

fit fürs
abi

Oberstufenwissen
Physik

Mit **Profi-
Lernzetteln**

ufe
k



fit fürs abi

Abiwissen in Bestform

Mit **Fit fürs Abi** hast du das **optimale Rundum-Sorglos-Paket** für deine **Abiturvorbereitung**.

Bücher

Das **Fit fürs Abi Oberstufenwissen** gibt es für Biologie, Chemie, Deutsch, Englisch, Erdkunde, Erziehungswissenschaften, Geschichte, Mathematik, Physik, Musik, Politik und Wirtschaft.

Nutze auch das **Fit fürs Abi Klausur-Training**.

Es bietet realistische Klausuraufgaben mit Lösungen zu wichtigen Prüfungsthemen der Fächer Biologie, Chemie, Mathematik und Physik.

Als Lernskript für den Endspurt empfehlen wir **Fit fürs Abi Express**.

Apps

In unserer **Glossar-App** findest du viele Fachbegriffe leicht verständlich erklärt. In unserer **Express-App** warten pro Fach 100 interaktive Test-Aufgaben auf dich.

Unser vielfältiges und kostenloses digitales Angebot zu den Büchern findest du auf www.fit-fuers-abi.de

Lernzettel

Die praktischen **Lernzettel** enthalten die wichtigsten Inhalte aus jedem Kapitel. Du kannst sie zum Lernen ausdrucken oder auf deinem Handy nutzen, wenn du das Buch nicht dabei hast.

Alexa Skill

Teste dein Wissen mit dem **Fit fürs Abi Alexa Skill**: In den Fächern Biologie, Deutsch, Mathematik sowie Politik und Wirtschaft warten über 200 Fragen auf dich.

Videos zur mündlichen Prüfung

Das Abitur ist eine Ausnahmesituation – speziell die mündliche Prüfung. **Julias Videos** helfen dir dabei, den bestmöglichen Auftritt hinzubekommen.



fit fürs abi

Klausur Guide

So klappt das Abi!



www.fit-fuers-abi.de

Digitales Methodentraining für deine Abiturprüfung in Biologie

Unsere E-Learning-Plattform *Fit fürs Abi KlausurGuide* führt dich Schritt für Schritt durch typische Klausuraufgaben und zeigt dir, worauf du achten musst.

Verständliche Lernvideos von erfahrenen Oberstufenlehrkräften unterstützen dich dabei, die Aufgaben eigenständig zu lösen.

Schritt-für-Schritt-Methodentraining

Verständliche Lernvideos

Typische Klausuraufgaben

Von erfahrenen Oberstufen-
lehrkräften entwickelt



fit fürs
abi

Oberstufenwissen
Physik

22
(704)

Oberstufe
Physik

(2025)

Autor:

Dr.-Ing. Dipl.-Phys. Dirk Kähler hat nach einem Abitur mit den Schwerpunkten Mathematik und Physik ein Studium der Physik absolviert und anschließend in der Elektrotechnik über Quantenbauelemente promoviert. Heute arbeitet der Autor als Wissenschaftler bei der Fraunhofer Gesellschaft.

Die erste Auflage von **Fit fürs Abi – Oberstufenwissen Physik** ging unmittelbar aus den eigenen Abiturvorbereitungen des Autors hervor. Über die Jahre entstand hieraus ein umfangreiches Buch zur Oberstufenphysik, das sich hervorragend zur Abiturvorbereitung eignet.

Mitwirkung und didaktische Beratung:

Dr. Maïke Tesch ist Gymnasiallehrerin und Studienleiterin für Physik mit langjähriger Unterrichts- und Prüfungserfahrung. Zuvor war sie in der Lehrerbildung an verschiedenen Universitäten tätig.

© 2024 Westermann Lernwelten GmbH, Georg-Westermann-Allee 66, 38104 Braunschweig
www.westermann.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen bzw. vertraglich zugestanden Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Nähere Informationen zur vertraglich gestatteten Anzahl von Kopien finden Sie auf www.schulbuchkopie.de.

Für Verweise (Links) auf Internet-Adressen gilt folgender Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

Druck A¹ / Jahr 2024

Alle Drucke der Serie A sind im Unterricht parallel verwendbar.

Redaktion: imprint, Zusmarshausen; Marcel Schröder

Kontakt: lernhilfen@westermanngruppe.de

Umschlaggestaltung und Layout: Janssen Kahlert Design und Kommunikation GmbH, Hannover

Umschlagfoto: iStockphoto.com, Calgary, DiyanaDimitrova

Druck und Bindung: Westermann Druck GmbH, Georg-Westermann-Allee 66, 38104 Braunschweig

Liebe Abiturientin, lieber Abiturient,

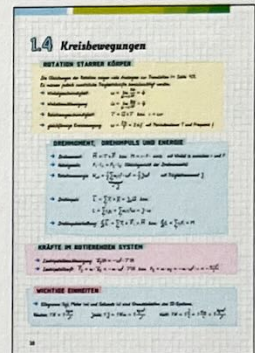
das Abitur rückt näher und du möchtest dich auf deine Prüfungen vorbereiten? *Fit fürs Abi* hilft dir dabei. Du findest hier alle Inhalte, die du für dein Abitur brauchst. Du musst dazu aber nicht das ganze Buch von vorne bis hinten durchlesen.

- ➔ Finde zunächst heraus, welches die **Prüfungsthemen** für deinen Jahrgang sind. Frage dazu deine Lehrkraft oder schaue im Internet die aktuellen Prüfungsvorgaben deines Bundeslandes nach.
- ➔ Wähle dann die **Kapitel im Buch** aus, die du bearbeiten möchtest. Du könntest so vorgehen:
 - Welche Themen sind besonders wichtig?
 - Wo hast du die größten Lücken?
- ➔ Mache einen **Plan** und teile dir die Zeit gut ein, wann du welches Kapitel durcharbeiten möchtest.
- ➔ Arbeite die **Inhalte** dann nach deinem Plan durch.
- ➔ Am Ende des (Teil-)Kapitels findest du praktische **Lernzettel**, auf denen das Wichtigste noch einmal zum Lernen zusammengefasst ist. Die Lernzettel gibt es auch als **Download** auf www.fit-fuers-abi.de. Du kannst sie auf dein Handy laden oder ausdrucken und auch dann damit lernen, wenn du dein Buch nicht dabei hast.
- ➔ Alle wichtigen **Fachbegriffe** findest du am Ende des Buchs im **Glossar** zum Nachschlagen und zum Lernen. Das Glossar gibt es auch als **kostenlose App**. Einfach im *Apple Store* oder bei *Google Play* „Fit fürs Abi“ eingeben!
- ➔ Wenn du den Stoff durchgearbeitet hast, ist es Zeit für **Aufgaben**. Dazu empfehlen wir dir als Ergänzung zu diesem Band das *Fit fürs Abi Klausur-Training*. Es bietet dir Aufgaben, mit denen du dich gezielt auf deine **Klausur** oder deine **mündliche Prüfung** vorbereiten kannst – mit vielen Tipps, wie du die perfekte Lösung findest!
- ➔ Auf www.fit-fuers-abi.de findest du noch weitere hilfreiche Informationen und Tipps zum Thema Abi.

So gehst du perfekt vorbereitet in die Prüfung.

Wir wünschen dir viel Erfolg!

Dein Fit-fürs-Abi-Team



Lernzettel



Glossar, als gratis App

1	Mechanik	8
1.1	Kinematik und Dynamik	8
	Lernzettel: Kinematik und Dynamik	13
1.2	Energie, Impuls, Reibung	14
	Lernzettel: Energie, Impuls, Reibung	21
1.3	Gravitation und Himmelsmechanik	22
	Lernzettel: Gravitation und Himmelsmechanik	28
1.4	Kreisbewegungen	29
	Lernzettel: Kreisbewegungen	38
2	Elektrisches und magnetisches Feld	39
2.1	Elektrostatisches Feld	39
	Lernzettel: Elektrostatisches Feld	54
2.2	Magnetisches Feld	55
	Lernzettel: Magnetisches Feld	68
2.3	Induktion	69
	Lernzettel: Induktion	78
3	Schwingungen	79
3.1	Theorie der harmonischen Schwingungen	79
3.2	Mechanische harmonische Schwingungen ohne Dämpfung	83
	Lernzettel: Harmonische und mechanische Schwingungen	87
3.3	Gedämpfte und angetriebene Schwingungen	88
	Lernzettel: Gedämpfte und angetriebene Schwingungen	95
3.4	Elektrische Schwingungen	96
3.5	Zusammengesetzte Schwingungen	100
	Lernzettel: Elektrische und zusammengesetzte Schwingungen	105
4	Wellen	106
4.1	Ausbreitung von Wellen	106
4.2	Elektromagnetische Wellen	118
4.3	Interferenzphänomene	124
4.4	Polarisation	134
	Lernzettel: Wellen	141
5	Geometrische Optik	143
5.1	Brechung	143
5.2	Optische Systeme	147
	Lernzettel: Geometrische Optik	151

6	Quantenmechanik	152
6.1	Welle-Teilchen-Dualismus	152
	Lernzettel: Welle-Teilchen-Dualismus	163
6.2	Atomaufbau	164
6.3	Festkörperphysik	180
	Lernzettel: Atomaufbau und Festkörperphysik	187
7	Spezielle Relativitätstheorie	189
7.1	Das Relativitätsprinzip	189
	Lernzettel: Das Relativitätsprinzip	194
7.2	LORENTZ-Transformation und MINKOWSKI-Raum	195
	Lernzettel: LORENTZ-Transformation und MINKOWSKI-Raum	205
7.3	Allgemeine Relativitätstheorie	207
	Lernzettel: Allgemeine Relativitätstheorie	210
8	Kern- und Teilchenphysik	211
8.1	Grundlagen	211
	Lernzettel: Grundlagen	222
8.2	Radioaktive Prozesse	224
	Lernzettel: Radioaktive Prozesse	233
9	Thermodynamik (Wärmelehre)	234
9.1	Kinetische Gastheorie	234
	Lernzettel: Kinetische Gastheorie	239
9.2	Ideales und reales Gas	240
	Lernzettel: Ideales und reales Gas	244
9.3	Hauptsätze der Thermodynamik	245
9.4	Wärmestrahlung	247
	Lernzettel: Hauptsätze der Thermodynamik und Wärmestrahlung	250
	Glossar	251
	Mathematischer Anhang	270
	Stichwortverzeichnis	281

Mechanik

Die klassische Mechanik wird oft als „Mutter der Physik“ bezeichnet.

- NEWTONS Axiome und die Erhaltungssätze für Energie und Impuls finden Anwendung in allen Bereichen der Physik.
- Das Beispiel der Kreisbewegung zeigt, welchen Einfluss die Wahl des Bezugssystems hat:
NEWTONS Axiome gelten nur in unbeschleunigten Inertialsystemen, in allen anderen Bezugssystemen treten Trägheitskräfte auf.

1.1 Kinematik und Dynamik

Bezugssysteme



Abb. 1.1: ISAAC NEWTON
1642 – 1726

Für die Beschreibung physikalischer Vorgänge ist die Wahl des Bezugssystems entscheidend. Durch geschickte Wahl eines Bezugspunkts lassen sich Gleichungen häufig stark vereinfachen. Man unterscheidet zwischen unbeschleunigten **Inertialsystemen**, in denen NEWTONS Axiome (→ Seite 11) gelten und beschleunigten Bezugssystemen, in denen Trägheitskräfte (→ Seite 34) auftreten. Das rotierende Bezugssystem einer Kreisbewegung gehört zu den beschleunigten Bezugssystemen.

Bewegungsgleichungen

Ort → Geschwindigkeit → Beschleunigung

Die Gesetze der **Kinematik** beschreiben die Bewegung von Körpern. Häufig genügt für die Beschreibung die Modellvorstellung eines punktförmigen Objekts. Die Position dieses Massepunkts entspricht dem Schwerpunkt des Objekts. Die Bewegung dieses Massepunktes stellt man in einem vorab gewählten Bezugssystem als Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ dar. Der Startpunkt der Bewegung ist $s_0 = s(t_0)$. Ändert sich der Ort in Bezug auf das gewählte Bezugssystem mit der Zeit, hat der Körper eine relative Geschwindigkeit. Man unterscheidet zwischen der **Intervallgeschwindigkeit** oder **Durchschnittsgeschwindigkeit** $\bar{v}$ und der **Momentangeschwindigkeit** v . Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich als Grenzwert der Intervallgeschwindigkeit (Ableitung). Ableitungen nach der Zeit werden in der Physik vereinfacht durch Punkte über der Variablen gekennzeichnet:

Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{bzw.} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit heißt **Beschleunigung**. Analog zur Geschwindigkeit unterscheidet man zwischen der **Intervallbeschleunigung** oder **Durchschnittsbeschleunigung** $\bar{a}$ und der **Momentanbeschleunigung** a . Die Momentanbeschleunigung ergibt sich als Grenzwert der Intervallbeschleunigung (Ableitung):

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{bzw.} \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Beschleunigung

Bei einer **gleichförmigen Bewegung** ist $a = 0$ und damit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konst.}$

Bei einer **gleichmäßig beschleunigten Bewegung** gilt hingegen: $a = \text{konst.}$

	eindimensional	vektoriell	Einheit
Ortskurve	$s(t)$	$\vec{s}(t)$	[m]
Intervallgeschwindigkeit Durchschnittsgeschwindigkeit	$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$	$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
Momentangeschwindigkeit	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$	$\vec{v} = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \dot{\vec{s}}(t)$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
Intervallbeschleunigung Durchschnittsbeschleunigung	$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$	$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
Momentanbeschleunigung	$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t)$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$

Tab. 1.1: Ort → Geschwindigkeit → Beschleunigung

Beschleunigung → Geschwindigkeit → Ort

Die zeitliche Integration der Beschleunigung (→ Integrationsregeln, Anhang Seite 277) liefert eine Geschwindigkeitsänderung in der Zeit von t_0 bis t :

$$\Delta v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt'$$

Bei einer konstanten Beschleunigung wird daraus $\Delta v = a \cdot \Delta t$.

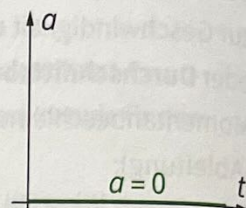
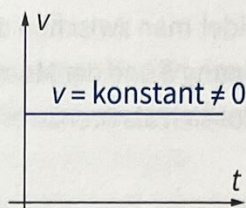
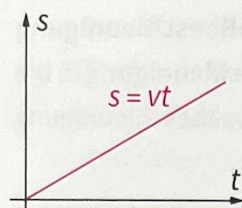
Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich erst durch Addition der Geschwindigkeit v_0 zu Beginn des betrachteten Vorgangs (Integrationskonstante):

$$v(t) = \Delta v + v(t_0) = \Delta v + v_0.$$

In gleicher Weise lässt sich aus dem Geschwindigkeitsverlauf die zurückgelegte Wegstrecke $\Delta s(t)$ und die Ortskurve $s(t)$ ermitteln:

$$\Delta s(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad \text{bzw.} \quad s(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' + s(t_0) = \int_{t_0}^t v(t') dt' + s_0$$

Gleichförmige Bewegung



Ortskurve

eindimensional

$$s(t) = v \cdot (t - t_0) + s_0$$

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

vektoriell

$$\vec{s}(t) = \vec{v} \cdot (t - t_0) + \vec{s}_0$$

$$\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$$

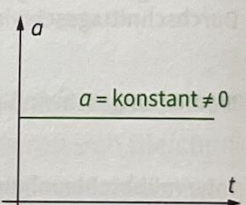
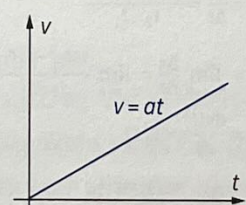
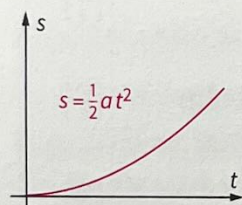
Geschwindigkeit

 $v = \text{konstant}$ $\vec{v} = \text{konstant}$

Beschleunigung

 $a = 0$ $\vec{a} = 0$

Konstante Beschleunigung



Ortskurve

eindimensional

$$s(t) = \frac{1}{2}a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + s_0$$

$$\Delta s = \frac{1}{2}a \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t$$

vektoriell

$$\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{s}_0$$

$$\Delta \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \Delta t^2 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t$$

Geschwindigkeit

$$v(s) = \sqrt{2as} \text{ für } s_0 = v_0 = 0$$

$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$$

Beschleunigung

 $a = \text{konstant}$ $\vec{a} = \text{konstant}$

TIPP

Die Auswertung von Messdaten ist in der Mechanik von zentraler Bedeutung. Da sie in allen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle spielt, wird sie im Anhang (→ Auswertung von Messdaten, Seite 270) gesondert behandelt.

Die drei Axiome NEWTONS

Die Axiome NEWTONS bilden die Grundlage der **Dynamik**, die im Gegensatz zur **Kinematik** die Ursachen für eine Bewegungsänderung beschreibt. **Kräfte** vermitteln die Wechselwirkung zwischen Körpern und führen so zu einer Änderung ihres **Impulses**.

Das Trägheitsprinzip (1. Axiom)

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte null ist:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

Dieser Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung wird durch den **Impuls** p beschrieben:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Die Proportionalitätskonstante m zur Geschwindigkeit v wird als „träge“ **Masse** bezeichnet. Mit dieser Definition lässt sich das **Trägheitsprinzip** auch so formulieren:

IMPULSERHALTUNGSSATZ

Der Impuls eines Körpers bleibt konstant, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte null ist.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum \vec{p} = \text{konst.}$$

Die Einheit der Masse ist das Kilogramm. Im SI-System (CGS- und MKSA-System) ist das Kilogramm eine Grundeinheit – und nicht etwa das Gramm, wie man meinen könnte.

Kilogramm

GLEICHGEWICHT DER KRÄFTE

Ist die Summe aller Kräfte, die auf einen Körper wirken Null, so herrscht ein **Kräftegleichgewicht**. Wichtig ist, dass die Addition vektoriell erfolgt und alle Kräfte am gleichen Punkt angreifen. Greifen die Kräfte an verschiedenen Punkten an, tritt ein **Drehmoment** (→ Seite 30) auf, das den Körper in Rotation versetzt.

Das Kräftegleichgewicht wird in der Physik sehr häufig benötigt (→ MILLIKAN-Versuch auf Seite 52, HALL-Effekt auf Seite 62, WIEN'sche Geschwindigkeitsfilter auf Seite 67).

Das Aktionsprinzip (2. Axiom)

Eine Bewegungsänderung (**Beschleunigung**, $\vec{a}$) findet proportional zur einwirkenden Kraft $\vec{F}$ und in dieselbe Richtung statt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Mit $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ und $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ folgt hieraus der Trägheitssatz:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

Die Kraft F kann als eine Ableitung des Impulses p nach der Zeit betrachtet werden.

NEWTON Die Einheit der Kraft ist das Newton: $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$

Das Reaktionsprinzip (3. Axiom)

Zu jeder Kraft existiert eine gleich starke, ihr entgegen wirkende Kraft.

