S = \frac{2}{3} m r^2$	$J_S = \frac{2}{5} m r^2$

Tab. 1.1: Trägheitsmomente einiger geometrischer Grundfiguren mit Radius  $r$  bezogen auf eine Rotation um ihre Symmetrieachse.

Soll die Rotationsachse aus dem Schwerpunkt verschoben werden, dann findet eine Umrechnung von  $J_S$  in das Trägheitsmoment  $J$  nach dem **Satz von STEINER** (nächste Seite) statt.

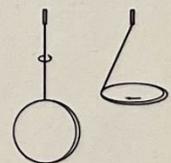


Abb. 1.5: Einseitig aufgehängter Kreisel

Hängt ein Kreisel an einem Band, das durch einen Motor gedreht wird, so rotiert er nach einiger Zeit um seine Achse mit dem größten Trägheitsmoment, da dies die Rotationsenergie maximiert (→ Abb. 1.5):

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

**Beispiel**

### Satz von STEINER

Ist das Trägheitsmoment  $J_S$  bezüglich einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Achse bekannt, so ermöglicht es der **Satz von STEINER**, die Rotationsachse in jeden beliebigen Abstand  $l_S$  vom Schwerpunkt zu legen:

JAKOB STEINER  
1796–1863

Satz von STEINER

$$J = J_S + m \cdot l_S^2$$

Zur Herleitung betrachten wir das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment  $J_S$  wieder in Form der Summierung diskreter Massenelemente:

$$J_S = \sum_i (m_i \cdot r_i^2)$$

Zu dem auf den Schwerpunkt bezogenen Ortsvektor  $\vec{r}_i$  wird der Abstandsvektor  $\vec{l}_S$  zur neuen Rotationsachse addiert.

$$\begin{aligned} J &= \sum_i (m_i \cdot (\vec{r}_i + \vec{l}_S)^2) = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i^2 + 2 \cdot \vec{r}_i \cdot \vec{l}_S + \vec{l}_S^2) \\ &= \sum_i (m_i \cdot r_i^2) + \sum_i (m_i \cdot \vec{r}_i) \cdot 2 \cdot \vec{l}_S + \sum_i m_i \cdot l_S^2 \end{aligned}$$

Da  $J_S$  auf den Schwerpunkt bezogen ist, wird die Summe über  $m_i \cdot r_i$  zu Null und es folgt der STEINER'sche Satz:

$$J = \sum_i (m_i \cdot r_i^2) + m \cdot l_S^2 = J_S + m \cdot l_S^2$$

### Der Drehimpuls

Betrachten wir einen mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Körper, so bewegt sich jedes Masselement mit einer konstanten Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit Radius  $r_i$ . Der **Impuls**  $p_i$  dieses Masselements hat dabei stets den gleichen Betrag, die Richtung des Impulsvektors ändert sich hingegen kontinuierlich. Wir definieren daher einen Drehimpulsvektor  $\vec{L}$ , der in Richtung der Drehachse zeigt:

$$\text{Drehimpuls} \quad L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J \cdot \omega$$

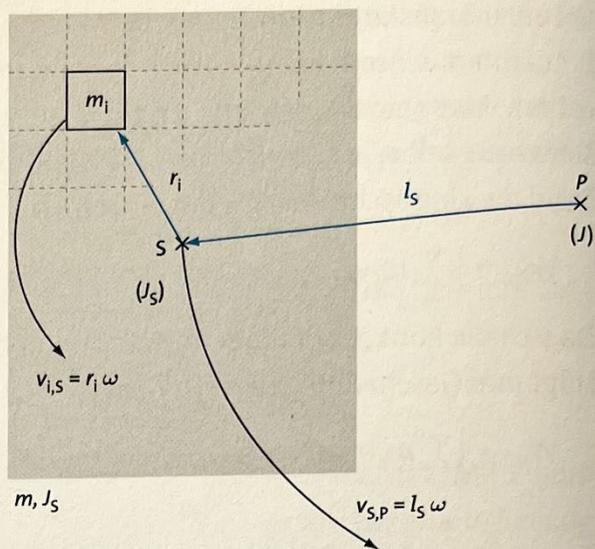


Abb. 1.6: Verschiebung des Trägheitsmoments aus dem Schwerpunkt S zu einem beliebigen Punkt P: Aus  $J_S$  wird  $J$ .

Bei Translationsbewegungen ist der Impuls eine **Erhaltungsgröße**, er ändert sich nur, wenn äußere Kräfte im Spiel sind:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \quad (\text{NEWTON})$$

Für die Rotation gilt analog der Drehimpulserhaltungssatz:

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\sum_i r_i p_i = \sum_i r_i \frac{d}{dt}p_i = \sum_i r_i F_i = M$$

Der **Drehimpuls** ändert sich nur, wenn ein äußeres **Drehmoment** auf den Körper einwirkt.

**Drehimpuls-  
erhaltungssatz**

Folglich ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Auch in diesem Fall handelt es sich wie beim Drehmoment um eine vektorielle Größe (→ Seite 24).

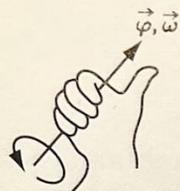
## Rotation und Translation im Vergleich

Bei vielen Eigenschaften der Rotation haben wir auf Analogien bei der Translation hingewiesen. In → Tab. 1.2 werden diese Gemeinsamkeiten nochmals zusammengefasst.

Translation	Rotation
Ort: $x$	Winkel: $\varphi_{\text{RAD}}$
Geschwindigkeit $v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse $m = \sum_i m_i$	Trägheitsmoment $J = \sum_i m_i r_i^2$
Impuls $p = m \cdot v = m \cdot \dot{x}$	Drehimpuls $L = J \cdot \omega = J \cdot \dot{\varphi}$
Kraft $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = \dot{p}$	Drehmoment $M = J \cdot \dot{\omega} = J \cdot \ddot{\varphi} = \dot{L}$
kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$	Rotationsenergie $W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{L^2}{2J}$
gleichförmige Bewegung $\vec{a}(t) = 0$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$	gleichförmige Rotation $\dot{\omega} = 0$ $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$
gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \vec{v}_0$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t$ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 \cdot t^2$	gleichmäßig beschleunigte Rotation $\dot{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2$

Tab. 1.2: Translation und Rotation im Vergleich

## 1.9 Rotation in vektorieller Darstellung



Drehrichtung

Abb. 1.7: Rechte-  
Hand-Regel  
Rotation

### Die Drehachse als Vektor

Bei dreidimensionalen Berechnungen ist es üblich, für den **Drehwinkel** und die **Winkelgeschwindigkeit** Vektoren in Richtung der Rotationsachse zu verwenden. Die Orientierung ergibt sich aus der „**Rechte-Hand-Regel**“ (→ Abb. 1.7).

### Das Drehmoment ist ein Vektorprodukt

Wirken Kräfte auf dreidimensionale Körper, so wird das **Drehmoment** durch ein Vektorprodukt (Kreuzprodukt, → Anhang Seite 248) berechnet:

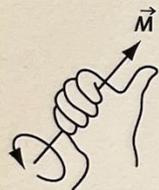
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Zur Verdeutlichung betrachten wir den Spezialfall von zwei gleich großen entgegengesetzten Kräften  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , mit den Angriffspunkten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  im Abstand  $\vec{r}$  zueinander:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

Die Orientierung des Drehmoments ergibt sich wiederum aus der „**Rechte-Hand-Regel**“ (→ Abb. 1.8).

Drehmoment



Drehrichtung

Abb. 1.8: Rechte-  
Hand-Regel  
Drehmoment

### Der Drehimpuls als Vektor

Analog zum Drehmoment wird der **Drehimpuls** als Vektorprodukt (Kreuzprodukt, → Anhang Seite 248) definiert:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = J_M \vec{\omega}$$

In der vektoriellen Darstellung wird aus dem Trägheitsmoment  $J$  die Matrix  $J_M$ , (→ „Zusatzwissen“ auf Seite 25 und „Die Trägheitsmatrix“ auf Seite 26)

Den Drehimpulserhaltungssatz weisen wir wiederum durch Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit nach:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i \right)$$

Der erste Summand verschwindet:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i (\vec{v}_i \times \vec{v}_i) = 0$$

Beim zweiten Summanden erinnern wir uns an NEWTON  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$  und erhalten:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}$$

Der Drehimpuls  $\vec{L}$  ändert sich also nur, wenn ein äußeres Drehmoment  $\vec{M}$  vorhanden ist.

Drehimpuls-  
erhaltungssatz

### Präzession eines Kreisels

Bei einem normalen Kinderkreisel, der auf seiner Spitze rotiert, bewirkt die **Gravitation** ein Drehmoment. Entsprechend der Definition des Drehmoments als Vektorprodukt verläuft der Drehmomentvektor horizontal, und zwar senkrecht zum Drehimpuls. Die hieraus resultierende Drehimpulsänderung  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  führt damit zu einer Richtungsänderung von  $\vec{L}$ . Der Drehimpulsvektor rotiert dadurch um die Spitze des Kreisels, was als **Präzession** bezeichnet wird.

Die Präzessionsfrequenz lässt sich für dieses

Beispiel einfach herleiten: Bei einem Neigungswinkel  $\alpha$  des Drehimpulses gegenüber der Vertikalen beschreibt die Spitze des Drehimpulsvektors einen Kreis mit dem Radius  $R = L \cdot \sin \alpha$ .

Eine tangentielle Änderung des Drehimpulses um  $\Delta L$  entspricht daher einem Winkel  $\Delta \varphi = \Delta L / R$ . Aus  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  folgt nun:

$$\Delta L = M \cdot \Delta t$$

Damit erhalten wir als Präzessionsfrequenz:

$$\omega_{\text{Präzession}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{R \cdot \Delta t} = \frac{M \cdot \Delta t}{R \cdot \Delta t} = \frac{M}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{M}{J \omega \cdot \sin \alpha}$$

Berücksichtigen wir nun noch das durch die Gravitation verursachte Drehmoment, so folgt:

$$M_{\text{Gravitation}} = \vec{r}_S \times \vec{F}_{\text{Gravitation}} = r_S \cdot (m \cdot g) \cdot \sin \alpha \Rightarrow \omega_{\text{Präzession}} = \frac{m \cdot g \cdot r_S}{J \omega}$$

Dabei bezeichnet  $r_S$  den Abstand des Schwerpunkts von der Spitze des Kreisels.

### Zusatzwissen

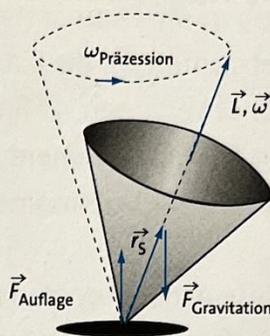


Abb. 1.9: Bei einem Kinderkreisel verursacht die Gravitation eine Präzessionsbewegung

### Vom Drehimpuls zur Trägheitsmatrix (kompliziert)

Die Geschwindigkeit der einzelnen Masselemente können wir ebenso wie den Drehimpuls als Vektorprodukt definieren:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Setzen wir dieses Ergebnis in die Definition des Drehimpulses ein, so ergibt sich ein doppeltes Vektorprodukt, das wir im nächsten Rechenschritt weiter umformen (keine Schulmathematik!):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i) =: J_M \vec{\omega} \end{aligned}$$

Stehen  $\vec{r}_i$  und  $\vec{\omega}$  senkrecht aufeinander, wie es z. B. bei einer rotierenden Scheibe der Fall ist, so erhalten wir die bekannte Form  $\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega}$ . Im allgemeinen Fall wird die Summe, die wir als  $J_M$  zusammengefasst haben, zu einer Matrix.

### Zusatzwissen

## Die Trägheitsmatrix

Betrachten wir die Rotationsachsen eines Körpers, die durch dessen Schwerpunkt verlaufen, so finden wir in jedem Fall eine Achse mit einem maximalen Trägheitsmoment, eine dazu senkrecht stehende Achse mit einem minimalen Trägheitsmoment sowie eine zu beiden senkrechte dritte Achse.

Diese Achsen werden als die **Hauptträgheitsachsen** des Körpers bezeichnet. Die dazugehörigen Trägheitsmomente nennt man **Hauptträgheitsmomente**. Bei symmetrischen Körpern fallen die Hauptträgheitsachsen mit den Symmetrieachsen des Körpers zusammen.

Bei komplizierteren Geometrien bedient man sich der **Hauptachsentransformation**, um die Hauptträgheitsachsen mit den dazugehörigen Trägheitsmomenten zu berechnen.

### Zusatzwissen

#### Allgemeiner Kreisel

Kennen wir die Hauptträgheitsachsen des Körpers nicht, so können wir die Trägheitsmatrix durch Summation über die Massenelemente  $m_i$  für ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem berechnen, wobei wir den Ursprung weiterhin in den Schwerpunkt des Körpers legen:

$$J_M = \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -x_i z_i \\ -y_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

#### Fall 1: Rotation um eine Hauptträgheitsachse

Wählen wir die vom Rotationskörper vorgegebenen Hauptträgheitsachsen als Koordinatensystem, so hat die Trägheitsmatrix die Form

$$J_M = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

Dabei entsprechen  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  den drei Hauptträgheitsmomenten. Für eine Rotation um eine der drei als Koordinatenachsen gewählten Hauptträgheitsachsen erhalten wir die aus der Rotation in der Ebene (→ Seite 19 ff.) bekannten Beziehungen, wie man an folgendem Beispiel sieht:

$$\vec{L} = J_M \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = J_1 \omega$$

Analog:

$$\vec{M} = J_M \cdot \dot{\vec{\omega}} \Rightarrow M = J_1 \dot{\omega}$$

**Fall 2: Rotation um eine beliebige Achse**

Wir wählen das Koordinatensystem wie in Fall 1 und betrachten eine zu den Hauptträgheitsachsen geneigte Drehachse:

$$\vec{L} = J_M \cdot \vec{\omega} \quad \text{und} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \omega_1 \\ J_2 \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sind die Trägheitsmomente  $J_1$  und  $J_2$  verschieden, so weist  $\vec{L}$  in eine andere Richtung als  $\vec{\omega}$ ! Als Resultat beobachten wir zwei Drehungen: Zum einen rotiert der Kreisel mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  um seine Symmetrieachse  $x_1$ , zum anderen umkreist diese Achse den ortsfesten Drehimpulsvektor. Dieses Verhalten wird als **Nutation** bezeichnet und sollte nicht mit der durch ein äußeres **Drehmoment** ausgelösten **Präzession** verwechselt werden  $\rightarrow$  Abb. 1.10.

Abb. 1.11 zeigt, wie sich die momentane Drehachse und der raumfeste Drehimpuls in eine Rotation um die Figurenachse und die dazu senkrecht verlaufende Achse mit dem kleinsten Drehmoment aufteilen lassen. Für den Öffnungswinkel  $\alpha$  des Nutationskegels folgt aus der Abbildung die Beziehung:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{J_2 \omega_2}{J_1 \omega_1}$$

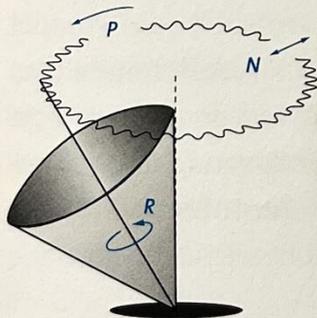


Abb. 1.10: Präzession und Nutation bei einem Kreisel. R: Rotation um die Figurenachse, P: Präzessions-, N Nutationsbewegung der Figurenachse.

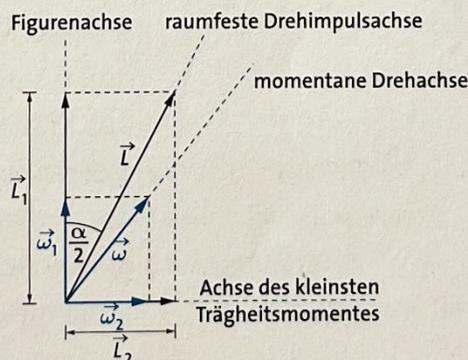


Abb. 1.11: Projektion der raumfesten Drehimpulsachse und der momentanen Drehachse auf die Hauptträgheitsachsen (Symmetrieachsen) des Kreisels. Hinweis:  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{L}_1$  und  $\vec{L}_2$  liegen alle in einer Ebene.

Drehmoment:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Drehimpuls:  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = J_M \vec{\omega} = J_M \dot{\varphi}$

$$J_M = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -x_i z_i \\ -y_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

Durch eine Hauptachsentransformation ergeben sich aus der allgemeinen Trägheitsmatrix die Hauptträgheitsachsen und die dazugehörigen Trägheitsmomente.