„Actio gleich Reactio“: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

NEWTONS AXIOME

Im **Inertialsystem** gelten nach NEWTONS Axiomen der klassischen Mechanik folgende Zusammenhänge:

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{p}$

Gleichgewicht der Kräfte: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

Trägheitssatz: $\Sigma \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{konstant}$

Kinematik und Dynamik

1.1

BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

→ Ort → Geschwindigkeit → Beschleunigung

	eindimensional	vektoriell	Einheit
Ortskurve	$s(t)$	$\vec{s}(t)$	[m]
Intervallgeschwindigkeit	$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$	$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$
Momentangeschwindigkeit	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$	$\vec{v} = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \dot{\vec{s}}(t)$	$\left[\frac{m}{s}\right]$
Intervallbeschleunigung	$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
Momentanbeschleunigung	$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t)$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$

→ Gleichförmige Bewegung und konstante Beschleunigung

	eindimensional	vektoriell
gleichförmige Bewegung $v = \text{konst.} \Leftrightarrow a = 0$	$s(t) = v \cdot (t - t_0) + s_0$ $\Delta s = v \cdot \Delta t$	$\vec{s}(t) = \vec{v} \cdot (t - t_0) + \vec{s}_0$ $\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$
konstante Beschleunigung (freier Fall) $a = \text{konst.}$	$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + s_0$ $\Delta s = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t$ $v(s) = \sqrt{2as}$ für $s_0 = v_0 = 0$	$s(t) = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{s}_0$ $\Delta \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \Delta t^2 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t$ $\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0$

NEWTONS AXIOME

- Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{d}{dt} \vec{s} = m \cdot \dot{\vec{s}}$
- Impulserhaltung: $\frac{d}{dt} \vec{p} = m \cdot \ddot{\vec{s}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$
- Gleichgewicht der Kräfte: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$
- Trägheitssatz: $\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{konstant}$

1.2 Energie, Impuls, Reibung

Arbeit, Leistung, Energie

In der Physik bezeichnet die **Arbeit** W (von engl. *work*) den Energieumsatz bei einer mechanischen Bewegung. Ist die Kraft konstant und wirkt in der Bewegungsrichtung, dann gilt die Formel „Arbeit = Kraft mal Weg“:

Arbeit $W = F \cdot s$ bzw. $\Delta W = F \cdot \Delta s$ oder allgemeiner $W(s) = \int_{s_0}^s F(s) ds$

FORMELZEICHEN FÜR ENERGIE W ODER E ?

In Schulbüchern wird häufig das Symbol E für Energie verwendet. Um Verwechslungen mit der elektrischen Feldstärke E zu vermeiden, wird in diesem Buch für die Energie grundsätzlich W verwendet, was sich vom englischen *work* ableitet.

Joule Die Einheit der Energie ist das Joule: $1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$

Unterscheidet sich die Richtung der Kraft von der Bewegungsrichtung, so muss das Skalarprodukt aus Kraft und Weg gebildet werden. Ist dieses konstant, wie bei einer Kreisbewegung, bleibt das Integral leicht zu berechnen:

$$W(\vec{s}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} \int_{s_0}^s F(s) ds = \cos(\varphi) \int_{s_0}^s F(s) ds$$

$$\Rightarrow W(s) = \cos(\varphi) \cdot F \cdot s \text{ bei konstanter Kraft } F$$

Gilt dies nicht, erhält man ein vektorielles Kurvenintegral ($\rightarrow$ Anhang Seite 278), das über den Schulstoff deutlich hinaus geht:

$$W(\vec{s}) = \int_{\vec{s}_0}^{\vec{s}} \vec{F}(\vec{s}') \cdot d\vec{s}' \text{ mit Skalarprodukt } \vec{F}(\vec{s}') \cdot d\vec{s}'.$$

VORSICHT: FALLE

Bei der Integration des Weges wird das **Skalarprodukt** aus Kraft und Weg gebildet. Mit anderen Worten es trägt nur die Kraft in Richtung des Weges zur Arbeit bei. Die senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende **Zentripetalkraft** bei einer Rotation verrichtet also keine Arbeit.

Für den Betrag der umgesetzten **Energie** ist es nicht entscheidend, wie schnell ein Vorgang stattfindet – erst mit der Definition der **Leistung** P (engl. *power*) bekommt die Zeit für die Energieumsetzung eine Bedeutung:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta W = \bar{P} \cdot \Delta t \text{ ist } F \text{ konstant folgt } \bar{P} = \frac{F \cdot s}{\Delta t}$$

Durchschnittsleistung

$$P(t) = \frac{d}{dt} W \Leftrightarrow W = \int P(t) dt$$

Momentanleistung

Die Einheit der Leistung ist das Watt: $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$

Watt

VORSICHT: FALLE

Energie

Das Wort „Energie“ ist heute einer der am häufigsten verwendeten Begriffe in unserem täglichen Leben und beschreibt eines der Grundkonzepte der Physik. Im Alltag ist damit zumeist der nutzbare Anteil der Energie gemeint, der auch als **Nutzenergie**, **freie Energie** oder **Exergie** bezeichnet wird. Dadurch entstehen leicht physikalisch falsche Aussagen. Aus physikalischer Sicht kann Energie weder erzeugt noch verbraucht werden. Sie wird lediglich von einer Form in eine andere umgewandelt. Spricht man davon, dass ein System durch Reibung Energie „verliert“, ist damit die Umwandlung in Schall und Wärme gemeint.

Energie kommt in zahlreichen Formen wie z. B. als Bewegungsenergie, Wärme, Feldenergie, Ruheenergie oder Nullpunktsenergie vor. Siehe Kapitel 2 (→ Seite 15 und 49), Kapitel 6 (→ Seite 166), Kapitel 7 (→ Seite 202) und Kapitel 9 (→ Seite 245).

Potentielle Energie – Lageenergie

Die **potentielle Energie** W_{pot} wird häufig auch als **Lageenergie** bezeichnet. Sie beschreibt die Energie eines Körpers aufgrund seiner Position.

Eine Masse, die gegen die Gravitation (→ Seite 22) um eine Höhe Δh angehoben wurde, hat beispielsweise die potentielle Energie:

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

potentielle Energie

Die potentielle Energie entspricht somit der Arbeit, die aufgewendet werden muss, um den Körper in diese Position zu bringen. Sie hängt nur vom Ort ab, nicht von dem Verlauf des zurückgelegten Weges!

Eine Funktion, welche die Ortsabhängigkeit der potentiellen Energie beschreibt, wird als **Potential** bezeichnet. Ebenso wie die potentielle Energie bezieht sich ein Potential immer auf einen Referenzpunkt.

TIPP

Der Begriff der potentiellen Energie umfasst alle Energieformen, die von der Lage abhängen. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird der Begriff in der Mechanik in der Regel nur für die Energie einer Masse im Gravitationsfeld verwendet.

Spannungsenergie – potentielle Federenergie

Für kleine Auslenkungen ist die Kraft F_s beim Spannen einer Feder proportional zu ihrer Auslenkung s . Die Proportionalitätskonstante wird als Federkonstante D bezeichnet. Da die Kraft der Auslenkung entgegenwirkt hat sie ein negatives Vorzeichen.

Hooke'sches Gesetz

$$F_s(s) = -D \cdot s$$

Die für das Auslenken der Feder benötigte Arbeit wird als Spannungsenergie W_s bezeichnet und lässt sich durch Integration berechnen, wobei das negative Vorzeichen der Kraft keine Rolle spielt:

Spannungsenergie

$$W_s = \int_0^s F(s') ds' = \frac{1}{2} D s^2$$

Da die Spannungsenergie von der Lage abhängt, handelt es sich hierbei auch um eine potentielle Energie.

Kinetische Energie – Bewegungsenergie

Die dritte Energieform, mit der sich die Mechanik beschäftigt, ist die **kinetische Energie (Bewegungsenergie)**. Ihre Größe hängt von der Geschwindigkeit und der Masse des bewegten Körpers ab.

kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \text{ bzw. } W_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \text{ mit } p = m \cdot v$$

Diese beiden Formeln gelten unabhängig für alle Arten der Bewegung. Für Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit ergeben sich Abweichungen, die durch die spezielle Relativitätstheorie (→ Seite 189 ff.) beschrieben werden.

ENERGIE UND LEISTUNG

Kinetische Energie: $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \text{ mit } p = m \cdot v$

Potentielle Energie: $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$

Spannungsenergie: $W_s = \int_0^s F(s') ds' = \frac{1}{2} D s^2$

Durchschnittsleistung: $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta W = \bar{P} \cdot \Delta t \text{ ist } F \text{ konstant, so folgt } \bar{P} = \frac{F \cdot s}{\Delta t}$

Momentanleistung: $P(t) = \frac{d}{dt} W \Leftrightarrow W = \int P(t) dt$

Erhaltungssätze der Mechanik

Die Erfahrung zeigt, dass in einem abgeschlossenen System bestimmte physikalische Größen grundsätzlich erhalten bleiben, unabhängig davon, was innerhalb des Systems passiert.

Erhaltung der Energie

Energie kann weder erzeugt noch verbraucht werden. Es ist lediglich möglich, verschiedene Energieformen ineinander umzuwandeln.

In der Mechanik gilt der Energieerhaltungssatz in der vereinfachten Form: Die Summe aus **potentieller Energie** W_{pot} , **Spannungsenergie** W_S und **kinetischer Energie** W_{kin} ist in abgeschlossenen Systemen konstant, wobei die Spannungsenergie genau genommen auch eine Form der potentiellen Energie ist.

$$W_{\text{pot}} + W_S + W_{\text{kin}} = \text{konstant}$$

Energieerhaltungssatz

Allerdings kann man nur selten ein wirklich abgeschlossenes System betrachten: So geht den meisten mechanischen Systemen (z. B. durch Reibung) Energie verloren, die durch Wärme oder auch Schall an die Umgebung abgegeben wird.

Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls (Vektorsumme der Einzelimpulse) eines abgeschlossenen Systems ist konstant, auch wenn sich die Einzelimpulse der beteiligten Massen ändern: $\Sigma \vec{p} = \text{konstant}$.

Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls ($\rightarrow$ Seite 32) eines abgeschlossenen Systems ist konstant, auch wenn sich die Einzeldrehimpulse ändern: $\Sigma \vec{L} = \text{konstant}$.

ERHALTUNGSSÄTZE DER MECHANIK

Energieerhaltung	$W_{\text{pot}} + W_S + W_{\text{kin}} = \text{konstant}$
Impulserhaltung	$\Sigma \vec{p} = \text{konstant}$
Drehimpulserhaltung	$\Sigma \vec{L} = \text{konstant}$

Stoßvorgänge

Bleibt während eines Stoßes die kinetische Energie vollkommen erhalten, so wird der Stoß als vollkommen **elastisch** bezeichnet. Wird die kinetische Energie ganz in Deformationsarbeit, Schall usw. umgewandelt, so wird von einem vollkommen **unelastischen Stoß** gesprochen. Im Normalfall hat man es mit gemischten Vorgängen zu tun, doch oft kann eine Komponente auch vernachlässigt werden.

Stöße werden am zweckmäßigsten im **Schwerpunktsystem** der beteiligten Stoßpartner beschrieben: In diesem **Bezugssystem** ist der Gesamtimpuls gleich null, sodass die Gleichungen besonders einfach werden.

Sind m_1 und m_2 die Massen der beiden Stoßpartner mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ vor dem Stoß sowie den Geschwindigkeiten $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ nach dem Stoß – so folgt für den Energie- und Impulserhaltungssatz:

Energieerhaltungssatz

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}_2^2 + \varepsilon \quad \text{bzw.}$$

$$m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2 = m_1 \vec{u}_1^2 + m_2 \vec{u}_2^2 + 2\varepsilon$$

Impulserhaltungssatz

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \quad \text{und} \quad m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0$$

Die Größe ε im Energieerhaltungssatz steht dabei für die Energie, die beim unelastischen Stoß umgewandelt wird. Durch Umformen dieser Gleichungen kann die Geschwindigkeit nach dem Stoß folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$|\vec{u}_1| = |\vec{v}_1| \cdot \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{W_{\text{kin}}}}$$

Beim vollkommen unelastischen Fall ist $\varepsilon = W_{\text{kin}}$ und somit die Geschwindigkeit (im Schwerpunktsystem) beider Stoßpartner nach dem Stoß gleich null.

Der Übergang zu einem anderen Bezugssystem geschieht durch vektorielle Addition der Geschwindigkeit des Schwerpunkts in Bezug auf das neue System zu den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ vor bzw. $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ nach dem Stoß (**→ GALILEI-Transformation**, Seite 189).

Reibung

COULOMB-Reibung

Liegen zwei Flächen bewegungslos aufeinander, so haften die Oberflächen durch atomare Wechselwirkungen und mikroskopische Verzahnungen aufeinander. Um die Flächen gegeneinander zu bewegen, muss die **Haftreibung** F_H überwunden werden, die nur von der Anpresskraft $F_{\perp}$ und den Materialien, nicht jedoch von der Kontaktfläche abhängt.

Dasselbe gilt für die etwas kleinere **Gleitreibung** F_G , die auftritt, sobald die Oberflächen sich bewegen.

Nochmals wesentlich kleiner ist die vom Radius r abhängige **Rollreibung** F_R , die durch Deformation und Haftung der Oberflächen verursacht wird.

Die Proportionalitätskonstanten werden als Reibkoeffizienten μ_H , μ_G und μ_R bezeichnet und hängen von der jeweiligen Materialpaarung und deren Oberflächenbeschaffenheit ab.

$$F_H = \mu_H \cdot F_{\perp} \quad \text{und} \quad F_G = \mu_G \cdot F_{\perp} \quad \text{und} \quad F_R = \frac{\mu_R}{r} \cdot F_{\perp}$$

Unabhängig von ihrer Ursache werden alle diese Reibungsphänomene, die von der Geschwindigkeit unabhängig sind, als **COULOMB-Reibung** bezeichnet.

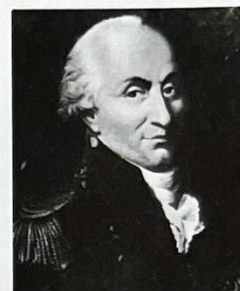


Abb. 1.2: CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB 1736–1806

COULOMB-Reibung

Viskose Reibung

Bewegt sich ein Körper langsam durch ein Gas oder eine Flüssigkeit, so entsteht eine **laminare Strömung**, deren Geschwindigkeitsverteilung nur von der Geschwindigkeit v und der **Viskosität** η des Mediums und einem von der Geometrie abhängigen Faktor $\mu_{\text{Geometrie}}$ abhängt.

$$F_V = \mu_V \cdot v \quad \text{mit} \quad \mu_V = \mu_{\text{Geometrie}} \cdot \eta$$

viskose Reibung

STOKES'sches Reibungsgesetz

Für eine Kugel lässt sich der Geometriefaktor analytisch berechnen. Das hieraus resultierende STOKES'sche Reibungsgesetz spielt eine wichtige Rolle beim

MILLIKAN-Versuch (→ Seite 52):

$$F_{ST} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad \text{für eine Kugel mit Radius } r$$

SIR GEORG GABRIEL STOKES 1819–1903

STOKES'sches Reibungsgesetz

NEWTON-Reibung (Luftreibung)

Bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten v bilden sich Wirbel und es entsteht eine turbulente Strömung. Der Strömungswiderstand ist proportional zur Strömungsfläche A und der Dichte des Mediums ρ :

NEWTON-Reibung

$$F_N = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2$$

Der Widerstandsbeiwert c_W beschreibt den Unterschied zwischen einem umströmten Objekt und einer vollständigen Abbremsung des Mediums.

$$c_W = \frac{F_N}{F_{\text{Stau}}} \text{ mit Staukraft } F_{\text{Stau}} = \frac{1}{2} \rho A v^2 = p_{\text{Stau}} \cdot A \text{ und Staudruck } p_{\text{Stau}} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Eine Kugel hat den c_W -Wert 0,35, ein Fallschirm 1,4 und ein Pkw 0,25.

BEISPIEL**Fallgeschwindigkeit eines Regentropfens**

Die Fallgeschwindigkeit eines Regentropfens ergibt sich durch Gleichsetzen der Gewichtskraft $F_G = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g$ und der NEWTON-Reibung:

$$F_N = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot \pi r^2 \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8 r g \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{3 c_W \rho_{\text{Luft}}}} \approx \sqrt{r} \cdot 240 \frac{\sqrt{\text{m}}}{\text{s}}$$

Bei einem Durchmesser von 1 mm folgt hieraus eine Fallgeschwindigkeit von $\approx 5 \text{ m/s}$.

Ob eine Strömung laminar oder turbulent ist lässt sich mit der REYNOLDS-Zahl abschätzen, in die eine charakteristische Länge l des Objekts eingeht.

REYNOLDS-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

OSBORNE REYNOLDS
1842 – 1912

Je höher ihr Wert ist, desto wahrscheinlicher ist eine turbulente Strömung. Bei einer fallenden starren Kugel erfolgt der Übergang bei $2 \cdot 10^5$ bis $6 \cdot 10^5$, bei einem Regentropfen hingegen schon bei $\text{Re} \approx 300$ und für die Strömung in Rohren bei rund 2300. Im Windkanal nutzt man die REYNOLDS-Zahl, um an kleinen Modellen bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten die Strömung an großen Objekten zu simulieren und den c_W -Wert zu messen.

Energie, Impuls, Reibung

1.2

ERHALTUNGSSÄTZE

- Energieerhaltung: $W_{\text{pot}} + W_S + W_{\text{kin}} = \text{konstant}$
- Impulserhaltung: $\sum \vec{p} = \text{konstant}$
- Drehimpulserhaltung: $\sum \vec{L} = \text{konstant}$

ARBEIT, LEISTUNG, ENERGIE

- Arbeit: $W = F \cdot s$ bzw. $\Delta W = F \cdot \Delta s$
oder allgemeiner $W(\vec{s}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} \int_{s_0}^s F(s) ds = \cos(\varphi) \int_{s_0}^s F(s) ds$
→ $W(s) = \cos(\varphi) \cdot F \cdot s$ bei konstanter Kraft F
- Durchschnittsleistung: $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta W = \bar{P} \cdot \Delta t$
- Momentanleistung: $P(t) = \frac{d}{dt} W \Leftrightarrow W = \int P(t) dt$
- Potentielle Energie: $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$
- Spannungsenergie: $W_S = \int_0^s F(s') ds' = \frac{1}{2} D s^2$
- Kinetische Energie: $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$ mit $p = m \cdot v$

Das Formelzeichen für Arbeit bzw. Energie ist wahlweise E oder W (vom englischen work), wobei der Buchstabe E auch für die elektrische Feldstärke verwendet wird.

1.3 Gravitation und Himmelsmechanik

Himmelsmechanik



Abb. 1.3: JOHANNES KEPLER 1571 – 1630

KEPLER'sche Gesetze

Die Bewegung der Planeten um die Sonne bzw. des Mondes um die Erde wurde erstmals von JOHANNES KEPLER im Jahr 1609 mathematisch korrekt beschrieben. Die von ihm aufgestellten **KEPLER'schen Gesetze** beschreiben die Bewegung eines einzelnen Planeten oder eines einzelnen Mondes (allgemein eines Trabanten) um ein wesentlich massereicheres Zentralgestirn (Zwei-Körper-Problem).

Erstes KEPLER'sches Gesetz (Ellipsensatz)

Die **Umlaufbahn** eines Trabanten ist eine Ellipse, deren einer Brennpunkt im Schwerezentrum des Systems liegt.

Zweites KEPLER'sches Gesetz (Flächensatz)

In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl zwischen umlaufendem Objekt und Gravizentrum des Systems gleiche Flächen.

TIPP

Der Flächensatz gilt auch für einmalig passierende Himmelskörper: Ihre Bahnkurve ist eine Hyperbel, die wie die Ellipse den Rand einer Kegelschnittfläche darstellt.

Drittes KEPLER'sches Gesetz (Halbachsensatz)

Im **Dritten KEPLER'schen Gesetz** wird ein Zusammenhang der Bahnbewegungen zweier Planeten um dasselbe Zentralgestirn hergestellt: Demnach sind die Quadrate der Umlaufzeiten T der beiden Planeten proportional zu den dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen a :

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \propto \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

$\propto$ bedeutet:
proportional zu
(oft auch: $\sim$)

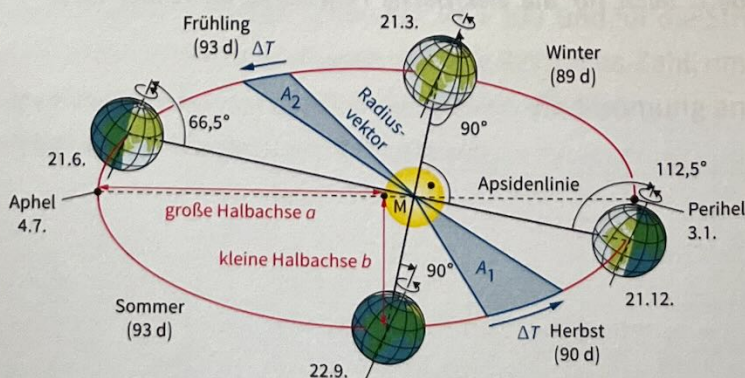


Abb. 1.4: Umlaufbahn der Erde um die Sonne. Der Flächensatz ist blau eingezeichnet.