Rotation

## 1.10 Kräfte im rotierenden System

### Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Körper, auf die keine äußeren Kräfte wirken, bewegen sich in **Inertialsystemen** (→ Seite 143) gradlinig. Gemäß NEWTONS Axiom „Actio gleich Reactio“ (→ Seite 8) wird eine Kraft benötigt, um einen Körper auf eine Kreisbahn zu zwingen.

#### Wissen

Kreisbahn:  $\vec{r}(t) = r \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$

Bahngeschwindigkeit:  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \omega \cdot r \cdot (\cos \omega t, -\sin \omega t)$

Zentripetalbeschleunigung:  $\vec{a}_Z(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\omega^2 \cdot r \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$   
 $= -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$

Zentripetalkraft:  $\vec{F}_Z = m \cdot \vec{a}_Z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}(t)$  bzw.

$$F_Z = m \cdot \vec{a}_Z = -m \cdot \omega^2 \cdot r = -\frac{m \cdot v^2}{r} \text{ mit } v = \omega \cdot r$$

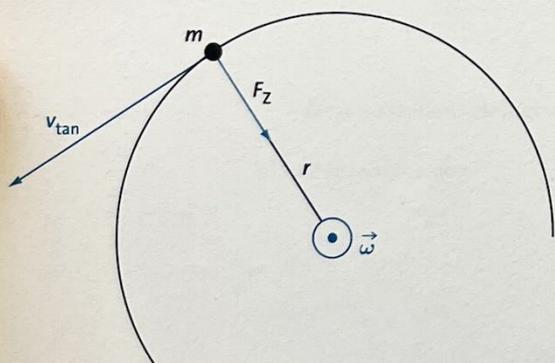


Abb. 1.12: Zentripetalkraft im rotierenden Bezugssystem

Die **Zentripetalkraft**  $F_Z$  ist stets zum Mittelpunkt der Kreisbewegung gerichtet und wirkt somit immer im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung. Daher wird durch sie auch keine Arbeit verrichtet (das Produkt aus Kraft und Weg ist stets Null). Vom rotierenden System aus betrachtet, wirkt auf den Körper eine durch die Massenträgheit hervorgerufene nach außen gerichtete Kraft, die als **Zentrifugalkraft** oder umgangssprachlich **Fliehkraft** bezeichnet wird.

**Trägheitskraft** Solche Kräfte, für die das Axiom „Actio gleich Reactio“ nicht gilt, treten in allen beschleunigten Bezugssystemen auf und werden ganz allgemein als **Trägheitskräfte** bezeichnet.

### CORIOLIS-Effekt

GASPARD GUSTAVE  
DE CORIOLIS  
1792–1843

Bewegt sich ein Körper vom Zentrum eines rotierenden Bezugssystems kräftefrei nach außen, so beobachtet man von einem Inertialsystem aus eine gradlinige Bewegung (Massenträgheit). Vom rotierenden System aus gesehen beschreibt der Körper hingegen eine Kurve, da sich das Bezugssystem während dieser Zeit dreht. Die Herleitung erfolgt analog zur Berechnung der Zentripetalkraft wobei sich nun auch der radiale Abstand  $r$  ändert.

Kreisbahn:  $\vec{r}(t) = r(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$

Geschwindigkeit:  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$   
 $= \dot{r}(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t) + \omega \cdot r(t) \cdot (\cos \omega t, -\sin \omega t)$

Beschleunigung:  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{r}(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$  (radial)  
 $+ 2\omega \cdot \dot{r}(t) \cdot (\cos \omega t, -\sin \omega t)$  (tangential)  
 $- \omega^2 \cdot r(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$  (radial)

Wissen

Ein entlang einer Linie schwingendes Pendel behält aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes ( $\rightarrow$  Seite 24) grundsätzlich seine Schwingungsrichtung bei. Im Jahr 1851 demonstrierte J. B. L. FOUCAULT der Öffentlichkeit anhand dieses Effektes, dass sich die Erde unter dem Pendel dreht:

Bei jeder Schwingung zeichnete ein 28 kg schweres Gewicht an einem Seil von 67 m Länge eine Spur in ein Sandbett. Aus vielen stets leicht gegeneinander verdrehten Spuren ergab sich schließlich, nach knapp 32 Stunden, eine geschlossene Rosette: Die Zeit  $D$  für einen Umlauf beträgt nur an den Polen 24 h. An allen anderen Orten führt nur die Projektion der Erdrotation auf die Richtung der Gravitationswirkung zu einer Drehung des Pendels. Die Zeit für einen Umlauf ergibt sich daher aus der Dauer eines Sterntags und dem Breitengrad  $\varphi$ :  $D = 23,93 \text{ h} / \sin \varphi$ .

### FOUCAULT'sches Pendel

JEAN BERNARD  
LÉON FOUCAULT  
1819–1868

### Trägheitskräfte in 3D

Wird die oben beschriebene Herleitung mit dreidimensionalen Vektoren durchgeführt, so erhält man folgendes allgemein gültiges Ergebnis, wobei sich die Größen mit dem Strich auf das rotierende Koordinatensystem beziehen:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

Berücksichtigt man nun, dass die die Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  denselben Ort bezeichnen, so folgt für die Kräfte aus Sicht des rotierenden Koordinatensystems:

$$F' = m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

$\underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}}$      $\underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Trägheitskräfte}}$      $\underbrace{- m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{\text{Eulerkraft}}$   
 „Echte“ Kraft

Zusatzwissen

## Überblick

- ⊙ **NEWTONS Axiome** beschreiben den Zusammenhang zwischen Ort  $r$ , Geschwindigkeit  $v$ , Beschleunigung  $a$  und Kraft  $F$  in Inertialsystemen:

Impuls:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} = m \cdot \dot{\vec{r}}$

Impulserhaltung:  $\frac{d}{dt} \vec{p} = m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

Gleichgewicht der Kräfte:  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

Trägheitssatz:  $\Sigma \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{konstant}$

- ⊙ Darüberhinaus beschäftigt sich die klassische Mechanik mit **Energie**:

Arbeit:  $W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$  mit Skalarprodukt  $\vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$

Leistung:  $P(t) = \frac{d}{dt} W \Leftrightarrow W = \int P(t) dt$

Potentielle Energie:  $W_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} F(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$

Kinetische Energie:  $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$  mit  $p = m \cdot v$

- ⊙ **NEWTONS Gravitationsgesetz** beschreibt die Anziehung zwischen Massen:

Gravitationsgesetz:  $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$  mit  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Gewichtskraft:  $F_G = m \cdot g$  mit  $g(h) = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(r_{\text{Erde}} + h)^2} \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

für Deutschland

- ⊙ Die Gleichungen der **Rotation** zeigen viele Analogien zur Translation. Es müssen jedoch zusätzliche **Trägheitskräfte** berücksichtigt werden.

Rotationsgeschwindigkeit:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  bzw.  $v = \omega \cdot r$

mit  $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$  bzw.  $\omega = \dot{\varphi}$

Drehmoment:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  bzw.

$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$  mit Winkel  $\alpha$  zwischen  $r$  und  $F$

Hebelgesetz:  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$  (Gleichgewicht der Drehmomente)

Rotationsenergie  $W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{J} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$  mit Trägheitsmoment  $J$

Satz von STEINER  $J = J_S + m \cdot l_S^2$

Drehimpuls  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = J_M \vec{\omega}$  bzw.

$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J \cdot \omega$

Drehimpulserhaltung:  $\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}$  bzw.  $\frac{d}{dt} L = \sum_i r_i F_i = M$

Zentripetalbeschleunigung:  $\vec{a}_Z(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$

Zentripetalkraft:  $\vec{F}_Z = m \cdot \vec{a}_Z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}(t)$  bzw.

$F_Z = m \cdot a_Z = -m \cdot \omega^2 \cdot r = -\frac{m \cdot v^2}{r}$

CORIOLIS-Beschleunigung:  $\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  bzw.  $a_C = 2\omega \cdot \dot{r}$

→ Tab. 1.2 auf Seite 23

# Elektrisches und magnetisches Feld

## 2

*Elektrische und magnetische Felder sind physikalisch eng miteinander verbunden:*

- ⊙ *Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.*
- ⊙ *Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.*
- ⊙ *Bewegte Ladungen generieren Magnetfelder und treten ihrerseits mit ihnen in Wechselwirkung. Der Magnetismus wird daher als Teilgebiet der Elektrizitätslehre betrachtet.*

Zeichnerisch werden Felder durch **Feldlinien** dargestellt, welche die Richtung der Feldkräfte anzeigen. Folglich können sich Feldlinien niemals kreuzen. Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke (→ Seite 35 und Seite 48) und damit ein Maß für die Stärke der Kraft.

Verlaufen die Feldlinien senkrecht zur Zeichenebene, so verwendet man die Symbole ⊙ (Pfeilspitze) für solche, die aus der Zeichenebene herauskommen, und ⊗ (Pfeilende) für solche, die hineingehen.

In einem **homogenen Feld** verlaufen die Feldlinien parallel, sodass die Feldstärke überall gleich groß ist. Ein **radiales Feld** zeigt sternförmig von einem Punkt ausgehende radial nach außen, die Feldlinien sind somit **divergent**.

## 2.1 Elektrostatistisches Feld

### Grundlegende Begriffe

Es gibt positive und negative elektrische Ladungen, jeweils mit einem ganzzahligen Vielfachen der **Elementarladung**  $e$  des Elektrons (MILLIKAN-Versuch, → Seite 42). Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Der Raum, in dem diese Kräfte wirken, heißt **elektrisches Feld**. Die physikalische Einheit für die elektrische Ladung ist das Coulomb, es entspricht der Ladungsmenge, die bei einer Stromstärke von einem Ampere innerhalb von einer Sekunde durch einen Leiter fließt:

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} = 1 \text{ Amperesekunde}$$

Bei einer Elementarladung von  $e = 1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  entspricht dies

$$\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 6 \cdot 10^{18} \text{ Elektronen.}$$

CHARLES AUGUSTIN  
DE COULOMB  
1736–1806  
ANDRÉ-MARIE AMPÈRE  
1775–1836

Coulomb

### Elektroskop, Elektrometer

Bei einem **Elektroskop** bzw. **Elektrometer** führt die Abstoßung gleichartiger Ladungen zu einem Ausschlag des Zeigers. Die Ladung kann entweder auf das Gerät übertragen oder per Influenz erzeugt werden.

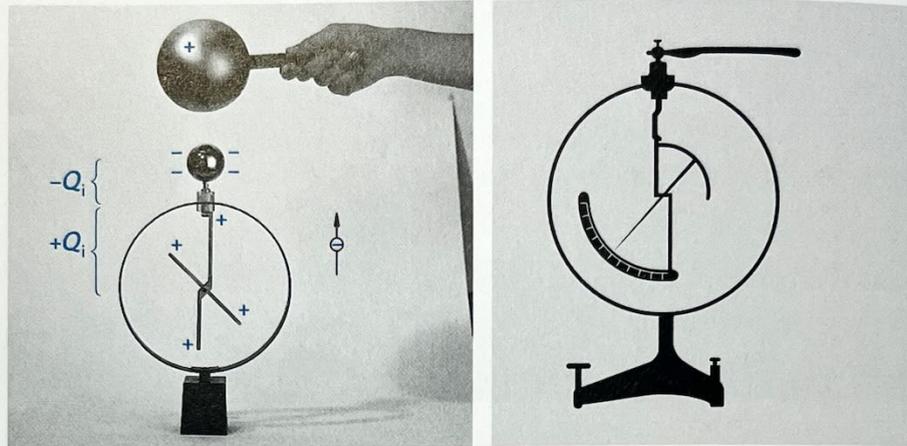


Abb. 2.1: Das Elektroskop (links) dient zum Nachweis elektrischer Ladung, die Skala am BRAUN'schen Elektrometer (rechts) erlaubt eine quantitative Bestimmung der Ladungsmenge.

### Erhaltung der Ladung

Die Summe der positiven und negativen Ladungen in einem geschlossenen System bleibt stets konstant:  $\sum q = \text{konstant}$ .

**Elektrische Feldlinien** beginnen und enden immer an entgegengesetzten Ladungen und verlaufen per Definition von der positiven zur negativen Ladung. Sie zeigen also in die Richtung der Kraft, die auf eine positive Probeladung wirkt. Auf der Oberfläche eines Leiters stehen Feldlinien stets senkrecht, da die Ladungen sonst durch Feldkräfte ( $\rightarrow$  Abb. 2.2) entsprechend verschoben würden.

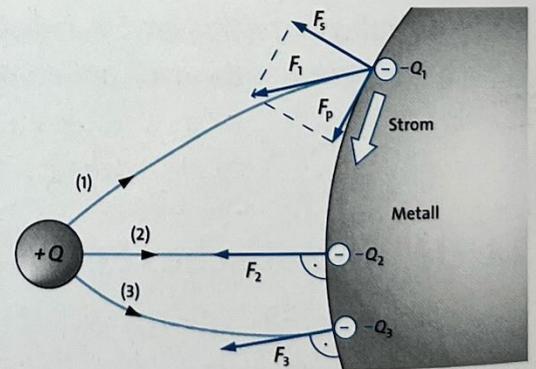


Abb. 2.2: Eine positive Probeladung nähert sich einer Oberfläche (Feldlinie 1 oder 3). Die korrespondierende negative Ladung verschiebt sich so lange, bis die Feldlinie senkrecht auf der Leiteroberfläche endet (2).

Im Experiment lassen sich Feldlinienbilder z. B. durch Gries in Öl erzeugen: Die Körner werden durch **Influenz** zu **Dipolen**, sodass sich die entgegengesetzten Ladungen benachbarter Körner anziehen.

### Nachweis elektrischer Feldlinien

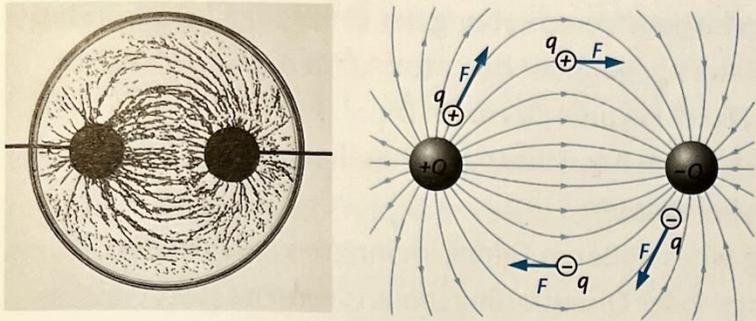


Abb. 2.3: Elektrische Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln: links: sichtbar gemacht durch Gries in Öl, rechts: Verlauf der Feldlinien.

### Influenz und Polarisation

Metalle bestehen aus einem Gitter positiv geladener Atomrümpfe, in dem sich ein Elektron je Atom frei bewegen kann. Da sich die Elektronen untereinander abstoßen, verteilen sie sich gleichmäßig im gesamten Metall. Durch ein äußeres elektrisches Feld verschiebt sich dieses Gleichgewicht, bis jede von außen ankommende Feldlinie eine passende Ladung auf der Oberfläche findet. Durch die Verschiebung der Elektronen wird das Metall zu einem **Dipol** mit positiven Ladungen auf der einen Seite und negativen Ladungen auf der anderen Seite. Das Feld zwischen diesen Ladungen ist dem äußeren Feld entgegengerichtet und kompensiert dieses vollständig. Durch diesen als **Influenz** bezeichneten Effekt ist das Innere eines elektrischen Leiters immer völlig feldfrei. Da an der Influenz nur die Oberfläche des Metalls beteiligt ist, ist auch das Innere eines metallischen Hohlkörpers (**FARADAY-Käfig**) feldfrei (→ Abb. 2.4).

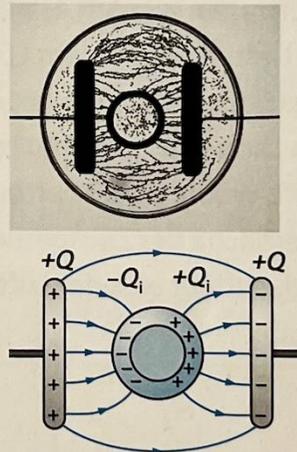


Abb. 2.4: Das Innere eines Faraday-Käfigs, hier ein Metallring, bleibt feldfrei.

In **Isolatoren** können sich die Elektronen nicht frei bewegen, sodass keine Abschirmung durch Influenz möglich ist. Das äußere Feld führt jedoch zu einer Verschiebung der Elektronen gegenüber den Atomrümpfen (**Verschiebungspolarisation**) oder zur Ausrichtung bereits vorhandener Dipolmomente, wie z. B. bei Wasser (**Orientierungspolarisation**). Analog zur Influenz entsteht auch hierdurch ein elektrisches Feld, das dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Die elektrische Feldstärke im Innern eines Dielektrikums (→ Seite 37f.) ist dadurch geringer als außerhalb.