ERDE UND MARS

Der Abstand zwischen Erde und Sonne schwankt im Jahresverlauf ($T = 365,26$ Tage) zwischen 147,1 Mio. km und 152,1 Mio. km.

Die große Halbachse der Bahnellipse ist damit 149,6 Mio. km und wird als eine **Astronomische Einheit** (AE) definiert.

Der Mars benötigt für einen Sonnenumlauf 686,98 Tage. Sein Sonnenabstand entspricht einer Halbachse von 1,524 AE. Das 3. KEPLER'sche Gesetz wird damit

$$\text{bestätigt: } \left(\frac{686,98}{365,26}\right)^2 \approx \left(\frac{1,524}{1}\right)^3 \approx 3,54$$

NEWTONS Gravitationsgesetz

NEWTON suchte nach einer weitergehenden Erklärung für die von KEPLER beschriebenen Planetenbewegungen. Er fand einen Zusammenhang mit den Massen der Himmelskörper m_1 und m_2 und nahm eine zwischen den Körpern wirkende Kraft F_G an, die mit zunehmender Entfernung r schwächer wird.

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Gravitationsgesetz

Der Wert der **universellen Gravitationskonstanten** G wurde erst viel später, im Jahr 1798, von HENRY CAVENDISH gemessen:

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

HENRY CAVENDISH
1731 – 1810**„TRÄGE“ UND „SCHWERE“ MASSE**

In NEWTONS Aktionsprinzip (→ Seite 11) wird die **„träge“ Masse** als Proportionalitätsfaktor zwischen Beschleunigung und Kraft eingeführt.

Im Gegensatz hierzu steht die **„schwere Masse“** als Ursache der Gravitation.

Beide sind gleich groß, doch dauerte es lange, um dies zu beweisen. Heute kennt man die Übereinstimmung mit einer Genauigkeit von 10^{-10} (1 : 10 Mrd.).

Gravitation im Alltag**Gravitationsfeld der Erde**

Das globale **Gravitationsfeld** der Erde wird durch das NEWTON'sche **Gravitationsgesetz** beschrieben. Solange der Abstand zum Erdmittelpunkt wesentlich größer als der Erdradius ist, kann die Erde als punktförmig angenommen werden (**Astronomische Näherung**). Um die Gravitationswirkung der Erde in der Höhe h über der Erdoberfläche auf eine im Verhältnis kleine Masse m zu beschreiben, wird die **Schwerebeschleunigung** (**Gravitationsbeschleunigung**) g verwendet. Die Gewichtskraft F_G vereinfacht sich damit zu:

$$F_G = m \cdot g$$

Gewichtskraft

VORSICHT: FALLE

Ist die Höhendifferenz bei einem Experiment wesentlich kleiner als der Erdradius, kann die Gravitation als konstant angesehen werden (→ „Der schiefe Wurf“ auf Seite 27 oder „Elektronen im Kondensator“ auf Seite 50 ff.). Bei der Betrachtung von Raketen, Satelliten oder Planeten muss hingegen NEWTONS radialsymmetrisches Gravitationsgesetz angewendet werden.

Die Schwerebeschleunigung g ist stets zum Erdmittelpunkt gerichtet. Ein annähernder Wert von g lässt sich aus NEWTONS Gravitationsgesetz ermitteln:

$$F_G = m \cdot G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(r_{\text{Erde}} + h)^2} \approx m \cdot g(h) \Rightarrow g(h) = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(r_{\text{Erde}} + h)^2}$$

Bei Einsetzen der entsprechenden Werte ergibt sich *rechnerisch* die Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche ($h = 0$; $r_{\text{Erde}} = 6368 \text{ km}$):

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,368 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9,826 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dieser Wert weicht von der tatsächlich gemessenen Schwerebeschleunigung geringfügig ab, da weder die Abplattung der Erde noch die von der Erdrotation verursachte **Zentrifugalkraft** (→ Seite 34) berücksichtigt werden. Letztere führt zu einer Abnahme der Schwerebeschleunigung von $9,83 \text{ m/s}^2$ am Pol auf $9,78 \text{ m/s}^2$ am Äquator.

Selbst innerhalb von Deutschland ist dieser Effekt deutlich messbar, wie ein Vergleich der gemessenen Schwerebeschleunigung in Hamburg ($9,8137 \text{ m/s}^2$) und München ($9,8074 \text{ m/s}^2$) zeigt.

SCHWEREANOMALIE

Auch die ungleichmäßige Verteilung der Masse im Innern der Erde führt zu einer als **Schwereanomalie** bezeichneten lokalen Schwankung von g in der Größenordnung von $\Delta g/g \approx 10^{-4}$.

Die beste Näherung zur Berechnung der Schwerebeschleunigung g in Abhängigkeit vom Breitengrad φ und der Höhe h über dem Meeresspiegel wird von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) angegeben als:

$$g(h, \varphi) = 9,780\,327 \cdot [1 + 0,005\,302\,4 \cdot \sin^2(\varphi) - 0,000\,005\,8 \cdot \sin^2(2\varphi)] - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

mit g in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und h in m.

(Physikalisch-Technische Bundesanstalt: Gravimetrie / g-Extractor. Braunschweig.
<https://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt1/fb-11/fb-11-sis/g-extractor.html>
 (Zugriff: 15.04.2024) (verändert))

SCHWEREBESCHLEUNIGUNG

Die Schwerkraftbeschleunigung g nimmt, durch die von der Erdrotation hervorgerufene Fliehkraft, von den Polen zum Äquator von $9,83 \text{ m/s}^2$ auf $9,78 \text{ m/s}^2$ ab.

Für Deutschland gilt ein mittlerer Wert von $9,81 \text{ m/s}^2$.

potentielle Energie:

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

(→ Seite 15)

BEISPIEL

Geostationäre Umlaufbahn

Fernsehsatelliten befinden sich auf einer **geostationären Umlaufbahn**, d.h. sie stehen scheinbar über einem festen Punkt am Äquator. Auf einer solchen Umlaufbahn entspricht die Gravitationskraft genau der erforderlichen Zentripetalkraft (→ Seite 34): $F_g = F_z$

Die Höhe des Satelliten über der Erde folgt aus dem Gleichsetzen der beiden Größen.

$$\text{Gravitationsgesetz: } F_G = G \cdot \frac{m_{\text{Sat}} \cdot m_{\text{Erde}}}{r^2} \quad \text{Zentripetalkraft: } F_Z = m_{\text{Sat}} \cdot r \cdot \omega^2$$

$$m_{\text{Sat}} \cdot G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{r^2} = m_{\text{Sat}} \cdot r \cdot \omega^2 \quad \text{mit } r = r_{\text{Erde}} + h$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{G \cdot m_{\text{Erde}}}{\omega^2} \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und } T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$$

$$h = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{G \cdot m_{\text{Erde}}} - r_{\text{Erde}}$$

Mit den bekannten Werten $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, $m_{\text{Erde}} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und

$r_{\text{Erde}} = 6,368 \cdot 10^6 \text{ m}$ folgt für die Höhe der geostationären Umlaufbahn über der Erdoberfläche: $h = 35868 \text{ km}$

Der freie Fall

Eine Masse m , die im Gravitationsfeld der Erde zu Boden fällt, erfährt die Schwerkraftbeschleunigung g . Da diese, wenn man von astronomischen Betrachtungen absieht, als konstant angesehen werden kann, handelt es sich um eine konstante Beschleunigung und es gelten die Formeln aus der Tabelle (→ Seite 10).

Mit $a = g$ und $s_0 = v_0 = 0$ folgt:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{und} \quad v(t) = g t \quad \text{bzw.} \quad v(s) = \sqrt{2 g s}$$

Ist die Startgeschwindigkeit ungleich Null, spricht man vom senkrechten Wurf:

$$s(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad \text{und} \quad v(t) = -g t + v_0$$

Die schiefe Ebene

Befindet sich ein Objekt auf einer schiefen Ebene, so lässt sich die senkrecht wirkende Gravitationskraft $\vec{F}_G$ vektoriell in eine Hangabtriebskraft $\vec{F}_{G,\parallel}$ und eine Normalkraft $\vec{F}_{G,\perp}$ zerlegen (→ siehe Abb. 1.5).

$$F_{G,\parallel} = F_G \cdot \frac{h}{l} = F_G \cdot \sin \alpha$$

$$\text{bzw. } F_{G,\perp} = F_G \cdot \frac{b}{l} = F_G \cdot \cos \alpha$$

Da das Objekt nur durch die Hangabtriebskraft $\vec{F}_{G,\parallel}$ beschleunigt wird, beträgt die effektive Beschleunigung $a_{\parallel} = g \cdot \sin \alpha$.

Im übrigen gelten die Bewegungsgleichungen des freien Falls:

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 \quad \text{und} \quad v(t) = g \sin \alpha \cdot t \quad \text{bzw.} \quad v(s) = \sqrt{2 g \sin \alpha \cdot s}$$

Der waagerechte Wurf

Beim waagerechte Wurf handelt es sich um die Überlagerung (**Superposition**) einer gleichförmigen Bewegung in horizontaler Richtung und dem freien Fall in vertikaler Richtung. Die Gleichungen werden meist in vektorieller Form aufgeschrieben und die Bewegung nach unten erhält ein negatives Vorzeichen.

Mit den Formeln aus der Tabelle (→ Seite 10) folgt für $a = -g$ und $v_0 = v_{\text{vertikal}} = 0$:

$$s_x(t) = v_0 t \quad \text{und} \quad s_y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

Ineinander einsetzen liefert die Wurfparabel: $s_y(t) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} s_x^2$

Die Bahngeschwindigkeit folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

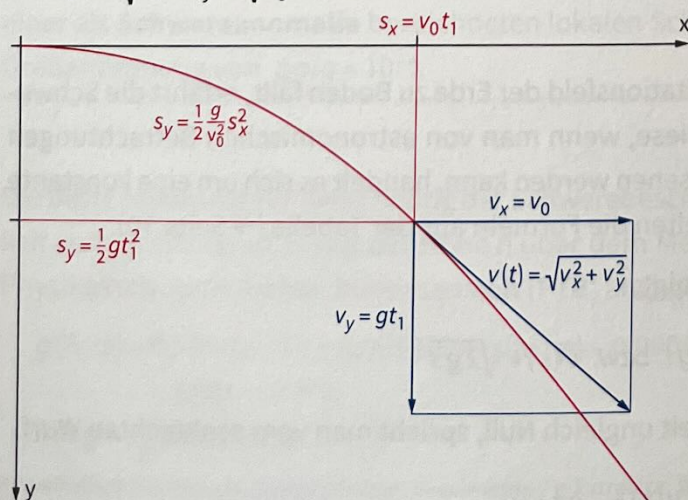


Abb. 1.6: Wurfparabel beim waagerechten Wurf

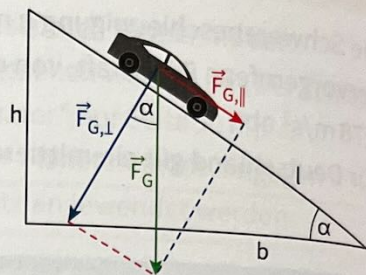


Abb. 1.5: Zerlegung der Gewichtskraft an der schiefen Ebene

Der schiefe Wurf

Als **schiefer Wurf** wird die Bewegung einer Masse m im Gravitationsfeld der Erde bezeichnet, die unter einem Startwinkel φ mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 startet:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

In y -Richtung ist sie der konstanten Erdbeschleunigung ausgesetzt, während im Idealfall keine weitere **Beschleunigung** in x -Richtung auftritt (der Luftwiderstand wird hier nicht berücksichtigt: Vakuum oder sehr kleine Reibung).

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Die Bahnkurve folgt unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen ($\rightarrow$ Seite 8 f.).

Wurfweite (x-Richtung) zum Zeitpunkt t

Gleichförmige Bewegung: $x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi$

Wurfhöhe (y-Richtung) zum Zeitpunkt t

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: $y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2$

Die vertikale Position der Masse zum Zeitpunkt t ist $r_y(t) = r_{0,y} + y(t)$.

Wurfparabel

Wird die Wurfweite nach t aufgelöst und in die Wurfhöhe eingesetzt, erhält man die sogenannte Wurfparabel:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \varphi}$$

$$\Rightarrow y(x) = \tan(\varphi) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot x^2$$

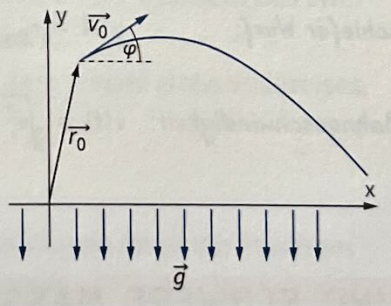


Abb. 1.7: Wurfparabel

Anstelle der hier verwendeten Winkelfunktionen können auch direkt die Geschwindigkeitskomponenten zum Startzeitpunkt eingesetzt werden:

$$y(x) = r_{0,y} + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_{0,x}^2} \cdot x^2$$

1.3 Gravitation und Himmelsmechanik

GRAVITATION

- Gravitationsgesetz: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ mit $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
- Gewichtskraft: $F_G = m \cdot g$ mit $g(h) = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(r_{\text{Erde}} + h)^2}$
 $\approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ für Deutschland
- Radius der Erde: $r_{\text{Erde}} = 6368 \text{ km}$
- Masse der Erde: $m_{\text{Erde}} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

FREIER FALL UND SCHIEFER WURF

- freier Fall: $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ und $v(t) = gt$ bzw. $v(s) = \sqrt{2gs}$
- waagerechter Wurf: $s_x(t) = v_0 t$ und $s_y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$
→ Wurfparabel: $s_y(t) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} s_x^2$
- schiefer Wurf: $y(x) = r_{0,y} + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_{0,x}^2} \cdot x^2$
- Bahngeschwindigkeit: $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x,0}^2 + (v_{y,0} - gt)^2}$

TRÄGE UND SCHWERE MASSE

Die für die Massenträgheit verantwortliche „träge Masse“ ist entscheidend für den Impuls eines Objekts und die Kraft die für eine Impulsänderung notwendig ist. Die „schwere Masse“ ist die Ursache für die Gravitation. Experimente zeigen, dass beide Eigenschaften zusammenhängen und eine Unterscheidung unnötig ist!

1.4 Kreisbewegungen

Rotation starrer Körper

Bewegungsgleichungen

Drehbewegungen werden am einfachsten in einem polaren Koordinatensystem (→ Anhang Seite 274) beschrieben, dessen Ursprung auf der Drehachse liegt. Die Position wird dann durch den Abstand r von der Drehachse und den **Drehwinkel** φ angegeben.

Verändert sich der Winkel mit der Zeit, so hat er eine **Winkelgeschwindigkeit** ω . Ist diese ebenfalls veränderlich, dann nennt man dies die **Winkel-** oder **Drehbeschleunigung**.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \dot{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \ddot{\varphi} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Wird eine Kreisbewegung auf eine der kartesischen Achsen projiziert, so wird aus der gleichmäßigen Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω eine **harmonische Schwingung** (→ Seite 79) mit der **Kreisfrequenz** ω .

GRAD UND BOGENMASS

In der Physik und Mathematik ist es üblich, Winkel im **Bogenmaß** anzugeben, also dem Quotienten aus Kreisbogen und Radius. Die Einheit wird im Deutschen als Radiant und im englischen als **radian** bezeichnet. Die Einheit *rad* ist optional. Meist steht die Zahl jedoch ohne Einheit, da der Quotient aus zwei Längen die Dimension einer Zahl hat, d. h. $1 \text{ rad} = 1$.

Die Umrechnung in Grad folgt unmittelbar aus dem Winkel eines Vollkreises, also 360° bzw. 2π .

$$\varphi_{\text{DEG}} = \varphi_{\text{RAD}} \cdot \left(\frac{360^\circ}{2\pi} \right)$$

Bei der Verwendung von trigonometrischen Funktionen muss der Taschenrechner auf den richtigen Modus eingestellt werden:

DEG = Grad (engl. *degree*), RAD = Bogenmaß (engl. *radian*).

Gleichförmige Kreisbewegung

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die Winkelbeschleunigung Null und somit die **Winkelgeschwindigkeit** ω konstant, ebenso wie die **Umlaufdauer** T und ihr Kehrwert die **Frequenz** f .

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

Im Abstand r zur Drehachse beträgt der **Bahnumfang** $2\pi r$ und somit folgt für die **Bahngeschwindigkeit**:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f = \omega r$$

Vom Hebelgesetz zum Drehmoment

Mittels eines Hebels kann eine geringe Kraft in eine große Kraft umgewandelt werden – sie muss jedoch über eine lange Strecke wirken, um die hohe Kraft nur über ein kurzes Stück aufzubringen. Nach dem **Hebelgesetz** ist das Produkt aus tangentialer Kraft und radialem Hebelarm für jeden Punkt auf dem Hebel gleich:

Hebelgesetz

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Zur Erklärung betrachten wir die **Arbeit** (= Kraft mal Weg), die bei einer Drehung um den Winkel φ verrichtet wird. Wir erhalten:

$$W_1 = F_1 \cdot s_1 = F_1 \cdot (l_1 \cdot \varphi_{\text{RAD}}) = F_2 \cdot (l_2 \cdot \varphi_{\text{RAD}}) = F_2 \cdot s_2 = W_2$$

Auf beiden Seiten des Hebels wird die gleiche Arbeit verrichtet: Mit einem Hebel lässt sich also keine Energie gewinnen. Ähnlich wie bei einem Seilzug können wir jedoch kleine Kräfte über einen langen Weg in hohe Kräfte über einen kurzen Weg transformieren. Ausschlaggebend ist nicht die Form des Hebels, sondern der radiale Abstand der Kräfte vom Drehpunkt – bei allen drei in Abb. 1.8 gezeigten Fällen sind die Hebelarme im Gleichgewicht.

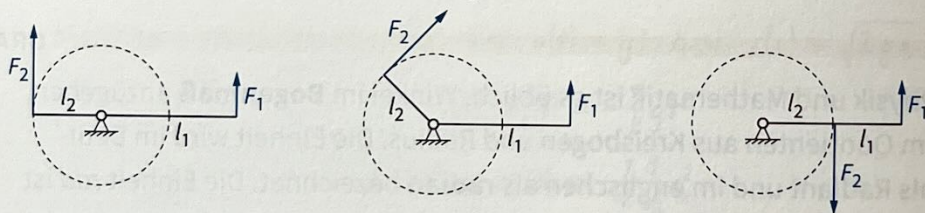


Abb. 1.8: Drei Fälle des Kräftegleichgewichts am Hebelarm

Das im Hebelgesetz beschriebene Produkt aus einer tangential wirkenden Kraft F und ihrem radialen Abstand r zur Drehachse nennt man auch das **Drehmoment** M .

In der Ebene lautet die verallgemeinerte Definition des Drehmoments:

Drehmoment

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha \text{ mit Winkel } \alpha \text{ zwischen } r \text{ und } F.$$

Im Raum wird das Drehmoment durch ein Vektorprodukt (Kreuzprodukt) beschrieben (→ Seite 37).

Das Hebelgesetz veranschaulicht die Wirkung eines Drehmoments auf einen Körper: Der Körper verharrt in Ruhe, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Drehmomente null ist. Existiert hingegen ein effektives Drehmoment (Summe ungleich null), so wird der Körper in Rotation versetzt. Bei der Rotation spielt das Drehmoment eine äquivalente Rolle zur Kraft bei der Translation (NEWTONS 2. Axiom auf → Seite 12 und Gegenüberstellung auf → Seite 33).

Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Bei einer Translationsbewegung beträgt die kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$.

Betrachten wir nun einen Körper der Masse m , der um seinen Schwerpunkt rotiert. Um seine kinetische Energie auszurechnen, müssen wir die Geschwindigkeit v_i jedes einzelnen Massepunktes m_i berechnen und anschließend die kinetische Energie der einzelnen Punkte aufaddieren:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Da sich die Punkte auf einer Kreisbahn um die Rotationsachse bewegen, beträgt ihre Geschwindigkeit $v_i = r_i \dot{\varphi}_{\text{RAD}} = r_i \omega$. Somit folgt:

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{=J} \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Die hier mit J bezeichnete Summe wird als **Trägheitsmoment** bezeichnet.