MICHAEL FARADAY  
1791–1867

### Influenz und Polarisation

- ⊙ **Influenz:** Vollständige Kompensation des Feldes im Inneren eines elektrischen Leiters durch Verschiebung der Elektronen auf dessen Oberfläche.
- ⊙ **Verschiebungspolarisation:** Verschiebung der Elektronen im gesamten Volumen eines Isolators gegenüber den Atomkernen. Dadurch wird jedes Atom dieses Dielektrikums zu einem Dipol.
- ⊙ **Orientierungspolarisation:** Ausrichtung vorhandener Dipole eines Dielektrikums, z. B. bei Wasser.
- ⊙ Die Abschwächung eines äußeren Feldes im Inneren eines Dielektrikums durch Verschiebungs- oder Orientierungspolarisation ist stets wesentlich geringer als durch Influenz bei Metallen.

### „Klebende“ Luftballons

Wird ein Luftballon an Haaren oder Kunstfasern gerieben, so lädt er sich auf, da durch die Reibung Elektronen von einem Isolator auf den anderen übertragen werden. Hält man ihn nun an die Zimmerdecke, so verursachen die Ladungen auf dem Luftballon eine Verschiebungspolarisation in der Oberfläche der Zimmerdecke. Zwischen den so entstandenen Dipolen und den Ladungen auf dem Luftballon wirkt eine elektrostatisch anziehende Kraft, wodurch der Luftballon an der Decke kleben bleibt. Da weder die Oberfläche der Zimmerdecke noch die umgebende Luft perfekte Isolatoren sind, entlädt sich der Luftballon mit der Zeit und fällt von der Decke wieder herab.

### Elektrische Dipole im elektrischen Feld

Ein Objekt, das auf einer Seite positiv und auf der anderen Seite negativ geladen ist, wird als elektrischer Dipol bezeichnet. Ein typisches Beispiel ist das Wassermolekül. In einem homogenen elektrischen Feld wirken auf die positive und die negative Ladung gleich große Kräfte mit einer entgegengesetzten Richtung. Auf den Dipol wirkt damit effektiv ein **Drehmoment** (→ Seite 20). Beim Wasser ist dies die Ursache für die **Orientierungspolarisation** (→ Seite 33). In einem Mikrowellenherd führt die periodische Ausrichtung der Wassermoleküle zur Erwärmung der Speisen. In einem inhomogenen Feld unterscheidet sich die Feldstärke am Ort der beiden Dipolladungen. Dadurch wirkt neben dem Drehmoment noch eine Kraft in Richtung der höheren Feldstärke. Beispielsweise wird ein Wasserstrahl von einem aufgeladenen Stab angezogen.

## Elektrische Feldstärke und elektrisches Potential

in einem elektrischen Feld wirkt auf eine Ladung  $q$ , die zur Anzahl der Elementarladungen proportionale Kraft  $\vec{F}$ . Den Quotienten bezeichnet man als elektrische Feldstärke  $\vec{E}$   $\vec{F}_E = q \cdot E \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$ .

Bewegt sich die Ladung in dem elektrischen Feld, so ist dies mit einer Änderung ihrer potentiellen Energie ( $\rightarrow$  Seite 10f.) verbunden:

$$W_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}_E(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} =: q \varphi(\vec{r})$$

Die Größe  $\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$  nennt man das elektrische **Potential**, es entspricht der Energie die aufgewendet werden muss, um eine Probeladung von 1 Coulomb von weit außerhalb des Feldes an den Ort  $\vec{r}$  zu bringen. Die physikalische Einheit des elektrischen Potentials ist das Volt (V):

$$\text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Newton} \cdot \text{Meter}}{\text{Coulomb}} \Leftrightarrow 1\text{V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}}$$

Die **Potentialdifferenz** zwischen zwei Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  wird als **Spannung**  $U$  bezeichnet:

$$U_{\vec{r}_1 \vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Ein kleines Metallplättchen wird als Pendelmasse an zwei isolierenden Nylonfäden aufgehängt. Wird das Plättchen z. B. durch Berühren einer Kondensatorplatte aufgeladen, so erfährt es in einem horizontalen elektrischen Feld  $E$  eine Kraft  $F_E = q \cdot E$ , die das Pendel ( $\rightarrow$  Seite 84f.) auslenkt. Da die Feldkraft mit der Gravitationskraft im Gleichgewicht steht, folgt aus dem Kräfteparallelogramm ( $\rightarrow$  Abb. 2.5):

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{s}{h} \approx \frac{s}{l} \Rightarrow F_E = F_G \cdot \frac{s}{h} \approx F_G \cdot \frac{s}{l} \Leftrightarrow q \cdot E \approx m \cdot g \cdot \frac{s}{l}$$

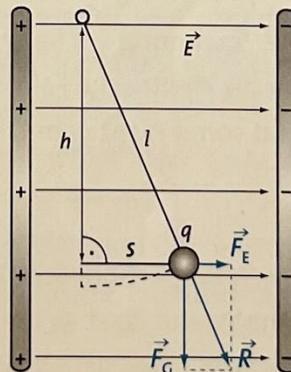


Abb. 2.5: Bestimmung der elektrischen Feldstärke mit einem Pendel

Messung mit Pendel

**elektrische Feldstärke:**  $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\left(\frac{d\varphi(\vec{r})}{dx}, \frac{d\varphi(\vec{r})}{dy}, \frac{d\varphi(\vec{r})}{dz}\right)$   $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$

**potenzielle Energie:**  $W_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} =: q \varphi(\vec{r})$  [J]

**elektrisches Potential:**  $\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$   $\left[\text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}}\right]$

**Spannung:**  $U_{\vec{r}_1 \vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$  [V]

Kurvenintegral,  
Anhang  $\rightarrow$  Seite 247

ALESSANDRO GIUSEPPE  
ANTONIO ANASTASIO  
GRAF VON VOLTA  
1745–1827

Volt

Elektrisches  
Feld

## Der Plattenkondensator (homogenes Feld)

Das Feld im Innern eines **Plattenkondensators** ist praktisch homogen, solange der Plattendurchmesser groß gegenüber dem Plattenabstand  $d$  ist. Die Ladung  $Q$  auf den Kondensatorplatten ist im Bereich des homogenen Feldes gleichmäßig mit der **Flächendichte**  $\varrho_A$  über die Fläche  $A$  der Kondensatorplatten verteilt:

Flächendichte  $\varrho_A = \frac{Q}{A}$

Um die Flächendichte zu bestimmen, kann die Ladung mit einem Metallplättchen bekannter Größe abgehoben ( $\rightarrow$  Abb. 2.6) und mit einem Elektrometer gemessen werden ( $\rightarrow$  Abb. 2.1). Es zeigt sich, dass die gemessene Flächendichte proportional zur angelegten Spannung  $U$  ist. Folglich gilt dies auch für die gesamte Ladung des Kondensators  $Q$ . Den Quotienten nennt man die **Kapazität** des Kondensators:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die physikalische Einheit der Kapazität ist das Farad (F):

$$1\text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

Die **Spannung** ( $\rightarrow$  Seite 35) zwischen den Kondensatorplatten ist ein Maß für die elektrische Feldstärke zwischen den Platten. Da das Feld homogen ist und somit nicht vom Ort abhängt, gilt:

$$U_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E \, ds = E \cdot (r_2 - r_1) = E \cdot d$$

Diese Proportionalität zwischen der Kondensatorspannung und dem Plattenabstand lässt sich experimentell leicht nachweisen, indem der Plattenabstand eines geladenen Kondensators verändert und dabei die Spannung gemessen wird. Für die Kapazität eines Plattenkondensators folgt hieraus:

$$U = E \cdot d \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E \cdot d} = \frac{\varrho_A \cdot A}{E \cdot d}$$

Da sowohl die Flächendichte  $\varrho_A$  als auch die elektrische Feldstärke  $E$  proportional zur Ladung sind, ist ihr Quotient eine Konstante, die von den Eigenschaften des Dielektrikums (siehe unten) zwischen den Kondensatorplatten abhängt:  $\varrho_A = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E$ .

Mit dieser Definition für die Flächendichte folgt für die Kapazität des Plattenkondensators:

Kapazität  $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$

Durch das Einfügen eines Dielektrikums zwischen den Kondensatorplatten lässt sich somit die Kapazität wesentlich erhöhen!

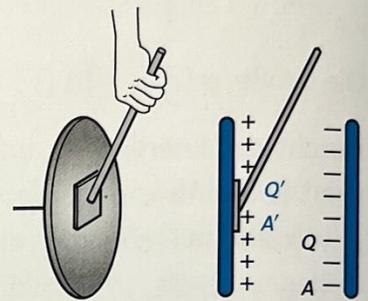


Abb. 2.6: Messung der Flächendichte

Ladung:	$Q = C \cdot U$	$[C = A \cdot s]$
Kapazität:	$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$	$[F = \frac{C}{V}]$
Spannung:	$U = E \cdot d$	$[V = \frac{J}{C}]$
Flächendichte:	$\varrho_A = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$	$[\frac{C}{m^2}]$
Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V \cdot m}$	
Dielektrizitätszahl:	$\epsilon_r = 1$ in Vakuum, $\epsilon_r \approx 1$ in Luft, sonst $\epsilon_r > 1$	

Plattenkondensator

## Dielektrika

Befindet sich ein Isolator in einem elektrischen Feld, z. B. in einem Plattenkondensator, so wird er als **Dielektrikum** bezeichnet. Mit einem geladenen Plattenkondensator ( $\rightarrow$  Seite 36) lässt sich zeigen, dass die Flächendichte  $\varrho_A$  proportional zur elektrischen Feldstärke  $E$  ist:  $\varrho_A = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$

Der Proportionalitätsfaktor  $\epsilon_0$  ist die **elektrische Feldkonstante**. Ihr Wert ist eine Folge der in unserem Einheitensystem (MKSA-System,  $\rightarrow$  Seite 64) gewählten Definition der Stromstärke.  $\epsilon_r$  heißt **Dielektrizitätszahl** oder **Permittivitätszahl** und gibt eine für das jeweilige Medium (Dielektrikum) zwischen den Kondensatorplatten spezifische Abweichung gegenüber dem Vakuum an ( $\epsilon_{r, \text{Vakuum}} = 1$ ). Die Dielektrizitätszahl ist umso größer, je stärker das Gegenfeld ist, das sich infolge von Verschiebungs- oder Orientierungspolarisation ( $\rightarrow$  Seite 33) bildet. In Luft ist  $\epsilon_r \approx 1$ . Zur Vereinfachung werden  $\epsilon_0$  und  $\epsilon_r$  in der Literatur häufig zur **Permittivität**  $\epsilon$  zusammengefasst:  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$

Das Produkt aus elektrischer Feldkonstante, Dielektrizitätszahl und elektrischer Feldstärke wird **Verschiebungsdichte** oder **elektrische Flussdichte**  $\vec{D}$  genannt:  $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$ .

An der Oberfläche von Metallen entspricht die Verschiebungsdichte  $D$  der Flächendichte  $\varrho_A$ . Hängt die Polarisation des Dielektrikums von der Kristallrichtung ab, so muss die Dielektrizitätszahl durch eine Matrix beschrieben werden. Dadurch kann es vorkommen, dass die Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  eine etwas andere Richtung aufweist als die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ .

An der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ändert sich die elektrische Feldstärke aufgrund der unterschiedlichen Dielektrizitätszahl. Ähnlich wie beim Brechungsgesetz für Wellen ( $\rightarrow$  Seite 94f.) führt dies zu einer Richtungsänderung des elektrischen Feldes. Die neue Richtung ergibt sich aus den folgenden beiden Stetigkeitsbedingungen:

- ① Die zur Oberfläche senkrechte Komponente der Verschiebungsdichte ist konstant:

$$D_{\perp,1} = D_{\perp,2} \text{ bzw. } \epsilon_1 E_{\perp,1} = \epsilon_2 E_{\perp,2}$$

- ② Die zur Oberfläche tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke ist konstant:

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2} \text{ bzw. } \frac{D_{\parallel,1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{\parallel,2}}{\epsilon_2}$$

Material	Vakuum	Luft (0°C, 1bar)	Eis (-20°C)	Wasser (0°C)	Wasser (18°C)	Wasser (40°C)	Wasser- dampf (110°C, 1bar)
<b>Dielektrizitätszahl</b>	exakt 1	1,000 576	16	88	81,1	73,4	1,026

Material	Petroleum (18°C)	Ethanol (20°C)	Papier	Glas	Porzellan	Plexiglas	Diamant
<b>Dielektrizitätszahl</b>	2,1	25,8	3,7	5 bis 10	7	3,4	16,5

Tab. 2.1: Statische Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  einiger Materialien. Bei sehr hohen Frequenzen (GHz) nimmt die Dielektrizitätszahl langsam ab.

### Verschiebungsdichte

Die Verschiebungsdichte (elektrische Flussdichte) berücksichtigt den Einfluss von Materie auf das elektrische Feld:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

An der Oberfläche von Metallen entspricht die Verschiebungsdichte der Flächendichte:

$$\rho_A = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = D$$

### Ladungstrennung durch Influenz

Werden zwei deckungsgleiche Metallplättchen in das homogene Feld eines Plattenkondensators gebracht, so führt Influenz ( $\rightarrow$  Seite 33) zu einer Verschiebung der Ladungen. Werden die Plättchen nun getrennt, sind sie elektrisch geladen:

$$\begin{aligned} Q &= \rho_A \cdot A = D \cdot A = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \cdot A \\ &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{U}{d} \cdot A \text{ mit } \epsilon_r \approx 1 \text{ (Luft)} \end{aligned}$$

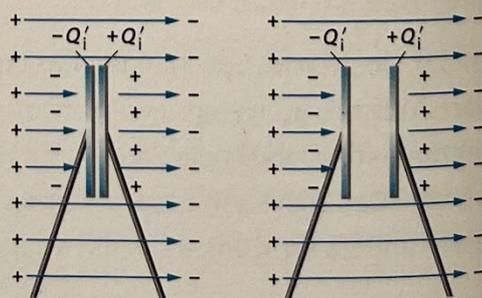


Abb. 2.7: Ladungstrennung durch Influenz

## Der GAUSS'sche Satz

Im Beispiel „Ladungstrennung durch Influenz“ haben wir die Gleichung  $Q = D \cdot A$  hergeleitet. Da das elektrische Feld zwischen den Plättchen null ist, können wir das Produkt durch ein Oberflächenintegral (Anhang, → Seite 248) ersetzen:

$$Q = \oiint_0 \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

GAUSS'scher Satz

Diese Gleichung gilt allgemein und wird als **GAUSS'scher Satz** (→ Seite 63) bezeichnet: „Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche  $O$  entspricht der eingeschlossenen Ladung  $Q$ .“

## Der Zylinderkondensator

Rollt man einen Plattenkondensator zu einem Zylinder auf, so wird aus den parallelen Feldlinien des homogenen Feldes ein radialsymmetrisches Feld.

Die Flächendichte auf den Zylindern beträgt:

$$\varrho_A = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E \quad \text{mit } A = 2\pi r \cdot l \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}$$

Die elektrische Feldstärke nimmt also radial mit  $1/r$  ab. Hieraus folgt für die Spannung:

$$U_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi \cdot l} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi \cdot l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Die Kapazität ist somit proportional zur Länge des Zylinders und beträgt:

$$C = \frac{Q}{U} = 2\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi \cdot \frac{l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{mit } r_2 > r_1$$

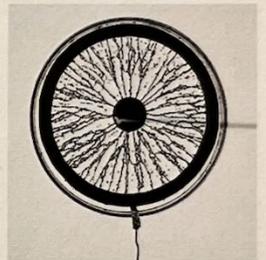


Abb. 2.8: Feld eines Zylinderkondensators, sichtbar gemacht durch Griefe

## Der Kugelkondensator

Analog zu einem Zylinderkondensator bilden auch zwei ineinander geschachtelte Kugeln einen Kondensator. Aus der Flächendichte folgt wiederum die elektrische Feldstärke:

$$\varrho_A = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E \quad \text{mit } A = 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2}$$

Die elektrische Feldstärke nimmt also radial mit  $1/r^2$  ab.

Hieraus folgt für die Spannung des Kugelkondensators:

$$U_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Die Kapazität beträgt damit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad \text{mit } r_2 > r_1.$$

## Das radiale COULOMB-Feld

Das elektrische Feld eines Kugelkondensators ist unabhängig vom Radius der Kugelschalen und hängt nur von der Ladung  $Q$  auf der Kugeloberfläche und dem Abstand  $r$  vom Zentrum der Kugel ab.

COULOMB-Feld 
$$E_Q(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$

Ein solches radialsymmetrisches Feld, das auch für eine punktförmige Ladung gilt, wird als **COULOMB-Feld** bezeichnet. Eine andere Ladung  $q$  erfährt in diesem Feld die **COULOMB-Kraft**

COULOMB-Kraft 
$$F_{qQ} = q \cdot E_Q = \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$
 mit  $r$  = Abstand der Kugelmitten.