Bei der Rotation spielt sie eine äquivalente Rolle zur Masse bei der Translation (→ Seite 11 und Seite 33).

VORSICHT: FALLE

Das Trägheitsmoment hängt von der Lage der Rotationsachse ab.

Bei der Berechnung gibt r_i den radialen Abstand des Massepunktes m_i zur Rotationsachse an.

Das Trägheitsmoment muss für jeden Körper durch Integration über sein Volumen unter Berücksichtigung seiner Dichteverteilung errechnet werden. Für viele homogene geometrische Körper können jedoch Berechnungsformeln in Tabellen nachgeschlagen werden. Normalerweise beziehen sie sich auf eine durch den Schwerpunkt verlaufende Rotationsachse und werden deshalb mit J_S bezeichnet.

Zylindermantel	massiver Zylinder	Hohlkugel	massive Kugel
$J_{S_1} = m r^2$	$J_{S_1} = \frac{1}{2} m r^2$	$J_S = \frac{2}{3} m r^2$	$J_S = \frac{2}{5} m r^2$
$J_{S_2} = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$	$J_{S_2} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$		

Tab. 1.2: Trägheitsmomente einiger geometrischer Grundfiguren mit Radius r und Länge l bezogen auf eine Rotation um ihre Symmetrieachse.

Soll die Rotationsachse aus dem Schwerpunkt verschoben werden, dann findet eine Umrechnung von J_S in das Trägheitsmoment J nach dem **Satz von STEINER** (→ Seite 36) statt.

BEISPIEL

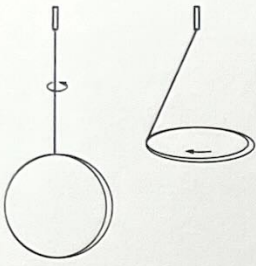


Abb. 1.9: Einseitig aufgehängter Kreisel

Einseitig aufgehängter Kreisel

Hängt ein Kreisel an einem Band, das durch einen Motor gedreht wird, so rotiert er nach einiger Zeit um diejenige Achse, die das größte Trägheitsmoment hat, da dies die Rotationsenergie maximiert (→ Abb. 1.9):

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Bei der flachen Scheibe ändert sich das Trägheitsmoment von

$$J_{S_2} = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2 \text{ mit } l \rightarrow 0 \text{ zu } J_{S_1} = m r^2.$$

Der Drehimpuls

Betrachten wir einen mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Körper, so bewegt sich jedes Masselement mit einer konstanten Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit Radius r_i . Der **Impuls** p_i dieses Masselements hat dabei stets den gleichen Betrag, die Richtung des Impulsvektors ändert sich hingegen kontinuierlich. Wir definieren daher einen Drehimpulsvektor $\vec{L}$, der in Richtung der Drehachse zeigt:

Drehimpuls

$$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J \cdot \omega$$

Bei Translationsbewegungen ist der Impuls eine **Erhaltungsgröße**, er ändert sich nur, wenn äußere Kräfte im Spiel sind:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F} \quad (\text{NEWTON})$$

Für die Rotation gilt analog:

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i \frac{d}{dt} p_i = \sum_i r_i F_i = M$$

Folglich ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Auch in diesem Fall handelt es sich wie beim Drehmoment um eine vektorielle Größe (→ Seite 37).

DREHIMPULSERHALTUNGSSATZ

Der Drehimpuls eines Körpers bleibt konstant, solange kein äußeres Drehmoment auf ihn wirkt. In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant, wenn keine äußeren Drehmomente wirken.

$$L = J \omega = \text{konstant}$$

Rotation und Translation im Vergleich

Zwischen Rotation und Translation gibt es viele Analogien.

In → Tab. 1.3 werden diese Gemeinsamkeiten nochmals zusammengefasst.

Translation	Rotation
Ort s	Winkel φ_{RAD}
Geschwindigkeit $v = \dot{s}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{s}$	Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse $m = \sum_i m_i$	Trägheitsmoment $J = \sum_i m_i r_i^2$
Impuls $p = m \cdot v = m \cdot \dot{s}$	Drehimpuls $L = J \cdot \omega = J \cdot \dot{\varphi}$
Kraft $F = m \cdot a = m \cdot \dot{v} = m \cdot \ddot{s} = \dot{p}$	Drehmoment $M = J \cdot \dot{\omega} = J \cdot \ddot{\varphi} = \dot{L}$
kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$	Rotationsenergie $W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{L^2}{2J}$
gleichförmige Bewegung $\vec{a}(t) = 0$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ $\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$	gleichförmige Rotation $\dot{\omega} = 0$ $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$
gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \vec{\ddot{s}}$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t$ $\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 \cdot t^2$	gleichmäßig beschleunigte Rotation $\dot{\omega} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2$

Tab. 1.3: Translation und Rotation im Vergleich

TIPP

Wie in Tab. 1.3 zu sehen ist gibt es zu den von der Translation bekannten Gleichungen eine völlig analoge Entsprechung für die Rotation, wobei der Winkel die Rolle der Ortskoordinate und das Trägheitsmoment die Rolle der Masse übernimmt.

Kräfte im rotierenden System

Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Körper, auf die keine äußeren Kräfte wirken, bewegen sich in **Inertialsystemen** (→ Seite 8) geradlinig. Gemäß NEWTONS Axiom „Actio gleich Reactio“ (→ Seite 12) wird eine Kraft benötigt, um einen Körper auf eine Kreisbahn zu zwingen.

	eindimensional	vektoriell
Kreisbahn	$r = \text{konstant}$	$\vec{s}(t) = r \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$
Bahngeschwindigkeit	$v = r \omega$	$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt}(t) = r \omega \cdot (\cos \omega t, -\sin \omega t)$
Zentripetalbeschleunigung	$a_z = \omega^2 r$	$\vec{a}_z(t) = \frac{dv}{dt}(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t) = -\omega^2 \cdot \vec{s}(t)$
Zentripetalkraft	$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \omega^2 r$ $= -\frac{mv^2}{r}$	$\vec{F}_z = m \cdot \vec{a}_z = m \omega^2 \cdot \vec{s}$ $= m \omega^2 r \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$

Die **Zentripetalkraft** F_z ist stets zum Mittelpunkt der Kreisbewegung gerichtet und wirkt somit immer im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung. Daher wird durch sie auch keine Arbeit verrichtet (das Produkt aus Kraft und Weg ist stets Null).

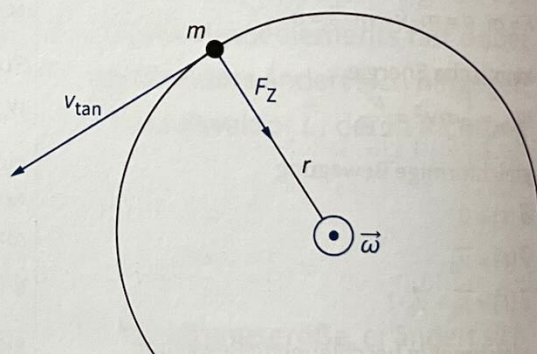


Abb. 1.10: Zentripetalkraft im rotierenden Bezugssystem

Trägheitskräfte im rotierenden System

Vom rotierenden System aus betrachtet wirkt auf den Körper eine durch die Massenträgheit hervorgerufene, nach außen gerichtete Kraft, die als **Zentrifugalkraft** oder umgangssprachlich **Fliehkraft** bezeichnet wird. Ein sich mitbewegender Beobachter kann keine Ursache für die Zentrifugalkraft erkennen.

Trägheitskraft

Solche Kräfte, für die das Axiom „Actio gleich Reactio“ nicht gilt, treten in allen beschleunigten Bezugssystemen auf und werden ganz allgemein als **Trägheitskräfte** bezeichnet.

Verharrt ein Objekt im rotierenden System in Ruhe, besteht ein Kräftegleichgewicht zwischen Zentrifugal- und Zentripetalkraft.

VORSICHT: FALLE

Trägheitskräfte wie die **Zentrifugalkraft** werden auch als **Scheinkräfte** bezeichnet, da sie nur von einem beschleunigten Bezugssystem aus beobachtet werden können und ihr Wert von der Wahl des Bezugssystems abhängt. Im Gegensatz hierzu ist die Zentripetalkraft eine „reale“ Kraft, deren Wert in allen Inertialsystemen gleich ist.

CORIOLIS-Effekt

Bewegt sich ein Körper vom Zentrum eines rotierenden Bezugssystems kräftefrei nach außen, so beobachtet man von einem Inertialsystem aus eine gradlinige Bewegung (Massenträgheit). Vom rotierenden System aus gesehen beschreibt der Körper hingegen eine Kurve, da sich das Bezugssystem während dieser Zeit dreht. Die Herleitung erfolgt analog zur Berechnung der Zentripetalkraft, wobei sich nun auch der radiale Abstand r ändert.

GASPARD GUSTAVE
DE CORIOLIS
1792 – 1843

CORIOLIS-EFFEKT

Kreisbahn: $\vec{s}(t) = r(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt}$
 $= \dot{r}(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t) + \omega \cdot r(t) \cdot (\cos \omega t, -\sin \omega t)$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{r}(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t) \quad (\text{radial})$
 $+ 2\omega \cdot \dot{r}(t) \cdot (\cos \omega t, -\sin \omega t) \quad (\text{tangential})$
 $- \omega^2 \cdot r(t) \cdot (\sin \omega t, \cos \omega t) \quad (\text{radial})$

Der erste Term beschreibt eine reale radiale Beschleunigung, die auch im rotierenden System dem Axiom „Actio gleich Reactio“ genügt. Die zweite Komponente ist die tangential wirkende **Coriolisbeschleunigung**. Der dritte Term ist die bereits bekannte Zentripetalbeschleunigung.

BEISPIEL**Hoch- und Tiefdruckgebiete**

Auf der Erde ist der CORIOLIS-Effekt dafür verantwortlich, dass sich die Luftmassen zwischen Hoch- und Tiefdruckgebieten auf Spiralbahnen bewegen. Auf der Nordhalbkugel wird eine Bewegung in Nord-Süd-Richtung nach rechts abgelenkt. Auf der Südhalbkugel ist es umgekehrt. Die warme Luft, die vom Äquator in Richtung der Pole strömt, wird auf der Nordhalbkugel nach Osten abgelenkt und verursacht in der Höhe starke westliche Winde, den Jetstream. Die am Boden zurückströmende Luft wird in westlicher Richtung abgelenkt (polarer Ostwind).

FOUCAULT'SCHES PENDEL

Ein entlang einer Linie schwingendes Pendel behält aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes ($\rightarrow$ Seite 37) grundsätzlich seine Schwingungsrichtung bei.

Im Jahr 1851 demonstrierte J. B. L. FOUCAULT der Öffentlichkeit anhand dieses Effektes, dass sich die Erde unter dem Pendel dreht:

JEAN BERNARD
LÉON FOUCAULT
1819 – 1868

Bei jeder Schwingung zeichnete ein 28 kg schweres Gewicht an einem Seil von 67 m Länge eine Spur in ein Sandbett. Aus vielen stets leicht gegeneinander verdrehten Spuren ergab sich schließlich, nach knapp 32 Stunden, eine geschlossene Rosette: Die Zeit D für einen Umlauf beträgt nur an den Polen 24 h. An allen anderen Orten führt nur die Projektion der Erdrotation auf die Richtung der Gravitationswirkung zu einer Drehung des Pendels.

Die Zeit für einen Umlauf ergibt sich daher aus der Dauer eines Sterntags und dem Breitengrad φ : $D = 23,93 \text{ h} / \sin \varphi$

Zusatzwissen: Rotation in vektorieller Darstellung

Satz von STEINER

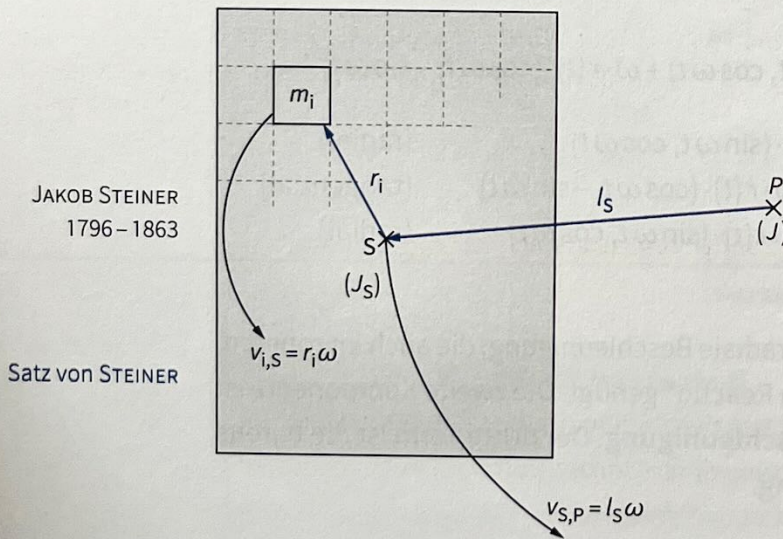


Abb. 1.11: Verschiebung des Trägheitsmoments aus dem Schwerpunkt S zu einem beliebigen Punkt P: Aus J_S wird J .

Ist das Trägheitsmoment J_S bezüglich einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Achse bekannt, so ermöglicht es der **Satz von STEINER**, die Rotationsachse in jeden beliebigen Abstand l_S vom Schwerpunkt zu legen:

$$J = J_S + m \cdot l_S^2$$

Zur Herleitung betrachten wir das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment J_S wieder in Form der Summierung diskreter Massenelemente:

$$J_S = \sum_i (m_i \cdot r_i^2)$$

Zu dem auf den Schwerpunkt bezogenen Ortsvektor $\vec{r}_i$ wird der Abstandsvektor $\vec{l}_S$ zur neuen Rotationsachse addiert:

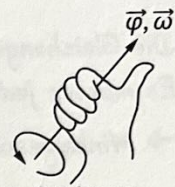
$$\begin{aligned} J &= \sum_i (m_i \cdot (\vec{r}_i + \vec{l}_S)^2) = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i^2 + 2 \cdot \vec{r}_i \cdot \vec{l}_S + \vec{l}_S^2) \\ &= \sum_i (m_i \cdot r_i^2) + \sum_i (m_i \cdot \vec{r}_i) \cdot 2 \cdot \vec{l}_S + \sum_i m_i \cdot l_S^2 \end{aligned}$$

Da J_S auf den Schwerpunkt bezogen ist, wird die Summe über $m_i \cdot r_i$ zu Null und es folgt der STEINER'sche Satz:

$$J = \sum_i (m_i \cdot r_i^2) + m \cdot l_S^2 = J_S + m \cdot l_S^2$$

Die Drehachse als Vektor

Bei dreidimensionalen Berechnungen ist es üblich, für den **Drehwinkel** $\vec{\varphi}$ und die **Winkelgeschwindigkeit** $\vec{\omega}$ Vektoren in Richtung der Rotationsachse zu verwenden. Die Orientierung ergibt sich aus der „**Rechte-Hand-Regel**“ (→ Abb. 1.12).



Drehrichtung

Abb. 1.12: Rechte-Hand-Regel für die Rotation

Das Drehmoment ist ein Vektorprodukt

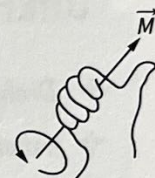
Wirken Kräfte auf dreidimensionale Körper, so wird das **Drehmoment** durch ein Vektorprodukt (Kreuzprodukt, → Anhang Seite 280) berechnet:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Zur Verdeutlichung betrachten wir den Spezialfall von zwei gleich großen entgegengesetzten Kräften $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, mit den Angriffspunkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ im Abstand $\vec{r}$ zueinander:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

Die Orientierung des Drehmoments ergibt sich wiederum aus der „Rechte-Hand-Regel“ (→ Abb. 1.13): Zeigt der Daumen in Richtung des Drehmoments $\vec{M}$, so geben die Finger die Richtung der hierdurch hervorgerufenen Rotation an.



Drehrichtung

Abb. 1.13: Rechte-Hand-Regel für das Drehmoment

Der Drehimpuls als Vektor

Analog zum Drehmoment wird auch der **Drehimpuls** als Vektorprodukt (Kreuzprodukt, → Anhang Seite 280) definiert:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = J_M \vec{\omega}$$

In der vektoriellen Darstellung wird aus dem Trägheitsmoment J die Matrix J_M . Den Drehimpulserhaltungssatz weisen wir wiederum durch Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit nach:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i \right)$$

Der erste Summand verschwindet:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i (\vec{v}_i \times \vec{v}_i) = 0$$

Beim zweiten Summanden erinnern wir uns an NEWTON $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ und erhalten:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ändert sich also nur, wenn ein äußeres Drehmoment $\vec{M}$ vorhanden ist.

Drehimpuls

Drehimpuls-
erhaltungssatz

1.4 Kreisbewegungen

ROTATION STARRER KÖRPER

Die Gleichungen der Rotation zeigen viele Analogien zur Translation ($\rightarrow$ Seite 10). Es müssen jedoch zusätzliche Trägheitskräfte berücksichtigt werden.

- $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}$
- $\rightarrow$ Winkelbeschleunigung: $\dot{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \ddot{\varphi}$
- $\rightarrow$ Rotationsgeschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ bzw. $v = \omega r$
- $\rightarrow$ gleichförmige Kreisbewegung: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ mit Periodendauer T und Frequenz f

DREHMOMENT, DREHIMPULS UND ENERGIE

- $\rightarrow$ Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ bzw. $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$ mit Winkel α zwischen r und F
- $\rightarrow$ Hebelgesetz: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ (Gleichgewicht der Drehmomente)
- $\rightarrow$ Rotationsenergie $W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{=J} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$ mit Trägheitsmoment J
- $\rightarrow$ Drehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = J_M \vec{\omega}$ bzw.
 $L = \sum_i r_i p_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J \cdot \omega$
- $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung: $\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}$ bzw. $\frac{d}{dt} L = \sum_i r_i F_i = M$

KRÄFTE IM ROTIERENDEN SYSTEM

- $\rightarrow$ Zentripetalbeschleunigung: $\vec{a}_Z(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$
- $\rightarrow$ Zentripetalkraft: $\vec{F}_Z = m \cdot \vec{a}_Z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}(t)$ bzw. $F_Z = m \cdot a_Z = -m \cdot \omega^2 \cdot r = -\frac{m \cdot v^2}{r}$

WICHTIGE EINHEITEN

$\rightarrow$ Kilogramm (kg), Meter (m) und Sekunde (s) sind Grundeinheiten des SI-Systems.

Newton: $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$

Joule: $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$

Watt: $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$

Elektrisches und magnetisches Feld

2

Elektrische und magnetische Felder sind eng miteinander verbunden:

- ➔ Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.
- ➔ Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.
- ➔ Bewegte Ladungen generieren Magnetfelder und treten ihrerseits mit ihnen in Wechselwirkung.

Zeichnerisch werden Felder durch **Feldlinien** dargestellt, welche die Richtung der Feldkräfte anzeigen. Folglich können sich Feldlinien niemals kreuzen. Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke (→ Seite 41 und Seite 58) und damit ein Maß für die Stärke der Kraft. Verlaufen die Feldlinien senkrecht zur Zeichenebene, so verwendet man die Symbole $\odot$ (Pfeilspitze) für solche, die aus der Zeichenebene herauskommen, und $\otimes$ (Pfeilende) für solche, die hineingehen. In einem **homogenen Feld** verlaufen die Feldlinien parallel, sodass die Feldstärke überall gleich groß ist. Ein **radiales Feld** zeigt sternförmig von einem Punkt ausgehende radial nach außen, die Feldlinien sind somit **divergent**.

2.1 Elektrostatistisches Feld

Elektrische Ladung

Es gibt positive und negative elektrische Ladungen, jeweils mit einem ganzzahligen Vielfachen der **Elementarladung** e des Elektrons (MILLIKAN-Versuch, → Seite 52). Die physikalische Einheit für die elektrische Ladung ist das Coulomb. Es entspricht der Ladungsmenge, die bei einer Stromstärke von einem Ampere innerhalb von einer Sekunde durch einen Leiter fließt:

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} = 1 \text{ Amperesekunde}$$

Bei einer Elementarladung von $e = 1,602\,1773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ entspricht dies

$$\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 6 \cdot 10^{18} \text{ Elektronen.}$$

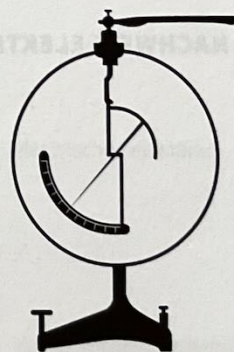


Abb. 2.1: **Elektrometer** zum Nachweis elektrischer Ladungen.

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE
1775 – 1836

Coulomb

ERHALTUNG DER LADUNG

Die Summe der positiven und negativen Ladungen in einem geschlossenen System bleibt stets konstant: $\sum q = \text{konstant}$

Kräfte im elektrischen Feld

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Der Raum, in dem diese Kräfte wirken, heißt **elektrisches Feld**. Die Elektrostatik beschreibt das Verhalten einer zumeist positiven Probeladung in einem konstanten elektrischen Feld, das von der Probeladung nicht beeinflusst wird. Zur Veranschaulichung von Feldern dienen Diagramme mit Feldlinien.

Elektrische Feldlinien beginnen und enden immer an entgegengesetzten Ladungen und verlaufen per Definition von der positiven zur negativen Ladung. Sie zeigen also in die Richtung der Kraft, die auf eine positive Probeladung wirkt. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes. Auf der Oberfläche eines Leiters stehen Feldlinien stets senkrecht, da die Ladungen sonst durch Feldkräfte ($\rightarrow$ Abb. 2.2) entsprechend verschoben würden.

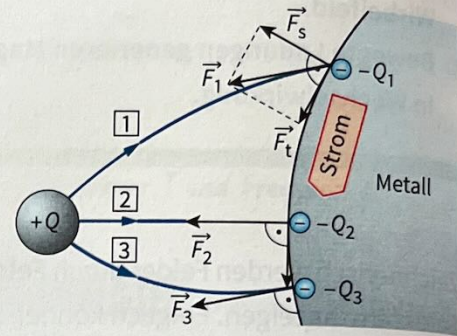


Abb. 2.2: Eine positive Probeladung nähert sich einer Oberfläche (Feldlinie 1 oder 3). Die korrespondierende negative Ladung verschiebt sich so lange, bis die Feldlinie senkrecht auf der Leiteroberfläche endet (2).

NACHWEIS ELEKTRISCHER FELDLINIEN

Im Experiment lassen sich Feldlinienbilder z. B. durch Grieß in Öl sichtbar machen: Die Körner werden durch **Verschiebungspolarisation** ($\rightarrow$ Seite 45) zu **Dipolen**, sodass sich die entgegengesetzten Ladungen benachbarter Körner anziehen.

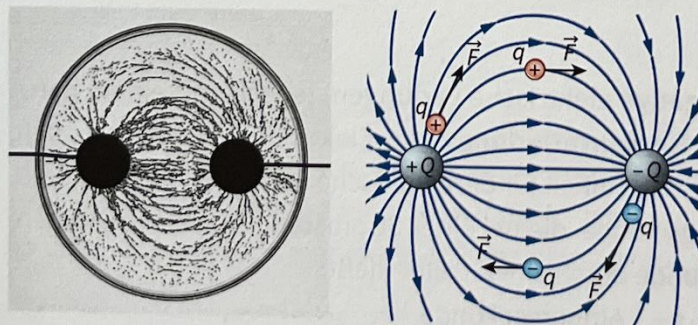


Abb. 2.3: Elektrische Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln: links: sichtbar gemacht durch Grieß in Öl, rechts: Verlauf der Feldlinien.

Influenz

Metalle bestehen aus einem Gitter positiv geladener Atomrümpfe, in dem sich Elektronen frei bewegen können. Durch ein äußeres elektrisches Feld verschiebt sich dieses Gleichgewicht, bis jede von außen ankommende Feldlinie eine passende Ladung auf der Oberfläche findet (→ Abb. 2.2). Durch die Verschiebung der Elektronen wird das Metall zu einem **Dipol** mit positiven Ladungen auf der einen Seite und negativen Ladungen auf der anderen Seite. Das Feld zwischen diesen Ladungen ist dem äußeren Feld entgegengerichtet und kompensiert dieses vollständig. Durch diesen als **Influenz** bezeichneten Effekt ist das Innere eines elektrischen Leiters immer völlig feldfrei. Da an der Influenz nur die Oberfläche des Metalls beteiligt ist, ist auch das Innere eines metallischen Hohlkörpers (**FARADAY-Käfig**) feldfrei (→ Abb. 2.4, siehe auch → Abb. 2.7).

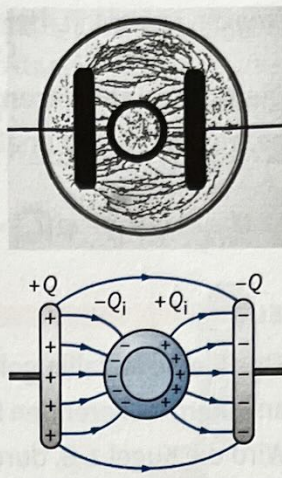


Abb. 2.4: Das Innere eines Faraday-Käfigs, hier ein Metallring, bleibt feldfrei.

MICHAEL FARADAY
1791 – 1867

Elektrische Feldstärke und elektrisches Potential

In einem elektrischen Feld wirkt auf eine Ladung q die zur Anzahl der Elementarladungen proportionale Kraft $\vec{F}$. Den Quotienten bezeichnet man als elektrische

$$\text{Feldstärke } \vec{E}: \quad \vec{F}_E = q \cdot \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$$

elektrische Feldstärke

Bewegt sich die Ladung in dem elektrischen Feld, so ist dies mit einer Änderung ihrer potentiellen Energie (→ Seite 16) verbunden:

$$\Delta W_{\text{el}} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_E(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = q \varphi(\vec{r})$$

Kurvenintegral, Anhang
→ Seite 278

Wird der Bezugspunkt $\vec{r}_0$ festgehalten, so können wir jedem Punkt im elektrischen Feld eine Energie zuordnen, die notwendig ist, um eine Probeladung von 1 Coulomb vom Bezugspunkt an diesen Ort zu bringen. Der von der Ladung unabhängige Quotient $\varphi(\vec{r}) = \frac{\Delta W_{\text{el}}(\vec{r})}{q}$ wird als **elektrisches Potential** bezeichnet.

elektrisches Potential

Der Bezugspunkt $\vec{r}_0$ kann frei gewählt werden. Bei einem Plattenkondensator (→ Seite 43) wird häufig die negativ geladene Platte als Bezugspunkt verwendet. Beim COULOMB-Potential hingegen ein Punkt $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$, der weit außerhalb des elektrischen Feldes liegt.

Die physikalische Einheit des elektrischen Potentials ist das Volt (V):

$$\text{Volt} \quad \text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Newton} \cdot \text{Meter}}{\text{Coulomb}} \Leftrightarrow 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}}$$

ALESSANDRO GIUSEPPE
ANTONIO ANASTASIO
GRAF VON VOLTA
1745 – 1827

Die **Potentialdifferenz** zwischen zwei Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wird als **Spannung** U bezeichnet. Sie ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunkts:

$$U_{\vec{r}_1 \vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

MESSUNG MIT PENDEL

Eine kleine Metallkugel wird als Pendelmasse an einem isolierenden Nylonfaden aufgehängt. Wird die Kugel z. B. durch Berühren einer Kondensatorplatte aufgeladen, so erfährt sie in einem horizontalen elektrischen Feld E eine Kraft $F_E = q \cdot E$, die das Pendel ($\rightarrow$ Seite 85 f.) auslenkt. Da die Feldkraft mit der Gravitationskraft im Gleichgewicht steht, folgt aus dem Kräfteparallelogramm ($\rightarrow$ Abb. 2.5):

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{s}{h} \approx \frac{s}{l} \Rightarrow F_E = F_G \cdot \frac{s}{h} \approx F_G \cdot \frac{s}{l} \Leftrightarrow q \cdot E \approx m \cdot g \cdot \frac{s}{l}$$

Die Näherung gilt für Auslenkungen kleiner $\approx 8^\circ$, da dann für Winkel im Bogenmaß gilt: $\cos \alpha \approx 1$ und $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

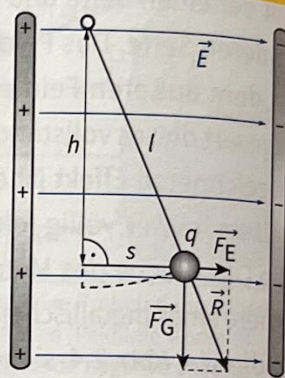


Abb. 2.5: Bestimmung der elektrischen Feldstärke mit einem Pendel

ELEKTRISCHES FELD

	eindimensional	vektoriell	Einheit
elektrische Feldstärke	$E = \frac{F_E}{q}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$ $= -\left(\frac{d\varphi(\vec{r})}{dx}, \frac{d\varphi(\vec{r})}{dy}, \frac{d\varphi(\vec{r})}{dz}\right)$	$\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$
potentielle elektrische Energie	$\Delta W_{el} = -\int_{r_0}^r F_E(s) ds$ $= -q \int_{r_0}^r E(s) ds = q \varphi(r)$	$W_{el}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_E(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$ $= -q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = q \varphi(\vec{r})$	[J]
elektrisches Potential	$\varphi(r) = \frac{W_{el}(r) - W_{el}(r_0)}{q}$	$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_E(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$	$\left[V = \frac{\text{J}}{\text{C}}\right]$
elektrische Spannung	$U = \frac{\Delta W_{el}}{q} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2)$	$U_{\vec{r}_1 \vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$	[V]

Der Plattenkondensator (homogenes Feld)

Das Feld im Innern eines **Plattenkondensators** ist praktisch homogen, solange der Plattendurchmesser groß gegenüber dem Plattenabstand d ist.

Die Ladung Q auf den Kondensatorplatten ist im Bereich des homogenen Feldes gleichmäßig mit der **Flächenladungsdichte** ϱ_A über die Fläche A der Kondensatorplatten verteilt: $\varrho_A = \frac{Q}{A}$

Flächenladungsdichte

Um die Flächenladungsdichte zu bestimmen, kann die Ladung mit einem Metallplättchen bekannter Größe abgehoben (→ Abb. 2.6) und mit einem Elektrometer gemessen werden (→ Abb. 2.1). Es

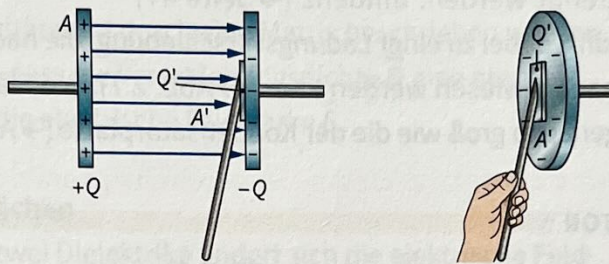


Abb. 2.6: Messung der Flächendichte

zeigt sich, dass die gemessene Flächenladungsdichte proportional zur angelegten Spannung U ist. Folglich gilt dies auch für die gesamte Ladung des Kondensators Q . Den Quotienten nennt man die **Kapazität** des Kondensators:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die physikalische Einheit der Kapazität ist das Farad (F):

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

Farad

Die **Spannung** (→ Seite 42) zwischen den Kondensatorplatten ist ein Maß für die elektrische Feldstärke zwischen den Platten. Da das Feld homogen ist und somit nicht vom Ort abhängt, ist die Spannung proportional zum Abstand der Platten $d = r_2 - r_1$:

$$U_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E \, ds = E \cdot (r_2 - r_1) = E \cdot d$$

Diese Proportionalität zwischen der Kondensatorspannung und dem Plattenabstand lässt sich experimentell leicht nachweisen, indem der Plattenabstand eines geladenen Kondensators verändert und dabei die Spannung gemessen wird. Für die Kapazität eines Plattenkondensators folgt hieraus:

$$U = E \cdot d \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E \cdot d} = \frac{\varrho_A \cdot A}{E \cdot d}$$

Da sowohl die Flächenladungsdichte ϱ_A als auch die elektrische Feldstärke E proportional zur Ladung sind, ist ihr Quotient eine Konstante, die von den Eigenschaften des Dielektrikums (siehe unten) zwischen den Kondensatorplatten abhängt: $\varrho_A = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$.

Mit dieser Definition folgt für die Kapazität des Plattenkondensators:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Kapazität

Experimentell lässt sich der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Flächenladungsdichte mit zwei deckungsgleichen Metallplättchen nachweisen, die gemeinsam ins homogene Feld eines Plattenkondensators gebracht und anschließend dort getrennt werden. Influenz (→ Seite 41)

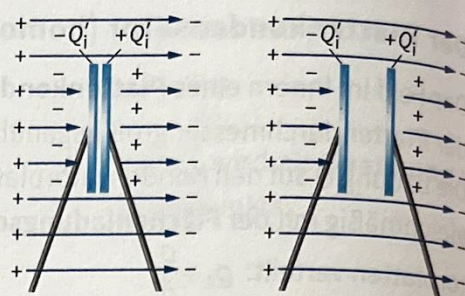


Abb. 2.7: Ladungstrennung durch Influenz

führt dabei zu einer Ladungsverschiebung, die nach der Trennung als Aufladung nachgewiesen werden kann (→ Abb. 2.7). Die Flächenladungsdichte ist dabei genauso groß wie die der Kondensatorplatte (→ Abb. 2.6).

PLATTENKONDENSATOR

Ladung:	$Q = C \cdot U$	$[C = A \cdot s]$
Kapazität:	$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$	$[F = \frac{C}{V}]$
Spannung:	$U = E \cdot d$	$[V = \frac{J}{C}]$
Flächenladungsdichte:	$\varrho_A = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$	$[\frac{C}{m^2}]$
Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8,854\,19 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V \cdot m}$	
Dielektrizitätszahl:	$\epsilon_r = 1$ in Vakuum, $\epsilon_r \approx 1$ in Luft, sonst $\epsilon_r > 1$	

Dielektrika

Befindet sich ein Isolator in einem elektrischen Feld, z. B. in einem Plattenkondensator, so wird er als **Dielektrikum** bezeichnet. Mit einem geladenen Plattenkondensator (→ Seite 43) lässt sich zeigen, dass die Kapazität C von der Wahl des Dielektrikums abhängt, wobei die Proportionalität der Flächenladungsdichte ϱ_A zur elektrischen Feldstärke E erhalten bleibt:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \quad \text{und} \quad \varrho_A = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$$

Der Proportionalitätsfaktor ϵ_0 ist die **elektrische Feldkonstante**. Ihr Wert ist eine Folge der in unserem Einheitensystem (SI-System) gewählten Definition der Stromstärke. ϵ_r heißt **Dielektrizitätszahl** oder **Permittivitätszahl** und gibt eine für das jeweilige Medium (Dielektrikum) zwischen den Kondensatorplatten spezifische Abweichung gegenüber dem Vakuum an ($\epsilon_{r, \text{Vakuum}} = 1$).

In Luft ist $\epsilon_r \approx 1$. Zur Vereinfachung werden ϵ_0 und ϵ_r in der Literatur häufig zur **Permittivität** ϵ zusammengefasst: $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$

Elektrische Flussdichte

Das Produkt aus elektrischer Feldkonstante, Dielektrizitätszahl und elektrischer Feldstärke wird **Verschiebungsdichte** oder **elektrische Flussdichte** $\vec{D}$ genannt: $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$.

An der Oberfläche von Metallen entspricht die Verschiebungsdichte $\vec{D}$ der Flächendichte ϱ_A . Hängt die Polarisation des Dielektrikums von der Kristallrichtung ab, so muss die Dielektrizitätszahl durch eine Matrix beschrieben werden. Dadurch kann es vorkommen, dass die Verschiebungsdichte $\vec{D}$ eine etwas andere Richtung aufweist als die elektrische Feldstärke $\vec{E}$.

Elektrisches Feld an Grenzflächen

An der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ändert sich die elektrische Feldstärke aufgrund der unterschiedlichen Dielektrizitätszahl. Ähnlich wie beim Brechungsgesetz für Wellen (→ Seite 110 f.) führt dies zu einer Richtungsänderung des elektrischen Feldes. Die neue Richtung ergibt sich aus den folgenden beiden Stetigkeitsbedingungen:

- ① Die zur Oberfläche senkrechte Komponente der Verschiebungsdichte ist konstant: $D_{\perp,1} = D_{\perp,2}$ bzw. $\epsilon_1 E_{\perp,1} = \epsilon_2 E_{\perp,2}$
- ② Die zur Oberfläche tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke ist konstant: $E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2}$ bzw. $\frac{D_{\parallel,1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{\parallel,2}}{\epsilon_2}$

Die Dielektrizitätszahl ist umso größer, je stärker das Gegenfeld ist, das sich im Dielektrikum bildet. Im Gegensatz zu einem Metall, in dem sich die Elektronen frei bewegen können und das elektrische Feld im Innern vollständig abschirmen (→ vgl. Influenz und FARADAY-Käfig, Seite 41) sind die Elektronen in einem Isolator an ihren Ort gebunden. Das äußere Feld verursacht jedoch eine Verschiebung der Elektronen gegenüber den Atomrümpfen (**Verschiebungspolarisation**) oder eine Ausrichtung bereits vorhandener Dipolmomente, wie z. B. bei Wasser (**Orientierungspolarisation**). Analog zur Influenz entsteht auch hierdurch ein elektrisches Feld, das dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Die elektrische Feldstärke im Innern eines Dielektrikums ist dadurch geringer als außerhalb.

Material	Vakuum	Luft (0 °C, 1bar)	Eis (-20 °C)	Wasser (0 °C)	Wasser (18 °C)	Wasser (40 °C)	Wasser- dampf (110 °C, 1bar)
Dielektri- zitätszahl	exakt 1	1,000 576	16	88	81,1	73,4	1,026

Material	Petro- leum (18 °C)	Ethanol (20 °C)	Papier	Glas	Porzellan	Plexiglas	Diamant
Dielektri- zitätszahl	2,1	25,8	3,7	5 bis 10	7	3,4	16,5

Tab. 2.1: Statische Dielektrizitätszahl ϵ_r einiger Materialien. Bei sehr hohen Frequenzen (GHz) nimmt die Dielektrizitätszahl langsam ab.

BEISPIEL

„Klebende“ Luftballons

Wird ein Luftballon an Haaren oder Kunstfasern gerieben, so lädt er sich auf, da durch die Reibung Elektronen von einem Isolator auf den anderen übertragen werden. Hält man ihn nun an die Zimmerdecke, so verursachen die Ladungen auf dem Luftballon eine Verschiebungspolarisation in der Oberfläche der Zimmerdecke. Zwischen den so entstandenen Dipolen und den Ladungen auf dem Luftballon wirkt eine elektrostatisch anziehende Kraft, wodurch der Luftballon an der Decke kleben bleibt. Da weder die Oberfläche der Zimmerdecke noch die umgebende Luft perfekte Isolatoren sind, entlädt sich der Luftballon mit der Zeit und fällt von der Decke wieder herab.

ELEKTRISCHE DIPOLE IM ELEKTRISCHEN FELD



Abb. 2.8: Ablenkung eines Wasserstrahls durch einen aufgeladenen Stab

Ein Objekt, das auf einer Seite positiv und auf der anderen Seite negativ geladen ist, wird als **elektrischer Dipol** bezeichnet. Ein typisches Beispiel ist das Wassermolekül. In einem homogenen elektrischen Feld wirken auf die positive und die negative Ladung gleich große Kräfte mit einer entgegengesetzten Richtung. Auf den Dipol wirkt damit effektiv ein **Drehmoment** (→ Seite 30). Beim Wasser ist dies die Ursache für die **Orientierungspolarisation** (→ Seite 45). In einem Mikrowellenherd führt die periodische Ausrichtung der Wassermoleküle zur Erwärmung der Speisen.