CHARLES AUGUSTIN  
DE COULOMB  
1736–1806

Dieses Kraftgesetz für zwei punktförmige oder kugelsymmetrische Ladungen wurde experimentell von CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB gefunden und wird daher als **COULOMB-Gesetz** bezeichnet.

Haben die Ladungen  $q$  und  $Q$  das gleiche Vorzeichen, so ist die Coulomb-Kraft positiv, was einer Abstoßung entspricht. Bei einem unterschiedlichen Vorzeichen wird die Kraft hingegen negativ, die Ladungen ziehen sich an.

Die Energie einer Probeladung im COULOMB-Feld wird durch das **COULOMB-Potential** beschrieben:

$$W_{\text{pot}}(q, r) = q \varphi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \varphi(r) = - \int_{\infty}^r E(r') \cdot dr' \Rightarrow$$

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r'^2} dr' = - \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left[ -\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}$$

Das COULOMB-Potential entspricht damit der Spannung eines Kugelkondensators mit  $r_2 \rightarrow \infty$ :

$$U_{r_1 r_2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \xrightarrow{r_2 \rightarrow \infty} \varphi(r_1) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_1}$$

## Energiedichte des elektrischen Feldes

Wird ein Kondensator aufgeladen, so steigt mit zunehmender Ladung  $Q$  auf den Kondensatorplatten auch die Spannung  $U$ . Um den Kondensator mit der zusätzlichen Ladung  $\Delta Q$  aufzuladen, ist die Energie  $\Delta W = \Delta Q \cdot U$  notwendig. Addieren wir diese Energieportionen beginnend bei  $Q = 0$  und berücksichtigen dabei  $Q = C \cdot U$ , so wird hieraus das Integral:

$$W = \int U dQ = \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \int Q dU.$$

Mit  $U = E \cdot d$  und  $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$  folgt:

$$W_{\text{Kondensator}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \underbrace{A \cdot d}_{=V} \cdot E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot V \cdot E^2 = W_{\text{el}}$$

Teilt man diese elektrische Feldenergie noch durch das Volumen  $V$ , so folgt die elektrische Energiedichte:

$$\rho_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D$$

Energiedichte

Eine genauere Herleitung liefert das vektorielle Ergebnis:  $\rho_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ .

Beim Aufladen eines Kondensators steigt die Spannung proportional zur eingebrachten Ladung. Die gespeicherte Energie ist daher

$$W = \int U dQ = \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \int Q dU.$$

Kondensator  
als Energie-  
speicher

Die Energie des elektrischen Feldes ist von der Existenz des Kondensators unabhängig und beträgt für homogene Felder:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot V \cdot E^2$$

Hieraus folgt die Energiedichte:

$$\rho_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{D}$$

## Kondensatoren im elektrischen Schaltkreis

**Parallelschaltung:** Werden zwei Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  parallel geschaltet, so haben beide die gleiche Spannung  $U$ . Die Ladung der Kondensatoren beträgt  $Q_1 = C_1 \cdot U$  und  $Q_2 = C_2 \cdot U$ .

Also insgesamt:  $Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = (C_1 + C_2) \cdot U = C_{\text{ges}} \cdot U$

Für die Parallelschaltung gilt somit:  $C_{\text{ges}} = \sum_i C_i$

**Reihenschaltung:** Werden zwei Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  in Reihe geschaltet, so erhalten beide beim Laden die gleiche Ladung  $Q$ . Für die Spannung gilt damit:

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}$$

Für die Reihenschaltung folgt somit:  $\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

**Aufladen und Entladen über einen Widerstand:** Wird ein Kondensator  $C$  über einen Widerstand  $R$  aufgeladen (Reihenschaltung aus  $R$  und  $C$ ) so gilt:  $U_{\text{ges}} = U_R + U_C$  mit  $U_R = R \cdot I$ . Der Strom  $I$  entspricht dabei der Ladungsänderung des Kondensators:  $I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$  mit  $Q = C \cdot U_C \Rightarrow U_{\text{ges}} = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:  $U_C = U_{\text{ges}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right)$

Analog folgt für die Entladung des Kondensators:  $U_C = U_{\text{ges}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

Das Produkt  $R \cdot C$  wird als Zeitkonstante dieses Vorgangs bezeichnet.

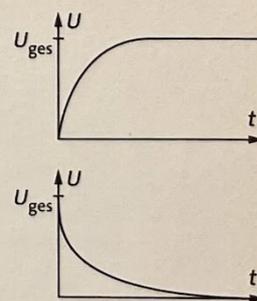


Abb. 2.9: Auf- und Entladekurve eines Kondensators

## Der MILLIKAN-Versuch

ROBERT ANDREWS  
MILLIKAN  
1868–1953  
Nobelpreis 1932

Vor etwa einem Jahrhundert gelang es ROBERT ANDREWS MILLIKAN, die Ladung eines Elektrons bzw. die Elementarladung  $e$  durch folgenden Versuch experimentell zu bestimmen: Zwischen zwei waagerechten Kondensatorplatten wird Öl zerstäubt. Dabei findet bei den meisten Tröpfchen eine geringe positive oder negative Aufladung  $q$  statt, sodass sie im elektrischen Feld verschieden schnell zu Boden sinken. Durch ein Mikroskop wird eines der geladenen Tröpfchen beobachtet und die Gleichspannung  $U_0$  am Kondensator so eingestellt, dass es genau in der Schwebelage gehalten wird. Die Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = \frac{4}{3} r^3 \cdot \rho \cdot g$  des Tröpfchens mit Radius  $r$  entspricht somit der Kraft des elektrischen Feldes:  $F_G = F_E$  mit  $F_E = E \cdot q = \frac{U_0}{d} \cdot q$ . Nach dem Abschalten des Feldes wird die Sinkgeschwindigkeit aus Weg und Zeit bestimmt.

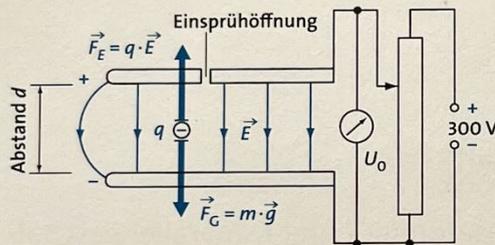


Abb. 2.10: Schwebekondensator nach Millikan; rechts das Potentiometer zum Regeln der Schwebespannung  $U_0$

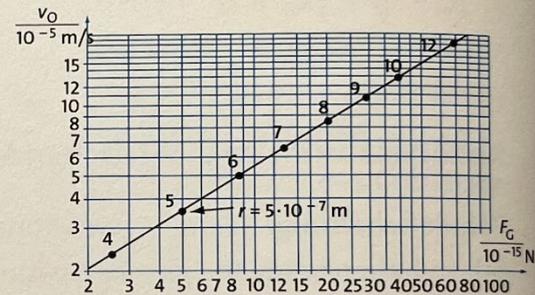


Abb. 2.11: Sinkgeschwindigkeit  $v_0$  von Öltröpfchen in Luft als Funktion des Gewichts  $F_G$ ;  $r$  ist der Tröpfchenradius

Da die beobachteten Tröpfchen sehr klein sind wird ihre Sinkgeschwindigkeit durch die **viskose Reibung** der Luft bestimmt und es gilt das **STOKES'sche Reibungsgesetz** ( $\rightarrow$  Seite 14):  $F_{ST} = 6 \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_0$

Da das Tröpfchen mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  sinkt, sind die Reibungskraft und die Gewichtskraft im Gleichgewicht und damit  $F_{ST} = F_G$ .

### Auswertung

① Aus  $F_{ST} = F_G = F_E$  folgt  $F_{ST} = F_E$  und damit:  $6 \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_0 = \frac{U_0}{d} \cdot q$

$$\Rightarrow r = \frac{q \cdot U_0}{6 \pi \cdot \eta \cdot v_0 \cdot d}$$

② Einsetzen des Tröpfchenradius  $r$  in die Gewichtskraft:

$$F_G = \frac{4}{3} r^3 \cdot \rho \cdot g = \frac{4}{3} \left( \frac{q \cdot U_0}{6 \pi \cdot \eta \cdot v_0 \cdot d} \right)^3 \cdot \rho \cdot g$$

③ Wegen  $F_G = F_E$  kann die unbekannte Gewichtskraft ersetzt werden; somit ist die Ladung  $q$  aus den im Experiment ermittelten Größen bestimmbar:

$$F_G = F_E \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho \cdot g}{(6\pi \cdot \eta \cdot v_0)^3} \cdot \left(\frac{q \cdot U_0}{d}\right)^3 = \frac{q \cdot U_0}{d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2 \cdot U_0^2}{d^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(6\pi \cdot \eta \cdot v_0)^3}{\rho \cdot g} \Leftrightarrow q = \frac{d}{U_0} \sqrt{\frac{162 \cdot (\pi \cdot \eta \cdot v_0)^3}{\rho \cdot g}}$$

Ergebnis: Unabhängig von der Polarität der Kondensatorplatten zeigt sich, dass nur ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Ladung auftreten:  $q = n \cdot e$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Diese Ladung nennt man die Elementarladung  $e$ .

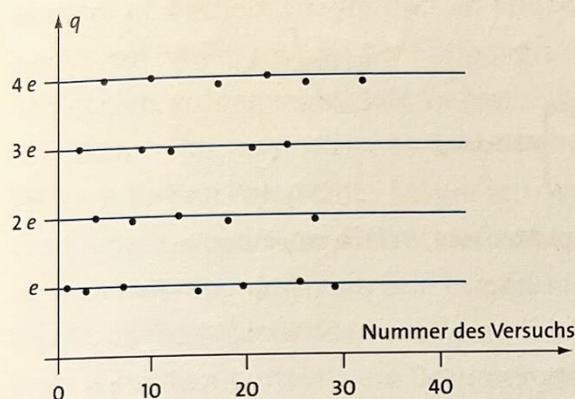


Abb. 2.12: Streuung zahlreicher Messwerte für die Tröpfchenladung  $q$  um ganzzahlige Vielfache  $n \cdot e$ .

Alle Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung

$$e = 1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Ein Elektron hat die Ladung  $q_e = -e$ .

Elementar-  
ladung

## Die BRAUN'sche Röhre (Kathodenstrahlröhre)

Trotz der zunehmenden Verbreitung von Flachbildschirmen sieht man immer noch Fernseher und Monitore, die nach dem Prinzip der Elektronenstrahlröhre arbeiten. In der zugrunde liegenden **BRAUN'schen Röhre** wird ein Elektronenstrahl erzeugt und abgelenkt, sodass er auf einem Leuchtschirm eine phosphoreszierende Schicht zum Leuchten anregt.

KARL FERDINAND  
BRAUN  
1850–1918

Der Elektronenstrahl entsteht durch den **glühelektrischen Effekt**: In einem evakuierten Glaskolben wird ein Draht (**Glühkathode**) mit der **Heizspannung**  $U_H$  zum Glühen gebracht, sodass er Elektronen aussendet. Diese werden mit der **Anodenspannung**  $U_A$  zur **Anode** beschleunigt.

Der negativ geladene **WEHNELT-Zylinder** umgibt die Glühkathode und bündelt den Elektronenstrahl auf ein Loch in der Anode. Im Vergleich zur ursprünglichen BRAUN'schen Röhre verbessert er die Elektronenausbeute und kann zusätzlich die Helligkeit des erzeugten Bildpunktes steuern. Die von den **Ablenkplatten** generierten elektrischen Felder sorgen für eine Auslenkung in horizontaler und vertikaler Richtung.

ARTHUR WEHNELT  
1871–1944

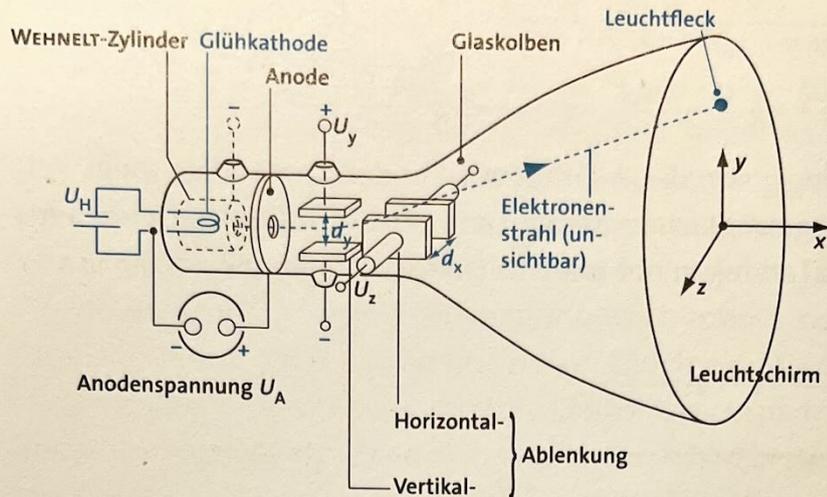


Abb. 2.13: BRAUN'sche Röhre mit Ablenkplatten und WEHNELT-Zylinder

**Energie der Elektronen:**

$$W = q_e \cdot U_A = \frac{1}{2} m_e \cdot v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2 U_A \cdot q_e}{m_e}}$$

Elektronenmasse:  $m_e = 9,109\,38 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ Elektronenladung:  $q_e = -e = -1,602\,1773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ **Elektronen-volt**

Um die Energie von geladenen Teilchen, insbesondere von Elektronen zu beschreiben, verwendet man die Energieeinheit **Elektronenvolt**. Sie entspricht der Energie eines Elektrons, das mit einer Spannung von einem Volt beschleunigt wurde:  $1 \text{ eV} = 1,602\,1773 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602\,1773 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

**Bewegung in x-Richtung:**  $x = t \cdot v_x = t \cdot \sqrt{\frac{2 U_A \cdot q_e}{m_e}}$  bzw.  $t = x \cdot \sqrt{\frac{m_e}{2 U_A \cdot q_e}}$

**Ablenkung in y/z-Richtung:** Wegen der geringen Masse der Elektronen hat die Gravitationsbeschleunigung (Schwerebeschleunigung) keinen Einfluss auf den Bahnverlauf, sodass für die Ablenkung in y- und z-Richtung die gleichen Formeln gelten ( $\rightarrow$  „Bewegungsgleichungen“ auf Seite 7).

$$\text{Beschleunigung: } a_y = \frac{F_E}{m_e} = \frac{E_y \cdot q_e}{m_e} = \frac{U_y \cdot q_e}{d_y \cdot m_e}$$

$$\text{Ablenkung: } y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 = \frac{U_y \cdot q_e}{2 d_y \cdot m_e} \cdot t^2$$

Die Bahnkurve  $y(x)$  bzw.  $z(x)$  ergibt sich durch Einsetzen der oben ermittelten Beziehung zwischen  $x$  und  $t$ . Sie ist von der Elektronenmasse und der Elektronenladung unabhängig:

$$y(x) = \frac{U_y}{4 d_y \cdot U_A} \cdot x^2 \quad \text{bzw.} \quad z(x) = \frac{U_z}{4 d_z \cdot U_A} \cdot x^2$$

Typisch sind Beschleunigungsspannungen um 17 kV und Ablenkspannungen um 100 V. Beschleunigungsspannungen oberhalb von 20 kV erhöhen die Abbildungsqualität, es entsteht dabei jedoch Röntgenstrahlung, die z.B. durch bleihaltige Gläser abgeschirmt wird.

## 2.2 Magnetisches Feld

### Grundlegende Begriffe

Anders als bei elektrischen Ladungen gibt es beim Magnetismus keine **magnetischen Monopole**. Magnete sind immer **Dipole** mit einem **magnetischen Nordpol** und einem **magnetischen Südpol**. Bei Permanentmagneten wird der Norpol häufig rot und der Südpol grün gefärbt. Gleichnamige Pole stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Der Raum, in dem diese Kräfte wirken, heißt magnetisches Feld. In einem inhomogenen **magnetischen Feld**, z. B. an den Polen eines Magneten, werden ferromagnetische Materialien (→ Seite 46), in das Gebiet der höheren Feldstärke gezogen. In einem homogenen magnetischen Feld erfolgt hingegen nur eine Ausrichtung der Dipole, da die anziehenden Kräfte auf beide Pole gleich groß sind. Auf den Dipol wirkt damit effektiv ein **Drehmoment** (→ Seite 20), aber keine Kraft.

Der Verlauf magnetischer Feldlinien lässt sich mit Eisenfeilspänen sichtbar machen: In einem äußeren Magnetfeld werden die **ferromagnetischen** Späne magnetisiert (**magnetische Influenz**) und ziehen sich gegenseitig an. Die Richtung der magnetischen Feldlinien gibt an, in welche Richtung der Nordpol einer Kompassnadel zeigt. Bei einem Permanentmagneten verlaufen sie somit vom Nordpol zum Südpol. Die Dichte der Feldlinien entspricht wie beim elektrischen Feld der Stärke des Magnetfeldes.