In einem inhomogenen Feld unterscheidet sich die Feldstärke am Ort der beiden Dipolladungen. Dadurch wirkt neben dem Drehmoment noch eine Kraft in Richtung der höheren Feldstärke. Beispielsweise wird ein Wasserstrahl von einem aufgeladenen Stab angezogen.

Der GAUSS'sche Satz

Für die „Ladungstrennung durch Influenz“ in → Abb. 2.7 gilt für jedes der Plättchen die Gleichung $Q = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \cdot A$. Da das elektrische Feld im Plattenkondensator homogen ist, können wir das Produkt $E \cdot A$ durch ein Integral über die Fläche dA ersetzen. Der Wert dieses Integrals ändert sich auch dann nicht, wenn wir über alle Oberflächen des Plättchens integrieren, da das Feld zwischen den Plättchen Null ist. Ein solches Integral wird als geschlossenes Oberflächenintegral (→ Anhang Seite 279) bezeichnet. Die aus diesen Überlegungen resultierende Gleichung nennt man den **GAUSS'schen Satz** (→ MAXWELL-Gleichungen auf Seite 76):

„Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche O entspricht der eingeschlossenen Ladung Q .“

GAUSS'scher Satz

$$Q = \oint_O \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Der Zylinderkondensator

Rollt man einen Plattenkondensator zu einem Zylinder auf, so wird aus den parallelen Feldlinien des homogenen Feldes ein radialsymmetrisches Feld. Die Flächenladungsdichte auf den Zylindern beträgt:

$$\varrho_A = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \quad \text{mit } A = 2\pi r \cdot l \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}$$

Die elektrische Feldstärke nimmt also radial mit $\frac{1}{r}$ ab. Für die Spannung folgt:

$$U_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\epsilon_0 \epsilon_r \pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\epsilon_0 \epsilon_r \pi \cdot l} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{2\epsilon_0 \epsilon_r \pi \cdot l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Die Kapazität ist somit proportional zur Länge des Zylinders und beträgt:

$$C = \frac{Q}{U} = 2\epsilon_0 \epsilon_r \pi \cdot \frac{l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{mit } r_2 > r_1$$

Der Kugelkondensator

Analog zu einem Zylinderkondensator bilden auch zwei ineinander geschachtelte Kugeln einen Kondensator. Aus der Flächenladungsdichte folgt wiederum die elektrische Feldstärke:

$$\varrho_A = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \quad \text{mit } A = 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$

Die elektrische Feldstärke nimmt also radial mit $\frac{1}{r^2}$ ab.

Für die Spannung folgt:

$$U_{r_1 r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Die Kapazität beträgt damit: $C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$ mit $r_2 > r_1$



Abb. 2.9: Feld eines Zylinderkondensators, sichtbar gemacht durch Gries

Das radiale COULOMB-Feld

Das elektrische Feld eines Kugelkondensators ist unabhängig vom Radius der Kugelschalen und hängt nur von der Ladung Q auf der Kugeloberfläche und dem Abstand r vom Zentrum der Kugel ab:

COULOMB-Feld
$$E_Q(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2} \Rightarrow E_Q(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \text{ an Luft oder im Vakuum}$$

Ein solches radialsymmetrisches Feld, das auch für eine punktförmige Ladung gilt, wird als **COULOMB-Feld** bezeichnet. Eine andere Ladung q im Abstand r erfährt in diesem Feld die **COULOMB-Kraft**:

COULOMB-Kraft
$$F_{qQ} = q \cdot E_Q = \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2} \Rightarrow F_{qQ} = q \cdot E_Q = \frac{q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \text{ an Luft oder im Vakuum}$$

CHARLES AUGUSTIN
DE COULOMB
1736 – 1806

Dieses Kraftgesetz für zwei punktförmige oder kugelsymmetrische Ladungen wurde experimentell von CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB gefunden und wird daher als **COULOMB-Gesetz** bezeichnet.

Haben die Ladungen q und Q das gleiche Vorzeichen, so ist die COULOMB-Kraft positiv, was einer Abstoßung entspricht. Bei einem unterschiedlichen Vorzeichen wird die Kraft hingegen negativ, die Ladungen ziehen sich an.

Die Energie einer Probeladung im COULOMB-Feld wird durch das **COULOMB-Potential** beschrieben:

COULOMB-Potential
$$W_{\text{pot}}(q, r) = q \varphi(\vec{r}) \text{ mit } \varphi(r) = - \int_{\infty}^r E(r') \cdot dr' \Rightarrow$$

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r'^2} dr' = - \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}$$

Das COULOMB-Potential entspricht damit der Spannung eines Kugelkondensators mit $r_2 \rightarrow \infty$:

$$U_{r_1 r_2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \xrightarrow{r_2 \rightarrow \infty} \varphi(r_1) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_1}$$

TIPP

Formelzeichen für Energie W oder E

In Schulbüchern wird häufig das Symbol E für Energie verwendet. Um Verwechslungen mit der elektrischen Feldstärke E zu vermeiden, wird in diesem Buch für die Energie grundsätzlich W verwendet, was sich vom englischen *work* ableitet.

Energiedichte des elektrischen Feldes

Wird ein Kondensator aufgeladen, so steigt mit zunehmender Ladung Q auf den Kondensatorplatten auch die Spannung U . Um den Kondensator mit der zusätzlichen Ladung ΔQ aufzuladen, ist die Energie $\Delta W = \Delta Q \cdot U$ notwendig. Addieren wir diese Energieportionen beginnend bei $Q = 0$ und berücksichtigen dabei $Q = C \cdot U$, so wird hieraus das Integral:

$$W = \int U dQ = \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \int Q dU$$

Mit $U = E \cdot d$ und $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ folgt:

$$W_{\text{Kondensator}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \underbrace{A \cdot d}_{=V} \cdot E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot V \cdot E^2 = W_{\text{el}}$$

Teilt man diese **elektrische Feldenergie** noch durch das Volumen V , so folgt die **elektrische Energiedichte**:

$$\rho_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E^2$$

Energiedichte

Eine genauere Herleitung liefert das vektorielle Ergebnis: $\rho_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$

(→ siehe auch Zusatzwissen: Elektrische Flussdichte D auf Seite 45)

Kondensatoren im elektrischen Schaltkreis

Parallelschaltung: Werden zwei Kondensatoren C_1 und C_2 parallel geschaltet, so haben beide die gleiche Spannung U . Die Ladung der Kondensatoren beträgt $Q_1 = C_1 \cdot U$ und $Q_2 = C_2 \cdot U$.

Also insgesamt: $Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = (C_1 + C_2) \cdot U = C_{\text{ges}} \cdot U$

Für die Parallelschaltung gilt somit: $C_{\text{ges}} = \sum_i C_i$

Reihenschaltung: Werden zwei Kondensatoren C_1 und C_2 in Reihe geschaltet, so erhalten beide beim Laden die gleiche Ladung Q . Für die Spannung gilt damit:

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}$$

Für die Reihenschaltung folgt somit: $\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

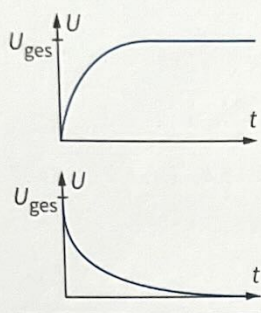


Abb. 2.10: Auf- und Entladekurve eines Kondensators

Aufladen und Entladen über einen Widerstand: Wird ein Kondensator C über einen Widerstand R aufgeladen (Reihenschaltung aus R und C) so gilt: $U_{\text{ges}} = U_R + U_C$ mit $U_R = R \cdot I$. Der Strom I entspricht dabei der Ladungsänderung des Kondensators: $I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$ mit $Q = C \cdot U_C \Rightarrow U_{\text{ges}} = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet: $U_C = U_{\text{ges}} \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{RC} \right)} \right)$

Analog folgt für die Entladung des Kondensators: $U_C = U_{\text{ges}} e^{\left(-\frac{t}{RC} \right)}$

Das Produkt $R \cdot C$ wird als Zeitkonstante dieses Vorgangs bezeichnet.

Elektronen im Kondensator – die BRAUN'sche Röhre

KARL FERDINAND BRAUN
1850 – 1918

Durch die zunehmende Verbreitung von Flachbildschirmen sieht man Fernseher und Monitore, die nach dem Prinzip der Elektronenstrahlröhre arbeiten, meist nur noch in Museen und bei Experimenten im Physikunterricht. In der zugrunde liegenden **BRAUN'schen Röhre (Kathodenstrahlröhre)** wird ein Elektronenstrahl erzeugt und abgelenkt, sodass er auf einem Leuchtschirm eine phosphoreszierende Schicht zum Leuchten anregt.

Der Elektronenstrahl entsteht durch den **glühelektrischen Effekt**: In einem evakuierten Glaskolben wird ein Draht (**Glühkathode**) mit der **Heizspannung** U_H zum Glühen gebracht, sodass er Elektronen aussendet. Diese werden mit der **Anodenspannung** U_A zur **Anode** beschleunigt.

ARTHUR WEHNELT
1871 – 1944

Der negativ geladene **WEHNELT-Zylinder** umgibt die Glühkathode und bündelt den Elektronenstrahl auf ein Loch in der Anode. Im Vergleich zur ursprünglichen BRAUN'schen Röhre verbessert er die Elektronenausbeute und kann zusätzlich die Helligkeit des erzeugten Bildpunktes steuern. Die von den **Ablenkplatten** generierten elektrischen Felder sorgen für eine Auslenkung in horizontaler und vertikaler Richtung.

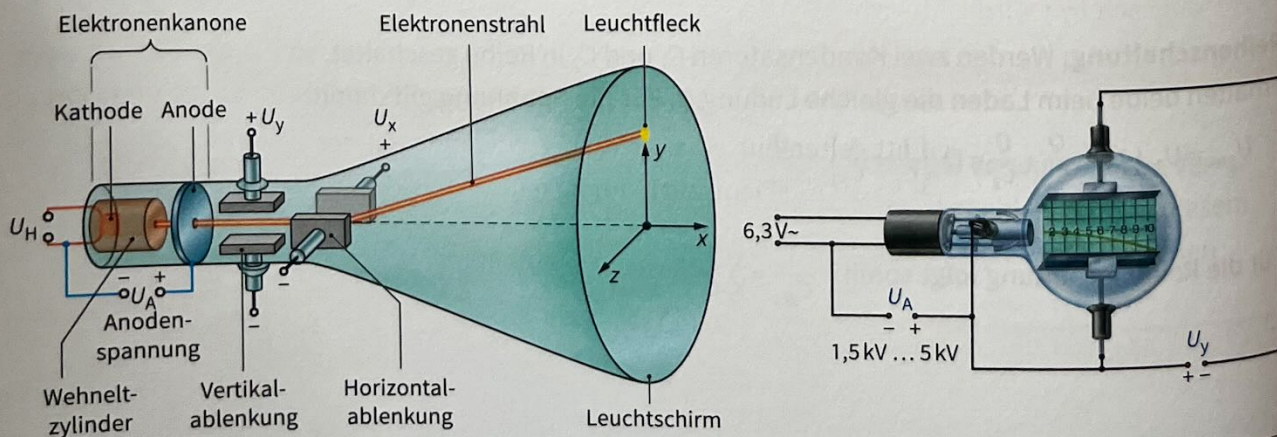


Abb. 2.11: Links BRAUN'sche Röhre mit Ablenkplatten und WEHNELT-Zylinder, rechts vereinfachter Schulaufbau

Energie der Elektronen:

$$W = q_e \cdot U_A = \frac{1}{2} m_e \cdot v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2 U_A \cdot q_e}{m_e}}$$

Elektronenmasse:
 $m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 Elektronenladung:
 $q_e = -e$
 $= -1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

ELEKTRONENVOLT

Um die Energie von geladenen Teilchen, insbesondere von Elektronen zu beschreiben, verwendet man die Energieeinheit **Elektronenvolt**. Sie entspricht der Energie eines Elektrons, das mit einer Spannung von einem Volt beschleunigt wurde: $1 \text{ eV} = 1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6021773 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Bewegung in x-Richtung: $x = t \cdot v_x = t \cdot \sqrt{\frac{2 U_A \cdot q_e}{m_e}}$ bzw. $t = x \cdot \sqrt{\frac{m_e}{2 U_A \cdot q_e}}$

Ablenkung in y/z-Richtung: Wegen der geringen Masse der Elektronen hat die Gravitationsbeschleunigung (Schwerebeschleunigung) keinen Einfluss auf den Bahnverlauf, sodass für die Ablenkung in y- und z-Richtung die gleichen Formeln gelten (→ „Bewegungsgleichungen“ auf Seite 8 ff.).

Beschleunigung: $a_y = \frac{F_E}{m_e} = \frac{E_y \cdot q_e}{m_e} = \frac{U_y \cdot q_e}{d_y \cdot m_e}$ mit $q_e = -e = -1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ und $m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Ablenkung: $y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 = \frac{U_y \cdot q_e}{2 d_y \cdot m_e} \cdot t^2$

Einsetzen von $t = \frac{x}{v_x}$ liefert: $y(x) = \frac{1}{2} a_y \cdot \frac{x^2}{v_x^2} = -\frac{e}{2 m_e} \cdot \frac{U_y}{d_y} \cdot \frac{x^2}{v_x^2}$

Durch Einsetzen von v_x ergibt sich eine Bahnkurve, die von der Elektronenmasse m_e und der Elektronenladung e unabhängig ist:

$$y(x) = \frac{U_y}{4 d_y \cdot U_A} x^2 \quad \text{bzw.} \quad z(x) = \frac{U_z}{4 d_z \cdot U_A} x^2$$

Typisch sind Beschleunigungsspannungen um 17 kV und Ablenkspannungen um 100 V. Beschleunigungsspannungen oberhalb von 20 kV erhöhen die Abbildungsqualität, es entsteht dabei jedoch Röntgenstrahlung, die z. B. durch bleihaltige Gläser abgeschirmt wird.

VORSICHT: FALLE

Die Formeln in diesem Abschnitt gelten nur, solange die Geschwindigkeit der Elektronen wesentlich kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit c .

$$v_x = \sqrt{\frac{2 U_A \cdot q_e}{m_e}} \ll c \Leftrightarrow \frac{2 U_A \cdot q_e}{m_e} \ll c^2 \Leftrightarrow U_A \ll \frac{c^2 m_e}{2 q_e} = 255499 \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2 \text{ C}} \approx 255 \text{ kV}$$

Hinweis: $1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$ und $1 \text{ J} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$

Der MILLIKAN-Versuch

ROBERT ANDREWS
MILLIKAN
1868 – 1953
Nobelpreis 1932

Vor etwa einem Jahrhundert gelang es ROBERT ANDREWS MILLIKAN, die Ladung eines Elektrons bzw. die Elementarladung e durch folgenden Versuch experimentell zu bestimmen: Zwischen zwei waagerechten Kondensatorplatten wird Öl zerstäubt. Dabei findet bei den meisten Tröpfchen eine geringe positive oder negative Aufladung q statt, sodass sie im elektrischen Feld verschieden schnell nach oben oder unten wandern.

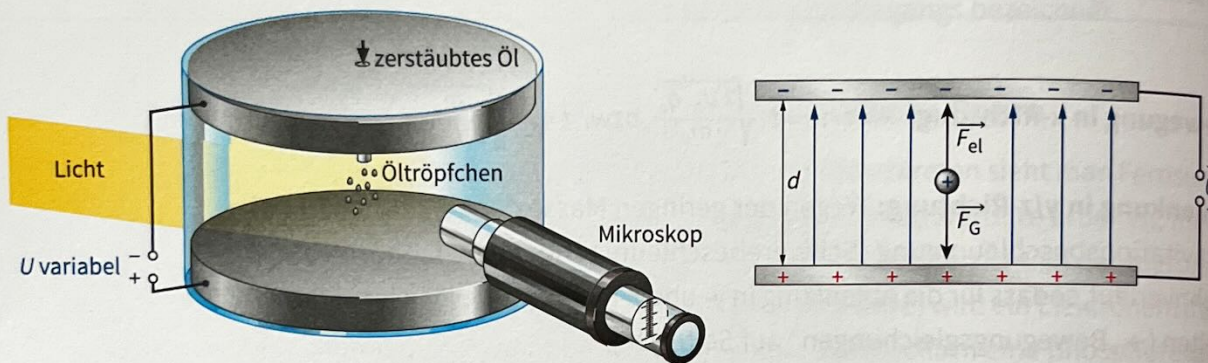


Abb. 2.12: MILLIKAN-Versuch: Experimenteller Aufbau links, Schema rechts.

Die Geschwindigkeit der Tröpfchen wird durch die Gewichtskraft F_G , die elektrische Kraft F_E und die Kraft der viskosen Luftreibung F_{ST} ($\rightarrow$ „STOKES'sches Reibungsgesetz“ Seite 19) bestimmt, zwischen denen sich ein Gleichgewicht einstellt:

$$F_G + F_E = F_{ST}$$

Konstanten:

- $\Rightarrow \rho = \text{Dichte des Öls (z. B. } 973 \text{ kg/m}^3)$
- $\Rightarrow g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $\Rightarrow \eta = \text{Zähigkeit der Luft für } T = 22^\circ\text{C}$
 $= 1,828 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$
- $\Rightarrow \text{Gewichtskraft } F_G = -m \cdot g = -V \cdot \rho \cdot g = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \text{ mit Tröpfchenradius } r$
- $\Rightarrow \text{elektrische Kraft } F_E = E \cdot q = \frac{U_0}{d} \cdot q \text{ mit Kondensatorspannung } U_0 \text{ und Plattenabstand } d$
- $\Rightarrow \text{STOKES'sches Reibungsgesetz } F_{ST} = -6\pi\eta r v_0 \text{ mit Tröpfchengeschwindigkeit } v_0$

Schwebemethode

Durch ein Mikroskop wird eines der geladenen Tröpfchen beobachtet und die Gleichspannung U_0 am Kondensator so eingestellt, dass es genau in der Schwebelage gehalten wird. Somit gilt: $F_G = -F_E$

Nun wird die Spannung abgeschaltet und die Sinkgeschwindigkeit v_0 des Tröpfchens bestimmt. In diesem Fall ist $F_G = -F_{ST}$.

Auflösen dieser Gleichung liefert den Tröpfchenradius r :

$$F_G = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \stackrel{!}{=} 6\pi\eta r v_0 = -F_{ST} \text{ mit } v_0 < 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}} |v_0|$$

Einsetzen in $F_G = -F_E$ und auflösen nach q :

$$F_G = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = -\frac{4}{3}\pi \sqrt{\frac{9^3 \eta^3}{8\rho^3 g^3}} |v_0|^3 \cdot \rho g = -9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3}{\rho g}} \cdot \sqrt{|v_0|^3} \stackrel{!}{=} -\frac{U_0}{d} \cdot q$$

$$\Rightarrow q = \frac{9\pi d}{U_0} \sqrt{\frac{2\eta^3}{\rho g}} \cdot \sqrt{|v_0|^3}$$

Gleichfeldmethode

Bei einer beliebigen Kondensatorspannung U_1 wird Steiggeschwindigkeit $v_\uparrow$ eines Tröpfchens gemessen, anschließend wird das Feld umgepolt und die Sinkgeschwindigkeit $v_\downarrow$ gemessen. Aus dem Kräftegleichgewicht $F_G + F_E = -F_{ST}$ folgt:

$$F_G + q \frac{U_\uparrow}{d} = 6\pi\eta r v_\uparrow \text{ und } F_G + q \frac{U_\downarrow}{d} = 6\pi\eta r v_\downarrow \text{ mit } v_\uparrow > 0, v_\downarrow < 0, |v_\uparrow| < |v_\downarrow| \text{ und}$$

$$U_\uparrow = -U_\downarrow$$

Durch Addition der Gleichungen beseitigen wir die Kondensatorspannung und lösen nach r auf:

$$-2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r (v_\uparrow + v_\downarrow) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g} \cdot \frac{|v_\downarrow| - |v_\uparrow|}{2}}$$

Analog beseitigt Subtraktion der Gleichungen Gewichtskraft F_G :

$$2q \frac{U_\uparrow}{d} = 6\pi\eta r (v_\uparrow - v_\downarrow) = 6\pi\eta \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g} \cdot \frac{|v_\downarrow| - |v_\uparrow|}{2}} (v_\uparrow - v_\downarrow)$$

$$\Rightarrow q = \frac{9\pi d}{2U_1} \sqrt{\frac{\eta^3}{\rho g} \cdot (|v_\downarrow| - |v_\uparrow|) (|v_\downarrow| + |v_\uparrow|)}$$

Fazit

Beide Methoden liefern eine Gleichung für die Ladung des Tröpfchens als Funktion der Kondensatorspannung und der gemessenen Geschwindigkeit(en). Das Experiment zeigt, dass die gemessenen Ladungen immer ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung $e = 1,602\,177\,3 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ sind (Abb. 2.13).