Im Gegensatz zum elektrischen Feld sind die Feldlinien des Magnetfeldes immer geschlossen. Dies gilt auch bei einem Permanentmagneten, bei dem sie scheinbar am Nordpol beginnen und am Südpol enden: Tatsächlich verlaufen sie lediglich zu einem Teil im Innern des Magneten. Generell „bevorzugen“ die magnetischen Feldlinien ein ferromagnetisches Material anstelle von Luft, da die hohe Permeabilitätszahl (→ Seite 48) eine größere Flussdichte zulässt und die Feldlinien quasi bündelt: Verbindet man die beiden Enden eines Hufeisenmagneten mit einem **Joch**, so verschwindet das Magnetfeld außerhalb des Metalls fast vollständig!

### Magnetische und geografische Pole der Erde

Eine Kompassnadel zeigt immer nach Norden: Als Permanentmagnet richtet sie sich nach dem Magnetfeld aus, das die Erde umgibt. Deshalb tragen die Pole aller Magneten die Bezeichnung „Nordpol“ und „Südpol“.

**Da sich gleiche Pole abstoßen, ist der geografische Nordpol jedoch ein magnetischer Südpol.**

Die Lage der magnetischen und der geografischen Pole der Erde stimmen nicht genau überein, ferner gibt es über die Jahre hinweg Schwankungen, die z. B. in Seekarten als Korrekturwerte eingezeichnet werden.

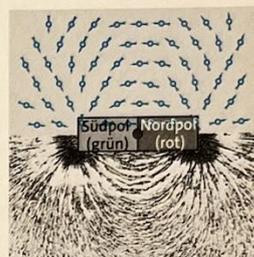


Abb. 2.14: Feldlinienbild eines Permanentmagneten: oben mit Kompassnadeln, unten mit Eisenspänen.

Vorsicht:  
Falle

## Magnetische Eigenschaften der Materie

Die Magnetisierung der Materie beruht auf den magnetischen Eigenschaften der Atome, die ihrerseits quantenmechanisch durch bewegte Ladungen erklärt werden können. Die Stärke des **atomaren magnetischen Moments** ist für jedes chemische Element charakteristisch. Die magnetischen Eigenschaften eines Materials lassen sich hieraus allerdings noch nicht ablesen. Entscheidend ist vielmehr die Ausrichtung dieser atomaren Dipolmomente im Kristallgitter. Abhängig davon, wie sich ein Material in einem äußeren Magnetfeld verhält, unterscheidet man verschiedene Stoffgruppen:

- ⊙ **Diamagnetismus** ( $\mu_r < 1$ ): Wird ein beliebiges Material in ein Magnetfeld gebracht, so induziert dies in den Elektronenschalen der Atome Ringströme. Das dadurch entstehende Magnetfeld ist gemäß der LENZ'schen Regel (→ Seite 58) dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet. In einem inhomogenen Magnetfeld werden diamagnetische Substanzen in Bereiche geringer Feldstärke abgedrängt. Da der Effekt des Diamagnetismus sehr schwach ist, lässt er sich nur beobachten, wenn das Material kein atomares magnetisches Moment aufweist. Da **Supraleiter** keinen elektrischen Widerstand besitzen, treten in ihnen makroskopische Ringströme auf, durch die ein äußeres Magnetfeld vollständig abgeschirmt wird. Supraleiter sind daher perfekte Diamagnete ( $\mu_r = 0$ ) (→ Glossar **MEISSNER-OCHSENFELD-Effekt** auf Seite 217).
- ⊙ **Paramagnetismus** ( $\mu_r > 1$ ): Wird ein Material mit nicht verschwindendem atomarem magnetischem Moment in ein äußeres Magnetfeld gebracht, so richten sich die atomaren Dipolmomente aus. In einem inhomogenen Magnetfeld werden paramagnetische Substanzen zur größeren Feldstärke hingezogen. Durch die thermische Bewegung der Atome verschwindet die Orientierung der atomaren Dipolmomente, sobald kein äußeres magnetisches Feld mehr vorhanden ist.
- ⊙ **Ferromagnetismus** ( $\mu_r \gg 1$ ): In ferromagnetischen Materialien ordnen sich die atomaren magnetischen Momente von sich aus zu sogenannten **Weiss'schen Bezirken**. Im unmagnetisierten Zustand ist die Ausrichtung dieser **Domänen (Elementarmagnete)** statistisch verteilt. In einem äußeren Magnetfeld werden nacheinander komplette WEISS'sche Bezirke ausgerichtet. Diese Orientierung bleibt auch ohne äußeres magnetisches Feld teilweise erhalten (**Remanenz**). Typische ferromagnetische Materialien sind **Eisen, Nickel und Cobalt**, sowie deren Legierungen. Für sehr starke Permanentmagnete setzt man heute die Legierung  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  ein. Oberhalb der materialabhängigen **CURIE-Temperatur** wird die ferromagnetische Ordnung aufgebrochen und die Substanz wird paramagnetisch.

WALTHER MEIßNER  
1882–1974

ROBERT OCHSENFELD  
1901–1993

PIERRE-ERNEST WEISS  
1865–1940

PIERRE CURIE  
1859–1906,  
Nobelpreis 1903

- ⊙ **Antiferromagnetismus:** Liegt vor, wenn in einem Kristall zwei Untergitter vorhanden sind, deren gleich große magnetische Momente sich antiparallel einstellen. Antiferromagnete haben trotz ihrer hohen magnetischen Ordnung kein resultierendes magnetisches Moment.
- ⊙ **Ferrimagnetismus:** Liegt vor, wenn in einem Kristall zwei Untergitter vorhanden sind, deren unterschiedlich große magnetische Momente sich antiparallel einstellen. Ferrimagnete haben ein kleines effektives magnetisches Moment. Ein typischer Vertreter ist das natürlich vorkommende Mineral Magnetit ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), das zur Herstellung von kleinen Permanentmagneten wie Tafelmagneten oder Kompassnadeln eingesetzt wird.
- ⊙ **Ferrite:** Keramische ferrimagnetische Materialien mit einem hohen spezifischen Widerstand. Sie werden in der Elektronik häufig als Spulenkern oder Antennen eingesetzt, da durch ihren hohen Widerstand störende Wirbelströme (→ Seite 63) stark unterdrückt werden.

## Elektromagnetismus

Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld, dessen Feldlinien als konzentrische Kreise senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladungen stehen. Anders als bei Permanentmagneten gibt es hier keinen ausgezeichneten Nord- oder Südpol. Man nennt ein solches Feld deshalb ein **magnetisches Wirbelfeld**. Die Feldlinien des magnetischen Wirbelfeldes verlaufen, in Richtung des Elektronenstroms gesehen, links herum, d.h. gegen den Uhrzeigersinn (**Linke-Faust-Regel**). Bei positiven Ladungsträgern (z. B. Ionenstrahl) verlaufen die Feldlinien in umgekehrter Richtung.

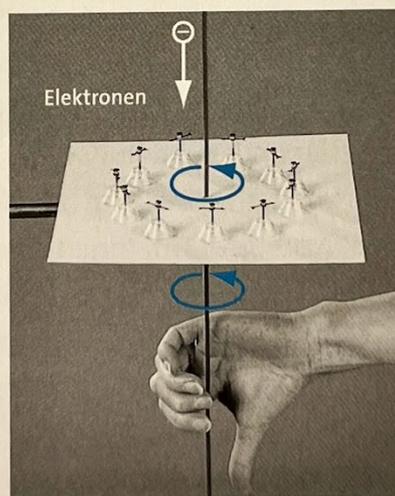


Abb. 2.15: Die Linke-Faust-Regel gibt die Richtung der magnetischen Feldlinien an.

### Definition der Stromrichtung

In der Physik wird der Stromfluss häufig durch die Bewegungsrichtung der Elektronen definiert, d. h. vom Minuspol (Elektronenquelle) zum Pluspol. Als „technische Stromrichtung“ oder auch „konventionelle Stromrichtung“ bezeichnet man jedoch die Gegenrichtung, also die Bewegungsrichtung einer gedachten positiven Ladung.

**Vorsicht:  
Falle**

## Feldstärke und Flussdichte einer Spule – Materie im Magnetfeld

Wird ein Leiter zu einer **Spule** aufgewickelt, so überlagern sich die Magnetfelder der einzelnen Windungen. Ist die Spule sehr lang im Verhältnis zu ihrem Querschnitt, so ist das Feld im Innern der Spule annähernd homogen.

Die **magnetische Feldstärke**  $H$  im Innern einer Spule ist proportional zur Stromstärke  $I$  und zum Quotienten aus der Anzahl der Wicklungen  $n$  und der Länge  $l$ :  $H = I \cdot \frac{n}{l}$ .

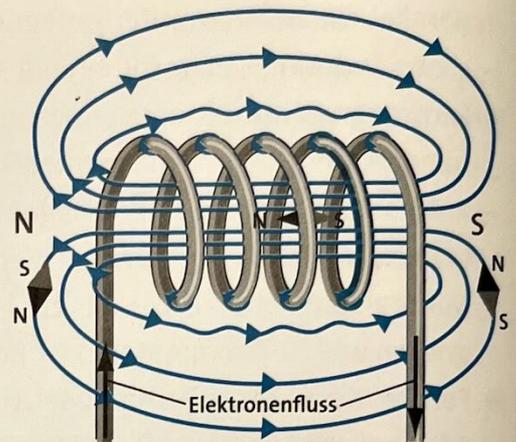


Abb. 2.16: Die Feldlinien der einzelnen Drähte überlagern sich im Innern der Spule zu einem homogenen Magnetfeld.

Zu den Enden hin nimmt das Feld in der Spule auf die Hälfte ab. Dies wird verständlich, wenn wir die Spule in Gedanken verlängern. Das vorherige Ende liegt nun im homogenen Bereich des Feldes und die Bereiche links bzw. rechts von der betrachteten Stelle tragen je zur Hälfte zum Feld bei. Außerhalb der Spule ist das Feld stark divergent, da die Feldlinien geschlossen sein müssen und somit außen die beiden Enden der Spule verbinden.

Lang-  
gestreckte  
Spule

Das Magnetfeld im Innern einer langgestreckten Spule der Länge  $l$  mit  $n$  Windungen ist homogen und beträgt:

$$H = I \cdot \frac{n}{l} \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad \text{bzw.} \quad B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l} \left[ \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

Wird die Spule mit einem ferromagnetischen Material ( $\rightarrow$  Seite 46) gefüllt, so erhöht dies die magnetische Flussdichte im Kern der Spule dramatisch. Der Unterschied gegenüber dem Vakuum wird durch die materialabhängige **Permeabilitätszahl**  $\mu_r$  ausgedrückt. Bei magnetischen Materialien spielt die Permeabilitätszahl dieselbe Rolle wie die Dielektrizitätszahl bei Dielektrika ( $\rightarrow$  Seite 37f.). In Analogie zum elektrischen Feld definiert man daher die **magnetische Flussdichte**  $B$ :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Die **magnetische Feldkonstante**  $\mu_0$  ist eine Folge des von uns verwendeten Einheitensystems (MKSA-System,  $\rightarrow$  Seite 64). Zur Vereinfachung werden  $\mu_0$  und  $\mu_r$  in der Literatur häufig zur **Permeabilität**  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  zusammengefasst. Die Einheit der magnetischen Flussdichte ist das Tesla:

NIKOLA TESLA  
1856–1943

Tesla  $1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$

An der Grenzfläche zwischen zwei magnetischen Materialien ändert sich die magnetische Feldstärke aufgrund der unterschiedlichen Permeabilitätszahlen. Ähnlich wie beim Brechungsgesetz für Wellen (→ Seite 94f.) führt dies zu einer Richtungsänderung des magnetischen Feldes. Die neue Richtung ergibt sich aus den folgenden beiden Stetigkeitsbedingungen:

- ① Die zur Oberfläche senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte ändert ihren Wert nicht:

$$B_{\perp,1} = B_{\perp,2} \text{ bzw. } \mu_1 H_{\perp,1} = \mu_2 H_{\perp,2}$$

- ② Die zur Oberfläche tangential Komponente der magnetischen Feldstärke ändert ihren Wert nicht:

$$H_{\parallel,1} = H_{\parallel,2} \text{ bzw. } \frac{B_{\parallel,1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel,2}}{\mu_2}$$

In Analogie zum elektrischen Feld definiert man die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$ :

$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$  mit Permeabilitätszahl  $\mu_r$  und magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$ .

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1,256 \, 64 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad \left[ \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \text{T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

### Magnetische Feldstärke

<b>Material</b>	Vakuum	Gold	Kupfer	Wasser	Luft
<b>Permeabilitätszahl <math>\mu_r</math></b>	exakt 1	0,999 971	0,999 990	0,999 991	1,000 000 4
<b>Material</b>	Eisen (96 % Fe, 4 % Si)	Cobalt	Nickel	$\mu$ -Metall	
<b>Permeabilitätszahl <math>\mu_r</math></b>	400 (H = 0), 8000 (Sättigung)	250	600	30 000 bis 70 000	

Tab. 2.2: Permeabilitätszahlen einiger Materialien. Bei ferromagnetischen Materialien (→ Seite 46) nimmt die Permeabilitätszahl mit steigender Feldstärke zu, bis ein Sättigungswert erreicht ist. Die genauen Werte hängen darüber hinaus von der exakten Legierung und der Vorbehandlung (Glühen ↔ Kaltverformen) ab.

Als MuMetall (engl. Permalloy) wird eine weichmagnetische Nickel-Eisen-Legierung mit ca. 80 % Nickel bezeichnet, die eine sehr hohe Permeabilitätszahl ( $\mu_r \approx 30\,000$  bis  $70\,000$ ) aufweist. Durch mechanische Verformung verändert MuMetall seine magnetischen Eigenschaften und die Permeabilitätszahl sinkt dramatisch ab ( $\mu_r \approx 150$ ).

### MuMetall ( $\mu$ -Metall)

Die häufigste Anwendung von MuMetall besteht in der Abschirmung niederfrequenter elektromagnetischer Wellen im Frequenzbereich bis 10 kHz. Auch die Abschirmung von statischen Magnetfeldern ist möglich, wobei für einen Faktor 20 entweder ein 1 mm starkes Blech oder vier Lagen Folie mit 0,1 mm Dicke benötigt werden. Eine wesentlich stärkere Abschirmung ist schwierig, da die Abschirmwirkung nur mit dem Logarithmus der Dicke skaliert.

## Die LORENTZ-Kraft

HENDRIK ANTOON  
LORENTZ  
1853–1928,  
Nobelpreis 1902

LORENTZ-Kraft

Eine sich bewegende elektrische Ladung ist von einem magnetischen Wirbelfeld ( $\rightarrow$  Seite 47f.) umgeben. Die Wechselwirkung mit einem äußeren Magnetfeld  $B$  resultiert in einer Kraft, die am größten ist, wenn die Bewegungsrichtung senkrecht auf den Feldlinien steht:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

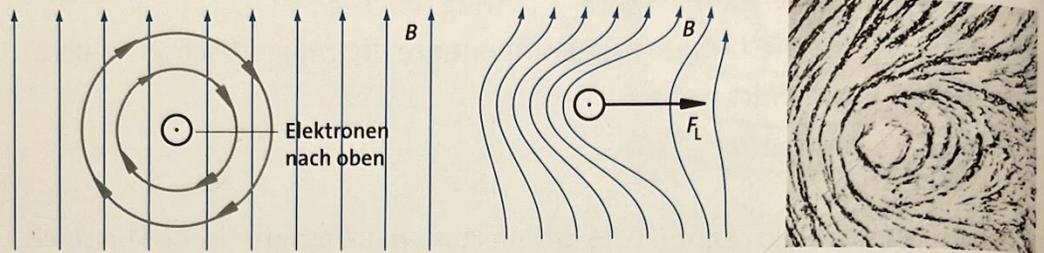


Abb. 2.17: Die LORENTZ-Kraft auf eine bewegte Ladung ist eine Folge der Wechselwirkung zwischen dem Wirbelfeld der bewegten Ladung und einem statischen Magnetfeld.

Stehen die Feldlinien nicht senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so wird nur die senkrechte Komponente  $\vec{B}_\perp$  von  $\vec{B}$  wirksam; die parallel zur Elektronenrichtung verlaufende Komponente ist wirkungslos:

$$F_L = q \cdot v \cdot B_\perp \text{ bzw. } F_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \varphi.$$

**Vorsicht:**  
**Falle**

Die Ladung eines Elektrons ist negativ!  $q_e = -e$

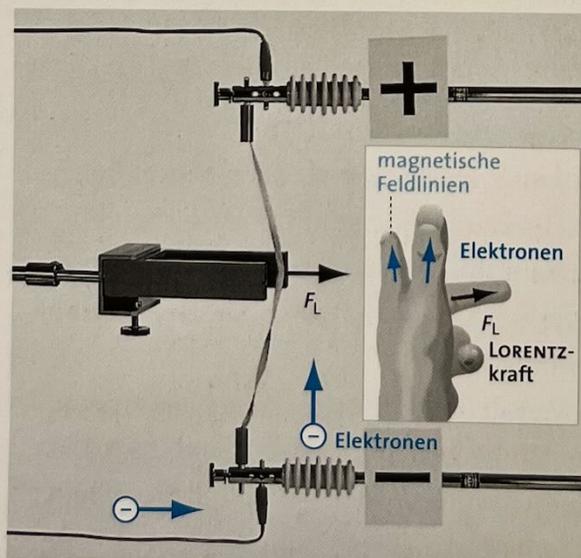


Abb. 2.18: Ein stromdurchflossener Leiter erfährt in einem Magnetfeld eine Kraft. Die Richtung dieser LORENTZ-Kraft zeigt die Drei-Finger-Regel an.

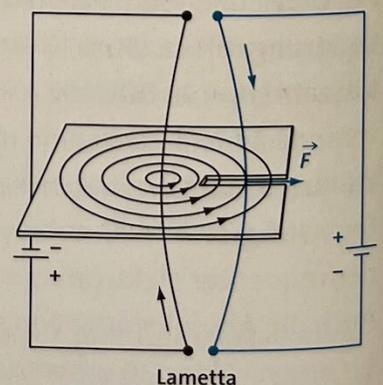


Abb. 2.19: Der rechte Leiter wird vom Magnetfeld des linken durch die LORENTZ-Kraft abgestoßen.

Die Richtung der LORENTZ-Kraft kann mit der Drei-Finger-Regel bestimmt werden: Zeigt der Daumen der linken Hand in die Bewegungsrichtung der Elektronen und der Zeigefinger in Richtung des magnetischen Feldes, dann gibt der Mittelfinger die Orientierung der LORENTZ-Kraft an.

Drei-Finger-Regel

Die LORENTZ-Kraft wirkt auch zwischen zwei Strom führenden Leitern: Antiparallele Ströme stoßen sich gegenseitig ab, parallele Ströme ziehen sich an ( $\rightarrow$  Abb. 2.19). Für einen Leiter der Länge  $s$  in einem Magnetfeld bedeutet dies bei einem Strom der Stärke  $I$ :

Parallele Leiter

$$\vec{F}_L = I \cdot (\vec{s} \times \vec{B}).$$

Der Vektor  $\vec{s}$  entspricht der Länge des Leiters und zeigt in die konventionelle Stromrichtung.

In der Betragsform folgt daher:

$$F_L = I \cdot s \cdot B_{\perp} = I \cdot s \cdot B \cdot \sin \varphi.$$

Dabei steht  $B_{\perp}$  senkrecht zu  $\vec{s}$  und  $\varphi$  ist der Winkel zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{s}$ .

## Der HALL-Effekt, Elektronengeschwindigkeit in Leitern

Fließen durch einen n-dotierten Halbleiter Elektronen, so wirkt auf sie in einem Magnetfeld  $B$  die LORENTZ-Kraft  $F_L = q_e \cdot v \cdot B_{\perp}$  und lenkt sie ab. Der untere Teil des Plättchens in Abb. 2.20 wird dadurch negativ geladen und es bildet sich quer zur Stromrichtung ein elektrisches Feld der Stärke  $E$ , das die LORENTZ-Kraft kompensiert. Diese Potentialtrennung im Leiter ist als Spannung  $U_H$  messbar:  $U_H = E \cdot d$ . Die Spannung  $U_H$  wird nach ihrem Entdecker EDWIN HALL als **HALL-Spannung** bezeichnet. Im stationären Gleichgewicht ist die LORENTZ-Kraft  $F_L = q_e \cdot v \cdot B_{\perp}$  genauso groß wie die Kraft des elektrischen Feldes:

$$F_E = E \cdot q_e = \frac{U_H \cdot q_e}{d} = q_e \cdot \vec{v} \cdot B_{\perp} = F_L$$

$$\Rightarrow U_H = d \cdot \vec{v} \cdot B_{\perp}$$

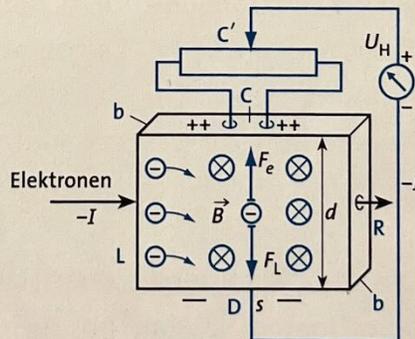


Abb. 2.20: HALL-Sensor: Durch die LORENTZ-Kraft werden die Elektronen im Magnetfeld abgelenkt und die Seiten des Halbleiterkristalls laden sich auf, bis das elektrische Feld der HALL-Spannung  $U_H$  die LORENTZ-Kraft kompensiert. Da es schwierig ist, zwei *exakt gegenüberliegende* Punkte C und D zu kontaktieren, wird ein Potentiometer verwendet um die Spannung zwischen C' und D ohne Magnetfeld auf Null einzustellen.

EDWIN HERBERT HALL  
1855–1938

Die HALL-Spannung  $U_H$  ist somit proportional zur senkrechten Komponente der magnetischen Flussdichte  $B_{\perp}$ , der Breite des Plättchens  $d$  und der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}$  der Elektronen, die als **Driftgeschwindigkeit** bezeichnet wird und aus der Definition des Stroms hergeleitet werden kann:

Die Ladungsträger legen in der Zeit  $\Delta t$  die Strecke  $\Delta s = v \cdot \Delta t$  zurück. Die Anzahl der Ladungsträger, die so durch einen Querschnitt  $A$  des Leiters fließt, ergibt sich durch Multiplikation mit der Dichte der Ladungsträger  $n$ :

$$N = n \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta Q = q_e \cdot n \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \Delta t$$

Zusammen mit der Definition des Stroms folgt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q_e \cdot n \cdot A \cdot \bar{v} \quad \text{bzw.} \quad \bar{v} = \frac{I}{q_e \cdot n \cdot A}$$

Berücksichtigen wir bei der HALL-Spannung die Querschnittsfläche  $A = d \cdot b$  so folgt:

$$U_H = d \cdot \bar{v} \cdot B = \underbrace{\frac{1}{n \cdot q_e}}_{A_H} \cdot \frac{I \cdot B}{b}$$

Die **HALL-Konstante (HALL-Faktor)**  $A_H$  setzt sich aus der Elektronenladung und der stoffspezifischen Konzentration oder **Anzahldichte**  $n = N/V$  der Elektronen zusammen. Die HALL-Spannung ist dabei umso größer je geringer die Elektronendichte ist. Bei Metallen trägt typischerweise ein Elektron je Atom zum Strom bei. Die resultierende HALL-Spannung ist dadurch für eine sinnvolle Messung viel zu klein. Bei Halbleitern hingegen lässt sich die Elektronendichte durch sogenanntes Dotieren gezielt einstellen, die Ladungsträgerdichte ist dadurch wesentlich kleiner.

Die tatsächlich gemessenen HALL-Konstanten weichen von den in  $\rightarrow$  Tab. 2.3 berechneten Werten ab, da die Annahme von einem Elektron je Atom für Metalle zu einfach ist. Die gemessene HALL-Konstante beträgt für Kupfer in guter Übereinstimmung mit unserer Rechnung  $-5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{C}$ .

Für Aluminium hingegen beträgt die HALL-Konstante  $+9,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{C}$ . Das positive Vorzeichen zeigt, dass hier der Ladungstransport durch Löcher erfolgt.

	n-Halbleiter	Kupfer
$n$	$10^{22}$ bis $10^{26} \text{ m}^{-3}$	$8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$
$A_H$	$-0,06$ bis $-624 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{C}$	$-73 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{C}$
$U_H$	$-0,06$ bis $624 \text{ } \mu\text{V}/\text{T}$	$-73 \text{ pV}/\text{T}$
$v_d$	$0,06$ bis $624 \text{ mm}/\text{s}$	$73 \text{ nm}/\text{s}$

Tab. 2.3: Abschätzung des HALL-Effekt und der Driftgeschwindigkeit für einen Leiter mit quadratischem Querschnitt von 1 mm Kantenlänge bei einem Strom von 1 mA.

## Elektronen auf der Kreisbahn – Spezifische Elektronenladung

Als **spezifische Ladung** eines Elektrons bezeichnet man das Verhältnis  $q_e/m_e$  seiner Ladung zu seiner Masse. Dieses kann bestimmt werden, indem man einen Elektronenstrahl mittels eines Magnetfeldes auf eine Kreisbahn lenkt. Hierzu platziert man ein **Fadenstrahlrohr (WEHNELT-Röhre)** in der Mitte eines **HELMHOLTZ-Spulenpaars** (→ Abb. 2.21, rechts).

ARTHUR RUDOLPH  
BERTHOLD WEHNELT  
1871–1944

HERMANN LUDWIG  
FERDINAND  
VON HELMHOLTZ  
1821–1894

Im Fadenstrahlrohr wird wie in der BRAUN'schen Röhre (→ Seite 43) mittels einer einstellbaren Beschleunigungsspannung  $U$  ein Elektronenstrahl erzeugt. Durch Anregung des in geringer Dichte vorhandenen Wasserstoffs hinterlassen die Elektronen eine leuchtende Spur. Dank ihrer besonderen Geometrie erzeugen die HELMHOLTZ-Spulen im Bereich der WEHNELT-Röhre ein sehr homogenes Magnetfeld, das senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen steht. Da die **LORENTZ-Kraft** (→ Seite 50) stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Elektronen steht, werden die Elektronen auf eine Kreisbahn gezwungen, bei der die LORENTZ-Kraft als **Zentripetalkraft** (→ Seite 28) wirkt (→ Abb. 2.21).

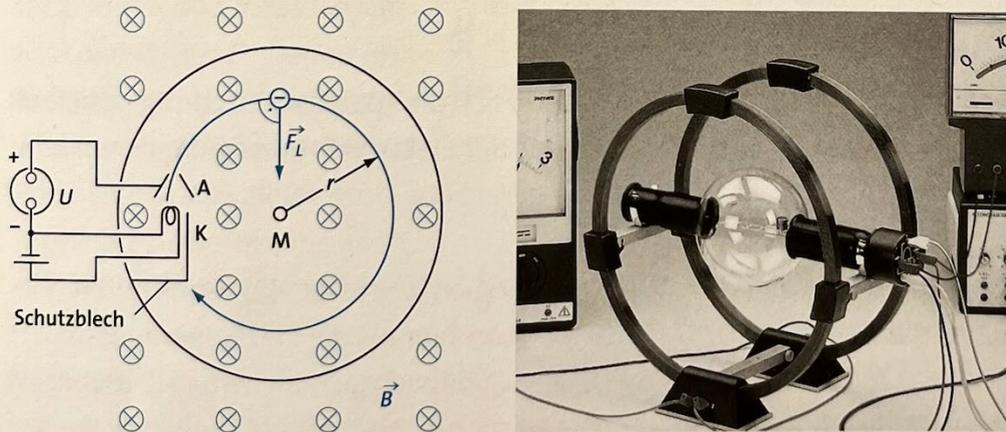


Abb. 2.21: Kreisbahn der Elektronen und Zentripetalkraft  $\vec{F}_Z = \vec{F}_L$  in der WEHNELT-Röhre

- ① Berechnung der Elektronengeschwindigkeit  $v$  aus ihrer kinetischen Energie:

$$q_e \cdot U = W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2 \cdot q_e \cdot U}{m_e}$$

- ② Gleichsetzen der Zentripetalkraft  $F_Z$  und der LORENTZ-Kraft  $F_L$ :

$$F_Z = F_L \text{ mit } F_Z = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \text{ und } F_L = B \cdot q_e \cdot v \Rightarrow v = B \cdot r \cdot \frac{q_e}{m_e} \Leftrightarrow v^2 = \left( B \cdot r \cdot \frac{q_e}{m_e} \right)^2$$

Durch Gleichsetzen mit der Beziehung aus Schritt ① eliminieren wir  $v^2$ :

$$2 \cdot U \cdot \frac{q_e}{m_e} = B^2 \cdot r^2 \cdot \left( \frac{q_e}{m_e} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{q_e}{m_e} = \frac{2 \cdot U}{B^2 \cdot r^2}$$

Ist die magnetische Flussdichte  $B$ , z.B. aus einer Messung mit der HALL-Sonde ( $\rightarrow$  Seite 51) bekannt, so liefert diese Beziehung die **spezifische Elektronenladung**  $q_e/m_e$ . Da die Elementarladung aus dem MILLIKAN-Versuch bekannt ist ( $\rightarrow$  Seite 42), lässt sich so die Masse des Elektrons bestimmen.

### HELMHOLTZ-Spulenpaar

Für eine kurze Spule mit  $n$  Windungen und Radius  $R$  beträgt die magnetische Flussdichte auf der Achse:

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot I \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

Bei der HELMHOLTZ-Anordnung sind die Felder beider Spulen gleich orientiert, sodass ihre Überlagerung ein gleichmäßiges Feld ergibt. Sie sind im Abstand  $x = R/2$  voneinander aufgestellt. Die Feldstärke des erzeugten Magnetfeldes bei einem Strom  $I$  beträgt dann

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot I \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{3/2}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot I \cdot \frac{8}{\sqrt{125} \cdot R}$$

- ③ Einsetzen der magnetischen Flussdichte eines HELMHOLTZ-Spulenpaares in die in ② berechnete Formel für die spezifische Elementarladung liefert:

$$\frac{q_e}{m_e} = \left( \frac{\sqrt{125} \cdot R}{8 \mu_0 \mu_r \cdot n \cdot I} \right)^2 \cdot 2 \frac{U}{r^2} = \left( \frac{\sqrt{250}}{8 \mu_0 \mu_r \cdot n} \cdot \frac{R}{r} \right)^2 \cdot \frac{U}{I^2}$$

- ④ Mit den Formeln aus ② oder ③ lässt sich die spezifische Ladung des Elektrons aus dem beobachteten Radius der Elektronenbewegung berechnen:

$$\frac{q_e}{m_e} = 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$$

Zusammen mit der im MILLIKAN-Versuch ( $\rightarrow$  Seite 42) ermittelten Elementarladung  $e = 1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{C}$  folgt hieraus die Elektronenmasse:

$$m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{kg}$$

Der Radius der Elektronenbahn hängt nach Gleichung ② nur vom Magnetfeld und der Geschwindigkeit der Elektronen ab und wird als **Zyklotronradius** bezeichnet:

Zyklotronradius  $r = \frac{v}{B} \cdot \frac{m}{q}$

Durch die Proportionalität zwischen der Teilchengeschwindigkeit und dem Zyklotronradius ist die Umlauffrequenz (**Zyklotronfrequenz**) unabhängig von der Teilchenenergie:

Zyklotronfrequenz  $f = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{q}{m}$

Die beiden letzten Gleichungen gelten nicht nur für Elektronen, sondern für alle geladenen Teilchen. Sind diese positiv geladen, verläuft die Krümmung jedoch in umgekehrter Richtung.

## E- und B-Feld im Verbund: Geschwindigkeitsfilter für Ionen

Sowohl in der Technik als auch in der Grundlagenforschung ist es häufig wichtig, die chemische Zusammensetzung eines Gases zu analysieren. Eine einfache physikalische Methode beruht auf der Bestimmung der spezifischen Ladung geladener Gasteilchen. Hierzu werden die Gasteilchen in einer Vakuumkammer mit Elektronen beschossen, sodass sie einige ihrer Elektronen verlieren. Sie werden dadurch zu positiv geladenen Ionen, deren Geschwindigkeit völlig statistisch verteilt ist. Durch ein elektrisches Feld werden die Ionen zum Eingang eines Geschwindigkeitsfilters beschleunigt.

Dieses sogenannte **WIEN-filter**, genauer: **WIEN'sche Geschwindigkeitsfilter**, besteht aus einem Plattenkondensator, der von einem Magnetfeld durchsetzt wird (→ Abb. 2.22). Durch die zueinander senkrechte Anordnung von  $E$ - und  $B$ -Feld, zeigt die LORENTZ-Kraft genau in die entgegengesetzte Richtung der elektrischen Feldkraft.

Sind beide Kräfte gleich groß, so können die Ionen das Filter passieren, ohne abgelenkt zu werden:

$$F_E = F_L \Rightarrow qE = qv_{\perp}B \Leftrightarrow v_{\perp} = \frac{E}{B}$$

Nachdem die Ionen das Geschwindigkeitsfilter verlassen haben gelangen sie in ein homogenes Magnetfeld, in dem sie sich entsprechend ihrer spezifischen Ladung (→ Seite 54) auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  bewegen:  $r = \frac{v_{\perp}}{B} \cdot \frac{m}{q}$ .