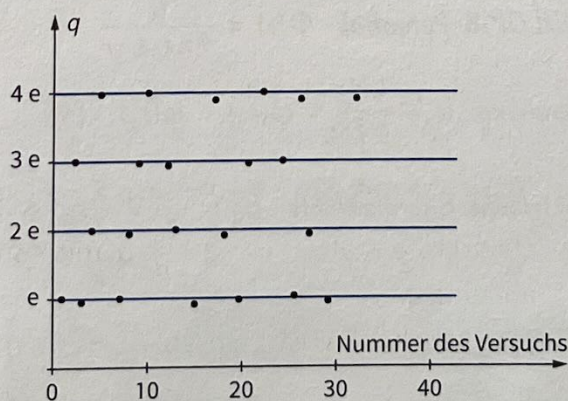


Abb. 2.13: Streuung zahlreicher Messwerte für die Tröpfchenladung q um ganzzahlige Vielfache $n \cdot e$.

ELEMENTARLADUNG

Alle Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung $e = 1,602\,177\,3 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Ein Elektron hat die Ladung $q_e = -e$.

2.1 Elektrostatisches Feld

ELEKTRISCHE LADUNG

Elektrische Ladungen werden durch überschüssige oder fehlende Elektronen mit der Ladung $q_e = -e$ verursacht (MILLIKAN-Versuch).

ELEKTRISCHES FELD

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist ein Maß für die Kraft $\vec{F}_E$, die auf eine positive Probeladung q wirkt. Zur Veranschaulichung zeichnet man Feldlinien, die per Definition immer von der positiven zur negativen Ladung verlaufen. Auf metallischen Oberflächen stehen die elektrischen Feldlinien senkrecht. In einem Metall schirmen die frei beweglichen Elektronen elektrische Felder durch Influenz ab, Isolatoren zeigen eine schwächere Abschirmung aufgrund von Verschiebungs- oder Orientierungspolarisation.

→ elektrische Feldstärke: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = -\text{grad}\varphi(\vec{r}) \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$

→ COULOMB-Feld: $E_Q(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2} \Rightarrow F_{qQ} = q \cdot E_Q = \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$

ENERGIE, SPANNUNG, ELEKTRISCHES POTENTIAL

→ potentielle Energie: $\Delta W_{el} = - \int_{r_0}^r F_E(s) ds = -q \int_{r_0}^r E(s) ds =: q\varphi(r) \quad [\text{J}]$

→ COULOMB-Potential: $\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot r}$

→ Spannung: $U = \frac{\Delta W_{el}}{q} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \quad [\text{V}]$

→ elektrische Energiedichte: $\rho_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E^2$

KONDENSATOREN

→ Kapazität eines (Platten-)Kondensators: $C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \quad \left[F = \frac{C}{V}\right]$

→ Flächenladungsdichte (Verschiebungsdichte): $\rho_A = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$

→ Ladekurve: $U_C = U_{ges} \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{RC}\right)}\right)$

→ Entladekurve: $U_C = U_{ges} e^{\left(-\frac{t}{RC}\right)}$

2.2 Magnetisches Feld

Grundlegende Begriffe

Anders als bei elektrischen Ladungen gibt es beim Magnetismus keine **magnetischen Monopole**. Magnete sind immer **Dipole** mit einem **magnetischen Nordpol** und einem **magnetischen Südpol**. Bei Permanentmagneten wird der Nordpol häufig rot und der Südpol grün gefärbt. Gleichnamige Pole stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Der Raum, in dem diese Kräfte wirken, heißt magnetisches Feld. In einem inhomogenen **magnetischen Feld**, z. B. an den Polen eines Magneten, werden ferromagnetische Materialien (→ Seite 56), in das Gebiet der höheren Feldstärke gezogen. In einem homogenen magnetischen Feld erfolgt hingegen nur eine Ausrichtung der Dipole, da die anziehenden Kräfte auf beide Pole gleich groß sind. Auf den Dipol wirkt damit effektiv ein **Drehmoment** (→ Seite 30), aber keine Kraft.

Der Verlauf magnetischer Feldlinien lässt sich mit Eisenfeilspänen sichtbar machen: In einem äußeren Magnetfeld werden die **ferromagnetischen** Späne magnetisiert (**magnetische Influenz**) und ziehen sich gegenseitig an. Die Richtung der magnetischen Feldlinien gibt an, in welche Richtung der Nordpol einer Kompassnadel zeigt. Im Erdmagnetfeld verlaufen sie also vom geografischen Südpol zum geografischen Nordpol. Aus magnetischer Sicht ist dieser also ein Südpol. Ganz allgemein verlaufen die Feldlinien bei einem Permanentmagneten vom Nordpol zum Südpol. Die Dichte der Feldlinien entspricht wie beim elektrischen Feld der Stärke des Magnetfeldes.

Im Gegensatz zum elektrischen Feld sind die Feldlinien des Magnetfeldes immer geschlossen. Dies gilt auch bei einem Permanentmagneten, bei dem sie scheinbar am Nordpol beginnen und am Südpol enden: Tatsächlich verlaufen sie lediglich zu einem Teil im Innern des Magneten. Verbindet man die beiden Enden eines Hufeisenmagneten mit einem **Joch**, so verschwindet das Magnetfeld außerhalb des Metalls fast vollständig. Dies geschieht aufgrund der höheren Permeabilität von ferromagnetischen Stoffen gegenüber Luft, da die hohe Permeabilitätszahl (→ Seite 58) eine größere Flussdichte zulässt und die Feldlinien quasi bündelt.

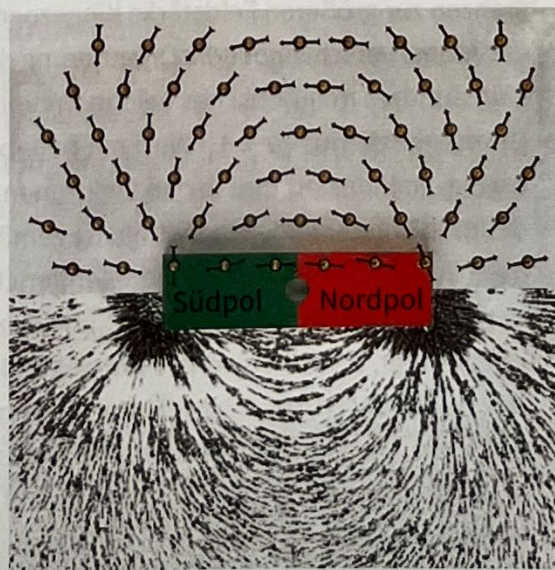


Abb. 2.14: Feldlinienbild eines Permanentmagneten: Oben mit Kompassnadeln, unten mit Eisenspänen.

Magnetische Eigenschaften der Materie

Die Magnetisierung der Materie beruht auf den magnetischen Eigenschaften der Atome, die ihrerseits quantenmechanisch durch bewegte Ladungen erklärt werden können. Die Stärke des **atomaren magnetischen Moments** ist für jedes chemische Element charakteristisch. Die magnetischen Eigenschaften eines Materials lassen sich hieraus allerdings noch nicht ablesen. Entscheidend ist vielmehr die Ausrichtung dieser atomaren Dipolmomente im Kristallgitter. Abhängig davon, wie sich ein Material in einem äußeren Magnetfeld verhält, unterscheidet man verschiedene Stoffgruppen:

PIERRE-ERNEST WEISS
1865 – 1940

PIERRE CURIE
1859 – 1906,
Nobelpreis 1903

➔ **Ferromagnetismus** ($\mu_r \gg 1$): In ferromagnetischen Materialien ordnen sich die atomaren magnetischen Momente von sich aus zu sogenannten **WEISS'schen Bezirken**. Im unmagnetisierten Zustand ist die Ausrichtung dieser **Domänen (Elementarmagnete)** statistisch verteilt. In einem äußeren Magnetfeld werden nacheinander komplette WEISS'sche Bezirke ausgerichtet. Diese Orientierung bleibt auch ohne äußeres magnetisches Feld teilweise erhalten (**Remanenz**, → „Neukurve und Hysteresekurve“ auf Seite 60). Typische ferromagnetische Materialien sind **Eisen**, **Nickel** und **Cobalt**, sowie deren Legierungen. Für sehr starke Permanentmagnete setzt man heute die Legierung $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ein und spricht dann von Neodymmagneten. Oberhalb der materialabhängigen **CURIE-Temperatur** wird die ferromagnetische Ordnung aufgebrochen und die Substanz wird paramagnetisch.

➔ **Paramagnetismus** ($\mu_r > 1$): Der Paramagnetismus ähnelt dem Ferromagnetismus, ist jedoch wesentlich schwächer. Er entsteht, wenn die Atome ein magnetisches Dipolmoment aufweisen und sich in einem äußeren Magnetfeld ausrichten. In einem inhomogenen Magnetfeld werden paramagnetische Substanzen zur größeren Feldstärke hingezogen. Durch die thermische Bewegung der Atome verschwindet die Orientierung der atomaren Dipolmomente, sobald kein äußeres magnetisches Feld mehr vorhanden ist.

➔ **Diamagnetismus** ($\mu_r < 1$): Wird ein beliebiges Material in ein Magnetfeld gebracht, so induziert dies in den Elektronenschalen der Atome Ringströme. Das dadurch entstehende Magnetfeld ist gemäß der LENZ'schen Regel (→ Seite 72) dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet. In einem inhomogenen Magnetfeld werden diamagnetische Substanzen in Bereiche geringer Feldstärke abgedrängt. Da der Effekt des Diamagnetismus sehr schwach ist, lässt er sich nur beobachten, wenn das Material kein atomares magnetisches Moment aufweist. Da **Supraleiter** keinen elektrischen Widerstand besitzen, treten in ihnen makroskopische Ringströme auf, durch die ein äußeres Magnetfeld vollständig abgeschirmt wird. Supraleiter sind daher perfekte Diamagnete ($\mu_r = 0$) (→ **MEISSNER-OSCHENFELD-Effekt**, Glossar auf Seite 255).

WALTHER MEISSNER
1882 – 1974
ROBERT OSCHENFELD
1901 – 1993

ZUSATZWISSEN

Weitere magnetische Stoffgruppen

- **Antiferromagnetismus:** Liegt vor, wenn in einem Kristall zwei Untergitter vorhanden sind, deren gleich große magnetische Momente sich antiparallel einstellen. Antiferromagnete haben trotz ihrer hohen magnetischen Ordnung kein resultierendes magnetisches Moment.
- **Ferrimagnetismus:** Liegt vor, wenn in einem Kristall zwei Untergitter vorhanden sind, deren unterschiedlich große magnetische Momente sich antiparallel einstellen. Ferrimagnete haben ein kleines effektives magnetisches Moment. Ein typischer Vertreter ist das natürlich vorkommende Mineral Magnetit (Fe_3O_4), das zur Herstellung von kleinen Permanentmagneten wie Tafelmagneten oder Kompassnadeln eingesetzt wird.
- **Ferrite:** Keramische ferrimagnetische Materialien mit einem hohen spezifischen Widerstand. Sie werden in der Elektronik häufig als Spulenkern oder Antennen eingesetzt, da durch ihren hohen Widerstand störende Wirbelströme (→ Seite 76) stark unterdrückt werden.

Elektromagnetismus

Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld, dessen Feldlinien als konzentrische Kreise senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladungen stehen. Anders als bei Permanentmagneten gibt es hier keinen ausgezeichneten Nord- oder Südpol. Man nennt ein solches Feld deshalb ein **magnetisches Wirbelfeld**. Die Feldlinien des magnetischen Wirbelfeldes verlaufen in Bezug auf die technische Stromrichtung im Uhrzeigersinn (**Rechte-Faust-Regel**, Abb. 2.15). Bezogen auf die Bewegungsrichtung der Elektronen, die der technischen Stromrichtung entgegen gerichtet ist, verlaufen die Feldlinien gegen den Uhrzeigersinn (**Linke-Faust-Regel**).

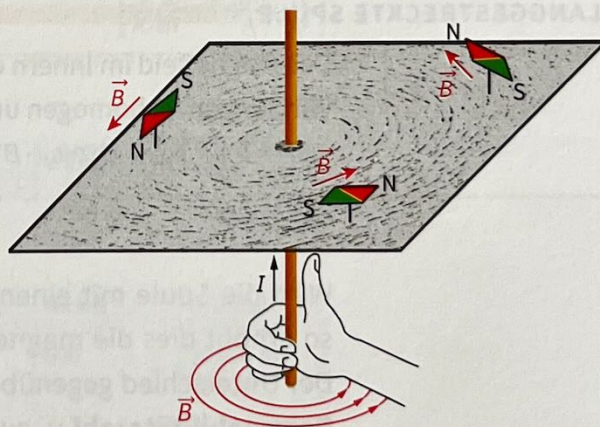


Abb. 2.15: Die Rechte-Faust-Regel gibt die Richtung der magnetischen Feldlinien an, wobei der Daumen in die Bewegungsrichtung positiver Ladungen (technische Stromrichtung) zeigt.

VORSICHT: FALLE

Definition der Stromrichtung

In der Physik wird der Stromfluss häufig durch die Bewegungsrichtung der Elektronen definiert, d. h. vom Minuspol (Elektronenquelle) zum Pluspol. Als „technische Stromrichtung“ oder auch „konventionelle Stromrichtung“ bezeichnet man jedoch die Gegenrichtung, also die Bewegungsrichtung einer gedachten positiven Ladung.

Feldstärke und Flussdichte einer Spule – Materie im Magnetfeld

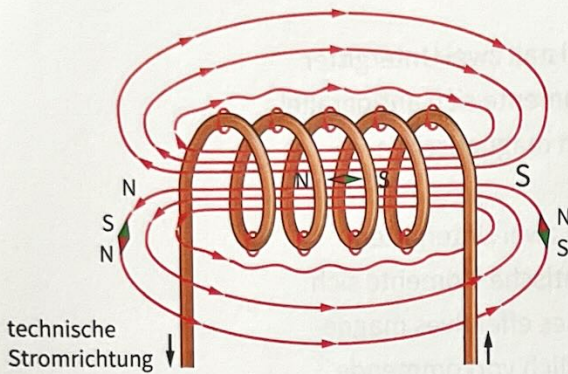


Abb. 2.16: Die Feldlinien der einzelnen Drähte überlagern sich im Innern der Spule zu einem homogenen Magnetfeld.

Wird ein Leiter zu einer **Spule** aufgewickelt, so überlagern sich die Magnetfelder der einzelnen Windungen. Ist die Spule sehr lang im Verhältnis zu ihrem Querschnitt, so ist das Feld im Innern der Spule annähernd homogen.

Die **magnetische Feldstärke** H im Innern einer Spule ist proportional zur Stromstärke I und zum Quotienten aus der Anzahl der Windungen n und der Länge l : $H = I \cdot \frac{n}{l}$

Zu den Enden hin nimmt das Feld in der Spule auf die Hälfte ab. Dies wird verständlich, wenn wir die Spule in Gedanken verlängern. Das vorherige Ende liegt nun im homogenen Bereich des Feldes und die Bereiche links bzw. rechts von der betrachteten Stelle tragen je zur Hälfte zum Feld bei. Außerhalb der Spule ist das Feld stark divergent, da die Feldlinien geschlossen sein müssen und somit außen die beiden Enden der Spule verbinden.

LANGGESTRECKTE SPULE

Das Magnetfeld im Innern einer langgestreckten Spule der Länge l mit n Windungen ist homogen und beträgt:

$$H = I \cdot \frac{n}{l} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad \text{bzw.} \quad B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l} \left[\text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

Wird die Spule mit einem ferromagnetischen Material (→ Seite 56) gefüllt, so erhöht dies die magnetische Flussdichte im Kern der Spule dramatisch. Der Unterschied gegenüber dem Vakuum wird durch die materialabhängige **Permeabilitätszahl** μ_r ausgedrückt. Bei magnetischen Materialien spielt die Permeabilitätszahl dieselbe Rolle wie die Dielektrizitätszahl bei Dielektrika (→ Seite 44 f.). In Analogie zum elektrischen Feld definiert man daher die **magnetische Flussdichte** B :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Die **magnetische Feldkonstante** μ_0 ist eine Folge des von uns verwendeten Einheitensystems (SI-System). Zur Vereinfachung werden μ_0 und μ_r in der Literatur häufig zur **Permeabilität** $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ zusammengefasst. Die Einheit der magnetischen Flussdichte ist das Tesla:

NIKOLA TESLA
1856 – 1943

Tesla

$$1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

ZUSATZWISSEN

Magnetfeld an Grenzflächen

An der Grenzfläche zwischen zwei magnetischen Materialien ändert sich die magnetische Feldstärke aufgrund der unterschiedlichen Permeabilitätszahlen. Ähnlich wie beim Brechungsgesetz für Wellen (→ Seite 110f.) führt dies zu einer Richtungsänderung des magnetischen Feldes. Die neue Richtung ergibt sich aus den folgenden beiden Stetigkeitsbedingungen:

- ① Die zur Oberfläche senkrechte Komponente der magnetischen Flussdichte ändert ihren Wert nicht:

$$B_{\perp,1} = B_{\perp,2} \text{ bzw. } \mu_1 H_{\perp,1} = \mu_2 H_{\perp,2}$$

- ② Die zur Oberfläche tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke ändert ihren Wert nicht:

$$H_{\parallel,1} = H_{\parallel,2} \text{ bzw. } \frac{B_{\parallel,1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel,2}}{\mu_2}$$

MAGNETISCHE FLUSSDICHTEN

In Analogie zum elektrischen Feld definiert man die magnetische Flussdichte B und die magnetische Feldstärke H :

$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ mit Permeabilitätszahl μ_r und magnetischen Feldkonstante μ_0 .

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1,256\,64 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

$$\left[\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \text{T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

Material	Vakuum	Gold	Kupfer	Wasser	Luft
Permeabilitätszahl μ_r	exakt 1	0,999 971	0,999 990	0,999 991	1,000 000 4

Material	Eisen (96 % Fe, 4 % Si)	Cobalt	Nickel	μ -Metall
Permeabilitätszahl μ_r	400 ($H = 0$), 8000 (Sättigung)	250	600	30 000 bis 70 000

Tab. 2.2: Permeabilitätszahlen einiger Materialien. Bei ferromagnetischen Materialien (→ Seite 56) nimmt die Permeabilitätszahl mit steigender Feldstärke zu, bis ein Sättigungswert erreicht ist.

MUMETALL (M-METALL)

Als MuMetall (engl. Permalloy) wird eine weichmagnetische Nickel-Eisen-Legierung mit ca. 80 % Nickel bezeichnet, die eine sehr hohe Permeabilitätszahl ($\mu_r \approx 30\,000$ bis $70\,000$) aufweist. Durch mechanische Verformung verändert MuMetall seine magnetischen Eigenschaften und die Permeabilitätszahl sinkt dramatisch ab ($\mu_r \approx 150$). Die häufigste Anwendung von MuMetall besteht in der Abschirmung niederfrequenter elektromagnetischer Wellen im Frequenzbereich bis 10 kHz.