Mit einem solchen Massenspektrometer lässt sich immer nur das Verhältnis aus der Teilchenmasse zur Ladung bestimmen. Dadurch ist z. B. keine Unterscheidung des zweifach geladenen Eisens  $^{56}\text{Fe}^{2+}$  vom einfach geladenen Silizium  $^{28}\text{Si}^{1+}$  möglich. Meistens ist dies aber auch gar nicht notwendig, da bekannt ist, ob sich Eisen oder Silizium in der Probe befindet. Ist dies nicht bekannt, so nutzt man aus, dass jedes in der Natur vorkommende chemische Element aus verschiedenen Isotopen (→ Seite 158) mit einer unterschiedlichen Masse besteht. Eisen besteht z. B. aus 91,7%  $^{56}\text{Fe}$ ; 5,8%  $^{54}\text{Fe}$ ; 2,5%  $^{57}\text{Fe}$  und 0,3%  $^{58}\text{Fe}$ . Für Silizium sind es entsprechend: 92,23%  $^{28}\text{Si}$ ; 4,67%  $^{29}\text{Si}$  und 3,1%  $^{30}\text{Si}$ .

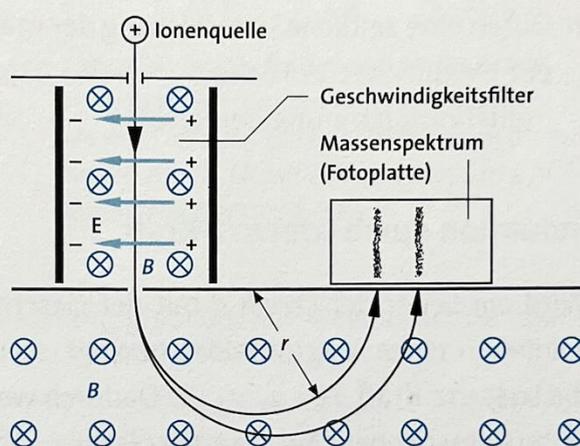


Abb. 2.22: Prinzip eines Massenspektrometers

WILHELM CARL  
WERNER OTTO FRITZ  
FRANZ WIEN  
1864–1928

## 2.3 Induktion

Die magnetische Induktion entsteht durch Wechselwirkungen zwischen magnetischen Feldern und Ladungen:

- ⊙ Elektronen in einem ruhenden stromdurchflossenen Leiter werden durch die LORENTZ-Kraft abgelenkt. Dadurch entsteht senkrecht zur Stromrichtung eine in der Regel sehr kleine Induktionsspannung (HALL-Effekt, → Seite 51).
- ⊙ In einem Leiter, der sich senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes bewegt, werden die Elektronen durch die LORENTZ-Kraft beschleunigt und es entsteht eine Induktionsspannung (siehe unten).
- ⊙ Durch eine zeitliche Veränderung der magnetischen Flussdichte entsteht ein elektrisches Wirbelfeld (→ Seite 63), das in einer Leiterschleife eine Induktionsspannung hervorruft.

### Induktion durch LORENTZ-Kraft

Wird ein Leiter der Länge  $d$  mit der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes bewegt, so wirkt auf die Elektronen in ihm die LORENTZ-Kraft  $F_L = q_e \cdot v_{\perp} \cdot B$ . Dadurch werden die Elektronen entlang des Leiters verschoben. Bei einem isolierten Leiter können die Elektronen nicht abfließen und es entsteht ein elektrisches Feld zwischen den Leiterenden:

$$E = \frac{U_{\text{ind}}}{d}$$

Hierbei ist  $U_{\text{ind}}$  die **Induktionsspannung**. Sie errechnet sich im stationären Zustand aus dem Gleichgewicht mit der Feldkraft  $F_E = q_e \cdot E$ :

$$F_E = F_L \Rightarrow q_e \cdot \frac{U_{\text{ind}}}{d} = q_e \cdot v_{\perp} \cdot B \Rightarrow U_{\text{ind}} = B \cdot d \cdot v_{\perp}$$

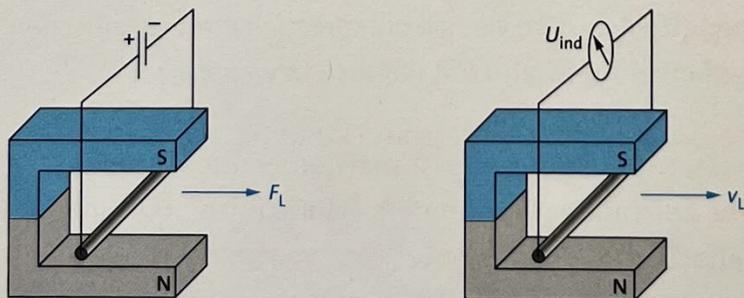


Abb. 2.23: Ein stromdurchflossener Leiter wird im homogenen Magnetfeld eines Hufeisenmagneten durch die LORENTZ-Kraft bewegt (links).

Wird hingegen der Leiter bewegt, verursacht die LORENTZ-Kraft eine Induktionsspannung an den Leiterenden (rechtes Bild).

## Induktion durch Veränderung der Querschnittsfläche

Betrachten wir eine einfache Leiterschleife der Querschnittsfläche  $A_{\perp}$  in einem homogenen Magnetfeld ( $\rightarrow$  Abb. 2.24). Wird die rechte Kante der Leiterschleife mit der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  nach rechts verschoben, so induziert die LORENTZ-Kraft in ihr die Spannung  $U_{\text{ind}} = B \cdot d \cdot v_{\perp}$ .

Drücken wir die Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  durch die Änderung der Querschnittsfläche aus, so folgt:

$$d \cdot v_{\perp} = \frac{d \cdot \Delta s_{\perp}}{\Delta t} = \frac{\Delta A_{\perp}}{\Delta t} = \dot{A}_{\perp}$$

$$\Rightarrow U_{\text{ind}} = B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} = B \cdot \dot{A}_{\perp}$$

Diese Gleichung für  $U_{\text{ind}}$  gilt unabhängig davon, auf welche Art die Querschnittsfläche verändert wird.

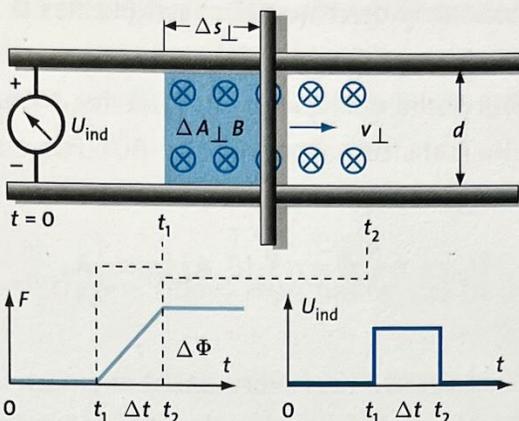


Abb. 2.24: Durch die Bewegung des Leiters verändert sich die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche der Leiterschleife. Durch diese Änderung der Flussdichte entsteht eine Induktionsspannung.

Eine Leiterschleife wird von einem homogenen magnetischen Feld durchsetzt und senkrecht zu den Feldlinien mit der **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega$  rotiert. Die Querschnittsfläche ändert sich dadurch periodisch:

$$A_{\perp} = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow U_{\text{ind}} = B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} = -B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Wird anstelle einer Leiterschleife eine Spule mit  $n$  Windungen rotiert, so ist die effektive Querschnittsfläche  $n$ -mal so groß:

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot A \cdot n \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

### Einfacher Generator

**Tipp:** Wird an die Spule eine Wechselspannung angeschlossen, so wird aus dem Generator ein Motor.

## Induktion durch Veränderung des magnetischen Flusses

Wird die Querschnittsfläche einer Leiterschleife verändert, so führt dies zu einer Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} = B \cdot \dot{A}$$

Solange das Magnetfeld konstant ist, lässt sich dieser Zusammenhang auch wie folgt schreiben:

$$U_{\text{ind}} = \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = \frac{d}{dt} \Phi = \dot{\Phi}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \Phi}$

Der **magnetische Fluss**  $\Phi$  entspricht anschaulich der Anzahl der Feldlinien, die durch die Fläche  $A_{\perp}$  hindurchtreten. Experimente zeigen, dass diese Veränderung des magnetischen Flusses  $\Phi$  für die Induktionsspannung verantwortlich ist. Sie tritt daher auch auf, wenn sich die magnetische Flussdichte  $B$  anstelle der Querschnittsfläche  $A_{\perp}$  ändert. Nach diesem Prinzip arbeitet ein Transformator ( $\rightarrow$  Seite 60). Für eine Spule mit  $n$  Windungen gilt damit ganz allgemein:

$$U_{\text{ind}} = n \frac{d}{dt} \Phi = n \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = n \cdot \left( A_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_{\perp}}{dt} \right)$$

### Induktion, magnetischer Fluss

Die **LORENTZ-Kraft** verursacht in einem Leiter der Länge  $d$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  senkrecht zu den Feldlinien eines magnetischen Feldes mit Flussdichte  $B$  bewegt, die Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = B \cdot d \cdot v_{\perp}$$

Analog verursacht eine Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi = B \cdot A_{\perp}$  in einer Spule mit  $n$  Windungen die Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = n \frac{d}{dt} \Phi = n \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = n \cdot \left( A_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_{\perp}}{dt} \right).$$

### Vorsicht: Falle

#### Vorzeichen der Induktionsspannung

Die Formeln der vorigen Abschnitte für die Induktionsspannung machen keine Aussage zur Richtung der Induktionsspannung.

Diese Aussage folgt erst aus der **LENZ'schen Regel**.

### LENZ'sche Regel

Bewegt sich ein Stabmagnet auf die Öffnung einer Leiterschleife zu, so verursacht die Zunahme des magnetischen Flusses eine Induktionsspannung. Ist die Leiterschleife geschlossen, so fließt ein Induktionsstrom, der seinerseits ein Magnetfeld hervorbringt.

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die Energie zum Aufbau des Induktionsstroms durch die Bewegung des Stabmagneten aufgebracht werden muss. Mit anderen Worten: Die Bewegung des Stabmagneten wird gebremst. Da diese Bremswirkung nur durch das induzierte Magnetfeld der Leiterschleife hervorgerufen sein kann, muss seine Richtung dem Magnetfeld des Stabmagneten entgegengerichtet sein. Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein und wird als **LENZ'sche Regel** bezeichnet.

HEINRICH FRIEDRICH  
EMIL LENZ  
1804–1865

### LENZ'sche Regel

Der induzierte Strom ist immer so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt.

## Selbstinduktion

Ändert sich die Stromstärke in einer Spule, so führt dies zu einer Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi$ . Diese Änderung verursacht nun ihrerseits in der Spule eine Induktionsspannung, die nach der LENZ'schen Regel ihrer Ursache entgegengerichtet ist:

$$I_{\text{Spule}} = \frac{U_{\text{Spule}} - U_{\text{ind}}}{R_{\text{Spule}}} = \frac{U_{\text{Spule}} - n \dot{\Phi}}{R_{\text{Spule}}}$$

Um der LENZ'schen Regel Rechnung zu tragen, findet man häufig die Definition:

$$U_{\text{Selbstinduktion}} = -n \dot{\Phi}$$

Kennen wir für eine Spule den Zusammenhang zwischen der Stromstärke und dem magnetischen Fluss  $\Phi = B \cdot A$ , so lässt sich diese Gleichung weiter umformen:

$$B_{\text{langgestreckte Spule}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l} \Rightarrow U_{\text{Selbstinduktion}} = -n \dot{\Phi} = \underbrace{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n}{l}}_{=: L} \cdot \dot{I} = -L \cdot \dot{I}$$

Die Proportionalitätskonstante  $L$  heißt **Induktivität**. ihr Wert ist für die jeweilige Spule charakteristisch und wird in der Regel experimentell ermittelt. Die Einheit der Induktivität wurde nach dem amerikanischen Physiker JOSEPH HENRY benannt:

JOSEPH HENRY  
1797–1878

$$1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

Henry

Durch Integration der Selbstinduktionsspannung lässt sich auch der magnetische Fluss der Spule durch die Induktivität ausdrücken:

$$U_{\text{Selbstinduktion}} = -n \dot{\Phi} = -L \cdot \dot{I} \Leftrightarrow \dot{\Phi} = \frac{L}{n} \dot{I} \Leftrightarrow \Phi = \frac{L}{n} I$$

Eine reale Spule lässt sich idealisieren als Reihenschaltung eines Widerstandes  $R$  und einer widerstandsfreien Induktivität  $L$ .

**Spulenstrom  
einschalten**

Verbinden wir diese Reihenschaltung mit der Betriebsspannung  $U_B$ , so entsteht eine Selbstinduktionsspannung (Gegenspannung)

$$U_{\text{Selbstinduktion}} = -L \cdot \dot{I}$$

Durch den Widerstand fließt damit der Strom

$$I = \frac{U_B}{R} - \frac{L}{R} \cdot \dot{I}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$I(t) = \frac{U_B}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \text{ mit } \tau = \frac{L}{R}$$

Der Stromverlauf ist völlig analog zum Anstieg der Spannung eines Kondensators, der über einen Widerstand geladen wird (→ Seite 41).

### Spulenstrom ausschalten

In einer Parallelschaltung aus Spule und Widerstand hört der Strom nicht sofort auf, wenn die Spule von der Versorgungsspannung getrennt wird, da die Änderung des magnetischen Flusses einen Strom induziert:

$$I_{\text{Selbstinduktion}} = \frac{-L \cdot \dot{I}}{R}$$

Bezeichnet  $I_0$  den Spulenstrom vor dem Abschalten, so lautet die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Der Verlauf dieser Stromkurve ist völlig äquivalent zur Abnahme der Spannung an einem Kondensator, der über einen Widerstand entladen wird (→ Seite 41).

Das OHM'sche Gesetz  $U = R \cdot I$  liefert uns die zu diesem Strom gehörige Induktionsspannung:

$$U_{\text{Selbstinduktion}}(t) = R \cdot I(t) = R \cdot I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)$$

Die Induktionsspannung ist zu Beginn ( $t = 0$ ) am größten und nimmt dann exponentiell ab. Für den Sonderfall  $R \rightarrow \infty$  wird auch die Induktionsspannung unendlich. Tatsächlich führt dies beim Öffnen eines Schalters zu einer Bogenentladung zwischen den Schalterkontakten. Um Schäden durch solche Überspannungen zu vermeiden, sollte einer Spule stets ein Widerstand, ein Kondensator oder eine Diode in Sperrrichtung (**Freilaufdiode**) parallel geschaltet werden.

Technisch ausgenutzt wird dieser Effekt hingegen zur Erzeugung von Hochspannungen für Blitzröhren oder Zündkerzen bei Autos mit Benzinmotor.

### Transformator

Ein **Transformator** besteht aus zwei Spulen, die um einen gemeinsamen ringförmigen ferromagnetischen (→ Seite 46) Kern gewickelt sind. Die **Primärspule** wird an eine Wechselspannung  $U_1$  angeschlossen (→ Abb. 2.25).

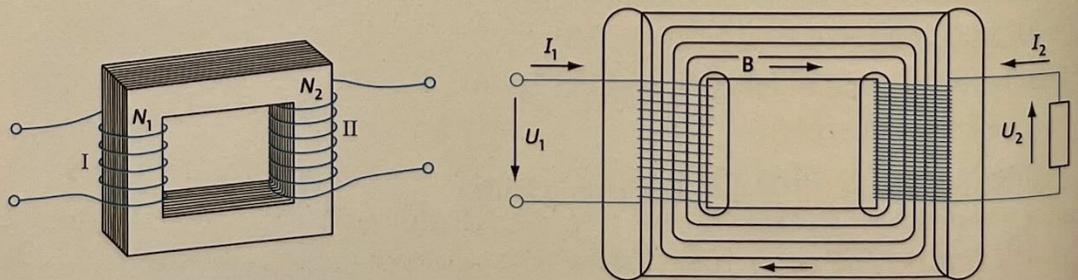


Abb. 2.25: Spannungen, Ströme und magnetischer Fluss im Transformator

Vernachlässigen wir den OHM'schen Widerstand der Wicklung, so entspricht die **Klemmenspannung**  $U_1$  der Selbstinduktionsspannung:

$$U_1 = -U_{\text{Selbstinduktion}} = n_1 \dot{\Phi}$$

Da der magnetische Fluss vollständig innerhalb des Kerns verläuft, induziert die Flussänderung in der **Sekundärspule** die Spannung  $U_2$ :

$$U_2 = -n_2 \dot{\Phi}.$$

Die Spannungsübersetzung des Transformators ist damit

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{n_2}{n_1}.$$

Da sich diese Beziehung unmittelbar aus dem Induktionsgesetz ergibt, ist sie unabhängig von einer Belastung der Sekundärseite durch einen Widerstand.

**Leerlauf:**  $U_1 = \hat{U}_1 \cos \omega t = -L_1 \dot{I}_{1,\text{Leerlauf}} \Rightarrow I_{1,\text{Leerlauf}} = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} \sin \omega t.$

Die aufgenommene Leistung beträgt damit:

$$P_{1,\text{Leerlauf}} = U_1 \cdot I_{1,\text{Leerlauf}} = \frac{\hat{U}_1^2}{\omega L_1} \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{\hat{U}_1^2}{2\omega L_1} \sin(2\omega t)$$

Im zeitlichen Mittel wird keine Leistung aufgenommen, da Strom und Spannung um  $\pi/2$  gegeneinander versetzt sind. Man spricht daher auch von einem **Blindstrom**.

Ein realer Transformator nimmt auch im Leerlauf eine geringe Leistung auf, die er in Wärme umwandelt. Die Ursache hierfür sind der OHM'sche Widerstand der Wicklung sowie Verluste durch Wirbelströme ( $\rightarrow$  Seite 63) im Kern.

**Betrieb:** Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses im Kern wird unabhängig von der Belastung der Sekundärseite durch die Betriebsspannung  $U_1$  bestimmt:  $\dot{\Phi} = U_1/n_1$ .

Wird die Sekundärseite des Transformators mit einem OHM'schen Widerstand belastet, so fließt hier der Strom  $I_{2,\text{Last}} = U_2/R$ . Dieser induziert seinerseits einen magnetischen Fluss  $\Phi_{2,\text{Last}}(t)$ . Da sich der magnetische Fluss im Kern insgesamt jedoch nicht ändert, muss der zusätzliche Fluss  $\Phi_{2,\text{Last}}(t)$  durch einen zusätzlichen Strom  $I_{1,\text{Last}}$  in der Primärspule kompensiert werden. Nach dem Energieerhaltungssatz ( $\rightarrow$  Seite 9) folgt:

$$P = U_1 \cdot I_{1,\text{Last}} = U_2 \cdot I_{2,\text{Last}} = \frac{n_2}{n_1} U_1 \cdot I_{2,\text{Last}} \Rightarrow \frac{I_{2,\text{Last}}}{I_{1,\text{Last}}} = \frac{n_1}{n_2}$$

Insgesamt fließt damit durch die Primärspule der Strom  $I_1 = I_{1,\text{Leerlauf}} + I_{1,\text{Last}}$ , wobei nur der Laststrom zur Leistung beiträgt. Wird die Sekundärseite des Trafos kurzgeschlossen, so ist  $U_2 = 0$  und damit auch  $I_{1,\text{Leerlauf}} = 0$ .

## Feldenergie

Mithilfe der **Selbstinduktionsspannung** ( $\rightarrow$  Seite 59) lässt sich die Energie des magnetischen Feldes berechnen:

$$W_{\text{mag}} = \int U \cdot I dt; \text{ mit } U = L \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow W_{\text{mag}} = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Für eine langgestreckte Spule ergibt sich wegen  $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A \cdot \frac{n^2}{l}$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A \cdot \frac{n^2}{l} \cdot I^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{l} \right)^2}_{= B^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot A \cdot l}_{= V} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 \cdot V.$$

Dies ist die Energie, die im Volumen  $V$  eines homogenen Magnetfeldes gespeichert ist. Die magnetische Energiedichte folgt hieraus durch Division durch  $V$ :

Energiedichte 
$$\varrho_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 = \frac{1}{2} H \cdot B$$

Eine genauere Herleitung liefert das vektorielle Ergebnis  $\varrho_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ .

Die Energiedichte ist unabhängig von der Existenz einer Spule. Daher lässt sich die Gleichung durch Integration auf inhomogene Felder verallgemeinern und z. B. bei elektromagnetischen Wellen anwenden ( $\rightarrow$  Seite 101 ff.).

### Spule als Energie- speicher

Die in einer Spule gespeicherte Energie beträgt  $W_{\text{mag}} = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2$ .

Die **Energie des magnetischen Feldes** ist von der Existenz der Spule unabhängig und beträgt für homogene Felder:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} V \cdot B^2$$

Hieraus folgt die **Energiedichte**  $\varrho_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

### Tragkraft Hufeisen magnet

Werden die Pole eines Hufeisenmagneten durch ein ferromagnetisches Material ( $\rightarrow$  Seite 46), wie z. B. Eisen, verbunden, so verlaufen die Feldlinien nahezu vollständig im Innern dieses Verbindungsstücks, das als **Joch** bezeichnet wird. Wird dieses von einem Pol um den kleinen Abstand  $dx$  entfernt, so ändert dies nichts am Verlauf der Feldlinien und es entsteht ein von Feldlinien durchsetzter Raum mit dem Volumen  $V = A \cdot dx$ .

Die in diesem Volumen gespeicherte Feldenergie beträgt:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 \cdot A \cdot dx$$

Durch Ableiten nach dem Abstand  $dx$  folgt hieraus die Haltekraft des Magneten:

$$F_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 \cdot A$$

## Das elektrische Wirbelfeld

Eine Änderung der magnetischen Flussdichte induziert in einer Leiterschleife eine Spannung. Wird die Leiterschleife kurzgeschlossen, so fließt ein Induktionsstrom – angetrieben durch ein **elektrisches Wirbelfeld** (→ Beispiel auf Seite 77). Die Existenz dieses elektrischen Wirbelfeldes ist unabhängig von der Leiterschleife, wie folgendes Experiment zeigt: Eine Glaskugel, gefüllt mit einem Helium-Neon-Gasgemisch von geringem Druck, wird vom Magnetfeld einer Spule durchsetzt, die an eine hochfrequente Wechselspannung angeschlossen ist.

Durch die schnelle Änderung der magnetischen Flussdichte entsteht ein starkes elektrisches Wirbelfeld, das zufällig ionisierte Gasatome auf einer Kreisbahn beschleunigt. Durch Zusammenstöße mit anderen Gasatomen entstehen weitere Ionen, wodurch die Stromstärke schnell ansteigt. Da hin und wieder Ionen und Elektronen auch wieder rekombinieren, (→ Abb. 2.26), leuchtet das Gas entlang des Strompfads hell auf.

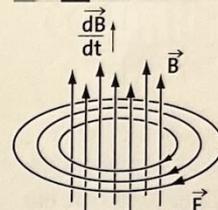


Abb. 2.26: Ein hochfrequentes magnetisches Wechselfeld induziert ein elektrisches Wirbelfeld, das die Gasatome zum Leuchten anregt.

## Die MAXWELL-Gleichungen – Interaktion von elektrischem und magnetischem Feld

Eine geschlossene Theorie über den **Elektromagnetismus** wurde erstmals in den Jahren 1861 und 1865 von **JAMES CLERK MAXWELL** veröffentlicht. In die heute bekannte Form brachten die MAXWELL'schen Gleichungen 1884 **OLIVER HEAVISIDE** und **WILLARD GIBBS**.

Die vier MAXWELL'schen Gleichungen lassen sich in zwei mathematisch völlig äquivalenten Formen darstellen: Als Integral oder als Ableitung (Anhang → Seite 246 und 247).

### ⊙ Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

$$\oiint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Da es keine magnetischen Monopole gibt, ist das Integral der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  über eine geschlossene Oberfläche  $O$  immer null. Mit anderen Worten: Alle Feldlinien, die in das Volumen hineingehen müssen es auch wieder verlassen.

### ⊙ GAUSS'scher Satz: Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes

$$\oiint_O \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{mit } Q = \iiint_V \rho dV \quad \text{und } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche  $O$  entspricht der eingeschlossenen Ladung  $Q$  (→ Seite 39).

JAMES CLERK MAXWELL  
1831–1879  
OLIVER HEAVISIDE  
1850–1925  
JOSIAH WILLARD GIBBS  
1839–1903

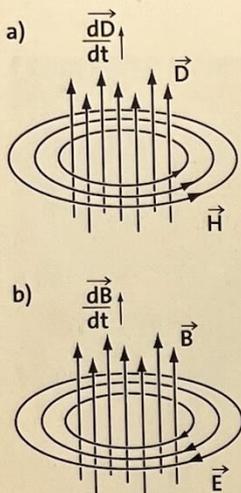


Abb. 2.27: a) Ein zeitabhängiges elektrisches Feld ruft ein magnetisches Wirbelfeld hervor.  
b) Ein zeitabhängiges magnetisches Feld ruft ein elektrisches Wirbelfeld hervor.

### Vektoranalysis

siehe auch  
Anhang  
→ Seite 247f.

#### ⊙ FARADAY'sches Induktionsgesetz

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

Eine zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$  induziert ein elektrisches Wirbelfeld. Dabei ist das geschlossene Kurvenintegral über die elektrische Feldstärke genauso groß wie die zeitliche Änderung des von der Kurve begrenzten magnetischen Flusses.

#### ⊙ AMPÈRE'sches Gesetz mit MAXWELL'scher Ergänzung des Verschiebungsstroms (Durchflutungssatz)

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \iint_O \vec{D} \cdot d\vec{A} + I \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{d}{dt} \vec{D} + \vec{j}$$

$$\text{mit } I = \iint_O \vec{j} \cdot d\vec{A} \text{ sowie } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \text{ und } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Aus der Magnetostatik ist bekannt, dass ein Strom  $I$  von einem magnetischen Wirbelfeld umgeben ist. Maxwell ergänzte, dass auch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes ein magnetisches Wirbelfeld hervorruft. Erst durch diese Ergänzung lässt sich die Existenz elektromagnetischer Wellen erklären.

Nabla-Operator:  $\vec{\nabla} := \left( \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$ ; Gradient:  $\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \varphi(\vec{r})$

Divergenz:  $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ ; Rotation:  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

Ist  $\vec{F}(\vec{r})$  eine vektorielle Funktion,  $K = \{\vec{r}(t) | a \leq t \leq b\}$  ein Kurvenstück und  $O = \{\vec{r}(u, v) | a_1 \leq u \leq b_1 \text{ und } a_2 \leq v \leq b_2\}$  eine Oberfläche, so ist

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_b^a \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

$$\iint_O \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left( \frac{d}{du} \vec{r}(u, v) \times \frac{d}{dv} \vec{r}(u, v) \right) du dv$$

### CGS- und MKSA-System

Das heute in Deutschland übliche Einheitensystem basiert auf den Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampere, Kelvin, Candela und Mol (MKSA-System), von denen alle anderen Einheiten wie z.B. Newton, Joule oder Volt abgeleitet sind. Im Zuge der weltweiten Vereinheitlichung der verschiedenen Maßsysteme einigte man sich 1954 darauf, das MKSA-System international anzuwenden und zum gesetzlichen Standard zu erklären. Es wird daher häufig auch als **internationales Einheitensystem** oder SI-System (französisch „Système international d'unités“) bezeichnet.

Die Wahl der Stromstärke (Ampere) als Grundeinheit des MKSA-Systems hat in der Praxis einige Vorteile, führt jedoch in den Formeln der Elektrodynamik zu den Feldkonstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$ . In der Physik-Literatur wird daher häufig an Stelle des MKSA-Systems das GAUSS'sche CGS-System verwendet, das sich im praktischen Gebrauch nur in den Einheiten des Elektromagnetismus unterscheidet. Als mechanische/elektrische Grundeinheiten dienen im **CGS-System** die Einheiten **C**entimeter, **G**ramm und **S**ekunde. Im Gegensatz zum MKSA-System ist die Stromstärke eine abgeleitete Einheit. Dadurch werden die elektrische und magnetische Feldkonstante  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  überflüssig und können aus den Formeln eliminiert werden. Man definiert daher:

$$\epsilon_0 = \mu_0 = \frac{1}{4\pi}$$

Diese scheinbar kleine Änderung beeinflusst sämtliche elektrischen und magnetischen Messgrößen. Um zwischen den Maßsystemen zu wechseln, müssen daher alle elektrischen und magnetischen Größen ersetzt werden (→ Tab. 2.4).

CARL FRIEDRICH GAUß  
(häufig auch GAUSS)  
1777–1855

Größe	CGS-System	MKSA-System
Vakuum- Lichtgeschwindigkeit	$c$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$
elektrisches Feld, Potential, Spannung	$E, \varphi, U$	$\sqrt{4\pi \epsilon_0} (E, \varphi, U)$
dielektrische Verschiebung	$D$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} D$
Ladung, Ladungsdichte, Stromstärke, Stromdichte, Polarisierung	$q, \rho, I, j, P$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi \epsilon_0}} (q, \rho, I, j, P)$
magnetische Flussdichte	$B$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B$
magnetische Feldstärke	$H$	$\sqrt{4\pi \mu_0} H$
Magnetisierung	$M$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} M$
Leitfähigkeit	$\sigma$	$\frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0}$
Permittivität	$\epsilon$	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Permeabilität	$\mu$	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Widerstand, Impedanz	$R, Z$	$4\pi \epsilon_0 (R, Z)$
Induktivität	$L$	$4\pi \epsilon_0 L$
Kapazität	$C$	$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} C$
Suszeptibilität	$\chi_e, \chi_m$	$\frac{1}{4\pi} (\chi_e, \chi_m)$

Um eine Gleichung vom CGS-System in das MKSA-System zu überführen, ersetzt man die Symbole in der Spalte CGS-System durch die Symbole in der Spalte MKSA-System.

Die Umwandlung in umgekehrter Richtung ist ebenfalls möglich. Zur Vereinfachung wurden Symbole, die gleichartig transformieren, zu Blöcken zusammengefasst.

Tab. 2.4: CGS-System und MKSA-System

## Überblick

$$e = 1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

$$\epsilon_r = 1 \text{ in Vakuum,}$$

$$\epsilon_r \approx 1 \text{ in Luft, sonst}$$

$$\epsilon_r > 1$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

$$= 1,256\,64 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

$$\left[ \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \text{T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

Elektrische Ladungen werden durch überschüssige oder fehlende Elektronen mit der Ladung  $q_e = -e$  verursacht (MILLIKAN-Versuch).

Feldlinien zwischen ihnen zeigen die Kraft auf eine positive Probeladung an. In einem Metall schirmen die frei beweglichen Elektronen elektrische Felder durch Influenz ab, Isolatoren zeigen eine schwächere Abschirmung aufgrund von Verschiebungs- oder Orientierungspolarisation.

$$\text{elektrische Feldstärke: } \vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) \quad \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

$$\text{potentielle Energie: } W_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = q\varphi(\vec{r}) \quad [\text{J}]$$

$$\text{Spannung: } U_{\vec{r}_1, \vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad [\text{V}]$$

$$\text{Kapazität eines (Platten-)Kondensators: } C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \quad \left[ F = \frac{\text{C}}{\text{V}} \right]$$

$$\text{Flächendichte (Verschiebungsdichte): } \varrho_A = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = D \quad \left[ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\text{COULOMB-Feld: } E_Q(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2} \Rightarrow F_{qQ} = q \cdot E_Q = \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$

$$\text{COULOMB-Potential: } \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot r}$$

$$\text{elektrische Energiedichte: } \varrho_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Es gibt keine magnetischen Monopole, nur Dipole mit einem Nord- und Südpol. Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen und zeigen die Richtung an, in die der Nordpol einer Kompassnadel gezogen wird.

Der HALL-Effekt ermöglicht eine Messung der magnetischen Flussdichte.

$$\text{Langgestreckte Spule: } H = I \cdot \frac{n}{l} \quad \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \text{ bzw. } B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l} \quad \left[ \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

$$\text{LORENTZ-Kraft: } \vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot v \cdot B_{\perp} \quad \text{Achtung: } q_e = -e$$

Durch eine Kombination von E- und B-Feld lässt sich ein Geschwindigkeitsfilter für Ionen aufbauen (WIEN-Filter).

$$\text{Induktionsgesetz: } U_{\text{ind}} = n \frac{d}{dt} \Phi = n \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = n \cdot \left( A_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_{\perp}}{dt} \right)$$

Das Vorzeichen der Induktionsspannung ist so zu wählen, dass der induzierte Strom der Induktionsursache entgegenwirkt (LENZ'sche Regel).

$$\text{Selbstinduktion einer Spule: } U_{\text{Selbstinduktion}} = -n \dot{\Phi} = -L \cdot \dot{I} \Leftrightarrow \Phi = \frac{L}{n} I$$

$$\text{Energiedichte: } \varrho_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2\mu_0 \cdot \mu_r} B^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Ein Stromfluss verursacht ein magnetisches Wirbelfeld, eine Änderung der magnetischen Flussdichte verursacht ein elektrisches Wirbelfeld.