Neukurve und Hysteresekurve

In **ferromagnetischen** (→ Seite 56) Materialien bilden die magnetischen Dipolmomente von sich aus Bereiche, in denen sie parallel ausgerichtet sind (Weiss'sche Bezirke). Bei einem unmagnetisierten Material ist die Ausrichtung dieser magnetischen Domänen (**Elementarmagnete**) statistisch verteilt. Bringt man das Material nun in ein äußeres Magnetfeld, werden sie nach und nach ausgerichtet, wodurch die Permeabilitätszahl des Materials stark ansteigt. Wird das äußere Magnetfeld wieder abgeschaltet, nehmen die meisten magnetischen

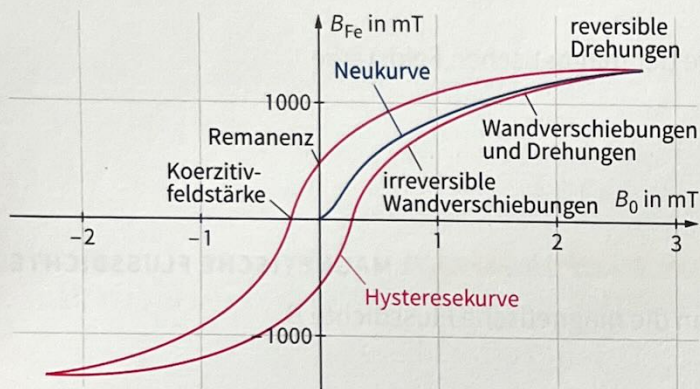


Abb. 2.17: Neukurve und Hysteresekurve eines geschlossenen Weicheisenkerns in einer Spule

Domänen wieder ihre ursprüngliche Richtung an. Die übrigen verursachen weiterhin ein magnetisches Feld. Das Material wurde somit magnetisiert. Die Stärke des verbleibenden Feldes wird als **Remanenz** bezeichnet. Die zum Entmagnetisieren notwendige äußere Feldstärke, nennt man **Koerzitivfeldstärke**. Man unterscheidet zwischen **weichmagnetischen Materialien** mit geringer Remanenz und Koerzitivfeldstärke und **hartmagnetischen Materialien** mit hohen Werten.

Die LORENTZ-Kraft

HENDRIK ANTOON
LORENTZ
1853–1928,
Nobelpreis 1902

LORENTZ-Kraft

Eine sich bewegende elektrische Ladung ist von einem magnetischen Wirbelfeld (→ Seite 57 f.) umgeben. Die Wechselwirkung mit einem äußeren Magnetfeld B resultiert in einer Kraft, die am größten ist, wenn die Bewegungsrichtung senkrecht auf den Feldlinien steht:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

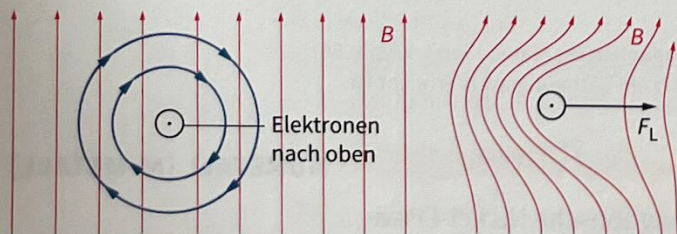


Abb. 2.18: Die LORENTZ-Kraft auf eine bewegte Ladung ist eine Folge der Wechselwirkung zwischen dem Wirbelfeld der bewegten Ladung und einem statischen Magnetfeld.

Stehen die Feldlinien nicht senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so wird nur die senkrechte Komponente $\vec{B}_\perp$ von $\vec{B}$ wirksam; die parallel zur Elektronenrichtung verlaufende Komponente ist wirkungslos:

$$F_L = q \cdot v \cdot B_\perp \text{ bzw. } F_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \varphi$$

VORSICHT: FALLE

Die Ladung eines Elektrons ist negativ! $q_e = -e$

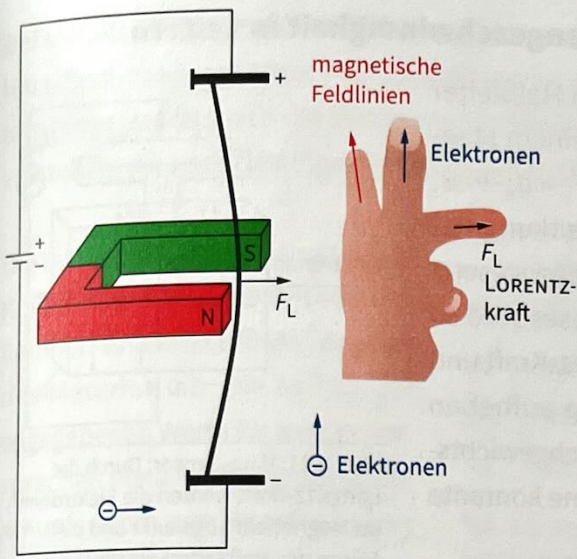


Abb. 2.19: Ein stromdurchflossener Leiter erfährt in einem Magnetfeld eine Kraft. Die Richtung dieser LORENTZ-Kraft zeigt die Drei-Finger-Regel an.

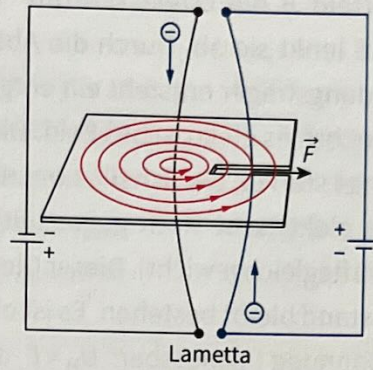


Abb. 2.20: Die Elektronen im rechten Leiter erfahren im Magnetfeld des linken Leiters die LORENTZ-Kraft.

DREI-FINGER-REGEL

Die Richtung der LORENTZ-Kraft kann mit der Drei-Finger-Regel bestimmt werden: Zeigt der Daumen der linken Hand in die Bewegungsrichtung der Elektronen und der Zeigefinger in Richtung des magnetischen Feldes, dann gibt der Mittelfinger die Richtung der LORENTZ-Kraft an.

BEISPIEL

Parallele Leiter

Die LORENTZ-Kraft wirkt auch zwischen zwei stromführenden Leitern: Antiparallele Ströme stoßen sich gegenseitig ab, parallele Ströme ziehen sich an (→ Abb. 2.20). Für einen Leiter der Länge s in einem Magnetfeld bedeutet dies bei einem Strom der Stärke I :

$$\vec{F}_L = I \cdot (\vec{s} \times \vec{B})$$

Der Vektor $\vec{s}$ entspricht der Länge des Leiters und zeigt in die technische Stromrichtung.

In der Betragsform folgt daher:

$$F_L = I \cdot s \cdot B_{\perp} = I \cdot s \cdot B \cdot \sin \varphi$$

Dabei steht $B_{\perp}$ senkrecht zu $\vec{s}$ und φ ist der Winkel zwischen $\vec{B}$ und $\vec{s}$.

Der HALL-Effekt – Elektronengeschwindigkeit in Leitern

Fließen durch einen n-dotierten Halbleiter Elektronen, so wirkt auf sie in einem Magnetfeld B die LORENTZ-Kraft $F_L = q_e \cdot v \cdot B_\perp$ und lenkt sie ab. Durch die Ablenkung der Ladungsträger entsteht ein entgegengesetzt gerichtetes elektrisches Feld. Dieses wird so lange stärker, bis sich die LORENTZ-Kraft und die elektrische Kraft gegenseitig aufheben (Kräftegleichgewicht). Dieser Gleichgewichtszustand bleibt bestehen. Es ist eine konstante Spannung U_H messbar: $U_H = E \cdot d$

Die Spannung U_H wird nach ihrem Entdecker EDWIN HALL als **HALL-Spannung** bezeichnet. Im stationären Gleichgewicht ist die LORENTZ-Kraft $F_L = q_e \cdot v \cdot B_\perp$ genauso groß wie die Kraft des elektrischen Feldes:

$$F_E = E \cdot q_e = \frac{U_H \cdot q_e}{d} = q_e \cdot \bar{v} \cdot B_\perp = F_L$$

$$\Rightarrow U_H = d \cdot \bar{v} \cdot B_\perp$$

Die HALL-Spannung U_H ist somit proportional zur senkrechten Komponente der magnetischen Flussdichte $B_\perp$, der Breite des Plättchens d und der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ der Elektronen, die als **Driftgeschwindigkeit** bezeichnet wird und aus der Definition des Stroms hergeleitet werden kann:

Die Ladungsträger legen in der Zeit Δt die Strecke $\Delta s = v \cdot \Delta t$ zurück. Die Anzahl der Ladungsträger, die so durch einen Querschnitt A des Leiters fließt, ergibt sich durch Multiplikation mit der Dichte der Ladungsträger n :

$$N = n \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta Q = q_e \cdot n \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \Delta t$$

Zusammen mit der Definition des Stroms folgt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q_e \cdot n \cdot A \cdot \bar{v} \quad \text{bzw.} \quad \bar{v} = \frac{I}{q_e \cdot n \cdot A}$$

Berücksichtigen wir bei der HALL-Spannung die Querschnittsfläche $A = d \cdot b$ so folgt:

$$U_H = d \cdot \bar{v} \cdot B = \underbrace{\frac{1}{n \cdot q_e}}_{A_H} \cdot \frac{I \cdot B}{b}$$

Die **HALL-Konstante (HALL-Faktor)** A_H setzt sich aus der Elektronenladung und der stoffspezifischen Konzentration oder **Anzahldichte** $n = \frac{N}{V}$ der Elektronen zusammen. Die HALL-Spannung ist dabei umso größer je geringer die Elektronendichte ist.

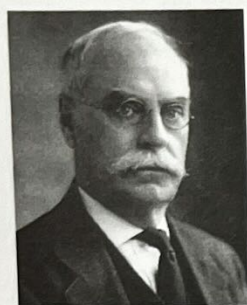


Abb. 2.22: EDWIN HERBERT HALL
1855 – 1938

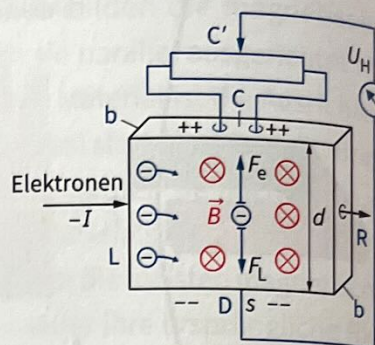


Abb. 2.21: HALL-Sensor: Durch die LORENTZ-Kraft werden die Elektronen im Magnetfeld abgelenkt und die Seiten des Halbleiterkristalls laden sich auf, bis das elektrische Feld der HALL-Spannung U_H die LORENTZ-Kraft kompensiert. Da es schwierig ist, zwei exakt gegenüberliegende Punkte C und D zu kontaktieren, wird ein Potentiometer verwendet um die Spannung zwischen C' und D ohne Magnetfeld auf Null einzustellen.

Bei Metallen trägt etwa ein Elektron je Atom zum Strom bei. Die resultierende HALL-Spannung ist dadurch für eine sinnvolle Messung viel zu klein. Bei Halbleitern hingegen lässt sich die Elektronendichte durch sogenanntes Dotieren gezielt einstellen, die Ladungsträgerdichte ist dadurch wesentlich kleiner.

Die tatsächlich gemessenen HALL-Konstanten hängen stark von der Reinheit und kristallinen Struktur des Materials ab. Die in Tab. 2.3 angegebenen Werte für Kupfer entsprechen etwa 1,3 Elektronen, die je Kupferatom zum Stromtransport beitragen.

	n-Halbleiter	Kupfer
n	10^{22} bis 10^{26} m^{-3}	$1,2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$
A_H	$-0,06$ bis $-624 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{C}$	$-53 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{C}$
U_H	$-0,06$ bis $624 \mu\text{V}/\text{T}$	$-53 \text{ pV}/\text{T}$
v_d	$0,06$ bis 624 mm/s	53 nm/s

Tab. 2.3: Abschätzung des HALL-Effekt und der Driftgeschwindigkeit für einen Leiter mit quadratischem Querschnitt von 1 mm Kantenlänge bei einem Strom von 1 mA.

Für Aluminium hingegen beträgt die HALL-Konstante $+99 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{C}$. Das positive Vorzeichen zeigt, dass hier der Ladungstransport durch Löcher erfolgt.

OHM'sches Gesetz

Beim HALL-Effekt wurde eine konstante Driftgeschwindigkeit $\bar{v}$ der Elektronen angenommen. Da die Elektronen durch das homogene elektrische Feld kontinuierlich beschleunigt werden, muss noch eine entgegengerichtete Kraft existieren. Als vereinfachtes Modell kann diese als viskose Reibung ($\rightarrow$ Seite 19) beschrieben werden.

elektrische Feldkraft: $F_E = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{l}$ mit Spannung U und Leiterlänge l

viskose Reibung: $F_{\text{viskos}} = \mu_{\text{viskos}} \cdot \bar{v}$ mit $\bar{v} = \frac{I}{q_e \cdot n \cdot A}$

Kräftegleichgewicht:

$$F_E = F_{\text{viskos}} \Leftrightarrow q \cdot \frac{U}{l} = \mu_{\text{viskos}} \cdot \frac{I}{q \cdot n \cdot A} \Leftrightarrow U = \underbrace{\frac{\mu_{\text{viskos}}}{q^2 \cdot n}}_{=\rho} \cdot \underbrace{\frac{l}{A}}_{=R} \cdot I = R \cdot I$$

$$U = R \cdot I$$

OHM'sches Gesetz

Diese proportionale Beziehung zwischen Spannung und Strom wird als **OHM'sches Gesetz** bezeichnet.

Die Materialkonstante ρ nennt man **spezifischen Widerstand**, während R als **(ohmscher) Widerstand** des Leiters bezeichnet wird.

Die beim Abbremsen der Elektronen entstehende Wärme entspricht der Energiemenge, die die Elektronen im elektrischen Feld aufnehmen:

$$W_{\text{el}} = \Delta q \cdot U \text{ mit } \Delta q = I \cdot \Delta t$$

Hieraus folgt für die elektrische **Verlustleistung**:

Verlustleistung

$$P = \frac{W_{\text{el}}}{\Delta t} = I \cdot U = R \cdot I^2$$

ARTHUR RUDOLPH
BERTHOLD WEHNELT
1871 – 1944

HERMANN LUDWIG
FERDINAND
VON HELMHOLTZ
1821 – 1894

Elektronen auf der Kreisbahn – Spezifische Elektronenladung

Als **spezifische Ladung** eines Elektrons bezeichnet man das Verhältnis $\frac{q_e}{m_e}$ seiner Ladung zu seiner Masse. Dieses kann bestimmt werden, indem man einen Elektronenstrahl mittels eines Magnetfeldes auf eine Kreisbahn lenkt.

Hierzu platziert man ein **Fadenstrahlrohr (WEHNELT-Röhre)** in der Mitte eines **HELMHOLTZ-Spulenpaars** (→ Abb. 2.23).

Im Fadenstrahlrohr wird wie in der BRAUN'schen Röhre (→ Seite 50) mittels einer einstellbaren Beschleunigungsspannung U ein Elektronenstrahl erzeugt. Durch Anregung des in geringer Dichte vorhandenen Wasserstoffs hinterlassen die Elektronen eine leuchtende Spur. Dank ihrer besonderen Geometrie erzeugen die HELMHOLTZ-Spulen im Bereich der WEHNELT-Röhre ein sehr homogenes Magnetfeld, das senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen steht. Da die **LORENTZ-Kraft** (→ Seite 60) stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Elektronen steht, werden die Elektronen auf eine Kreisbahn gezwungen, bei der die LORENTZ-Kraft als **Zentripetalkraft** (→ Seite 34) wirkt (→ Abb. 2.23).

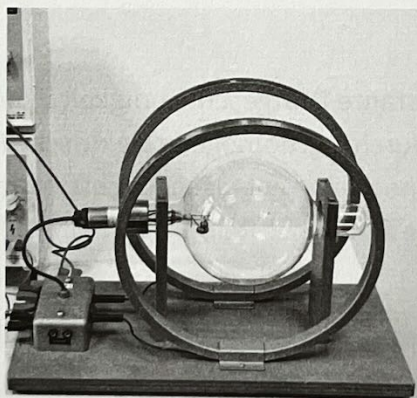
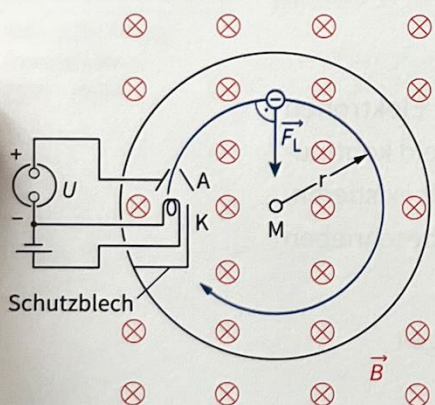


Abb. 2.23: Kreisbahn der Elektronen und Zentripetalkraft $\vec{F}_Z = \vec{F}_L$ in der WEHNELT-Röhre

- ① Berechnung der Elektronengeschwindigkeit v aus ihrer kinetischen Energie:

$$q_e \cdot U = W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2 \cdot q_e \cdot U}{m_e}$$

- ② Gleichsetzen der Zentripetalkraft F_Z und der LORENTZ-Kraft F_L :

$$F_Z = F_L \text{ mit } F_Z = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \text{ und } F_L = B \cdot q_e \cdot v \Rightarrow v = B \cdot r \cdot \frac{q_e}{m_e} \Leftrightarrow v^2 = \left(B \cdot r \cdot \frac{q_e}{m_e} \right)^2$$

Durch Gleichsetzen mit der Beziehung aus Schritt ① eliminieren wir v^2 :

$$2 \cdot U \cdot \frac{q_e}{m_e} = B^2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{q_e}{m_e} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{q_e}{m_e} = \frac{2 \cdot U}{B^2 \cdot r^2}$$

Ist die magnetische Flussdichte B , z. B. aus einer Messung mit der HALL-Sonde (→ Seite 62) bekannt, so liefert diese Beziehung die **spezifische Elektronenladung** $\frac{q_e}{m_e}$. Da die Elementarladung aus dem MILLIKAN-Versuch bekannt ist (→ Seite 52), lässt sich so die Masse des Elektrons bestimmen.

ZUSATZWISSEN

HELMHOLTZ-Spulenpaar

Für eine kurze Spule mit n Windungen und Radius R beträgt die magnetische Flussdichte auf der Achse:

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot I \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_x$$

Bei der HELMHOLTZ-Anordnung sind die Felder beider Spulen gleich orientiert, sodass ihre Überlagerung ein gleichmäßiges Feld ergibt. Sie sind im Abstand $x=R$ voneinander aufgestellt. Die Feldstärke im Zentrum der Anordnung ergibt sich durch Addition der Felder bei $x = \frac{R}{2}$:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot I \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot I \cdot \frac{8}{\sqrt{125} \cdot R}$$

③ Einsetzen der magnetischen Flussdichte eines HELMHOLTZ-Spulenpaares in die in ② berechnete Formel für die spezifische Elementarladung liefert:

$$\frac{q_e}{m_e} = \left(\frac{\sqrt{125} \cdot R}{8 \mu_0 \mu_r \cdot n \cdot I} \right)^2 \cdot 2 \frac{U}{r^2} = \left(\frac{\sqrt{250}}{8 \mu_0 \mu_r \cdot n} \cdot \frac{R}{r} \right)^2 \cdot \frac{U}{I^2}$$

④ Mit den Formeln aus ② oder ③ lässt sich die spezifische Ladung des Elektrons aus dem beobachteten Radius der Elektronenbewegung berechnen:

$$\frac{q_e}{m_e} = 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$$

Zusammen mit der im MILLIKAN-Versuch (→ Seite 52) ermittelten Elementarladung $e = 1,602\,1773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ folgt hieraus die Elektronenmasse:

$$m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Der Radius der Elektronenbahn hängt nach Gleichung ② nur vom Magnetfeld und der Geschwindigkeit der Elektronen ab und wird als **Zyklotronradius** bezeichnet:

$$r = \frac{v}{B} \cdot \frac{m}{q}$$

Zyklotronradius

Durch die Proportionalität zwischen der Teilchengeschwindigkeit und dem Zyklotronradius ist die Umlauffrequenz (**Zyklotronfrequenz**) unabhängig von der Teilchenenergie:

$$f = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{q}{m}$$

Zyklotronfrequenz

Die beiden letzten Gleichungen gelten nicht nur für Elektronen, sondern für alle geladenen Teilchen. Sind diese positiv geladen, verläuft die Krümmung jedoch in umgekehrter Richtung.

BEISPIEL

Zyklotron

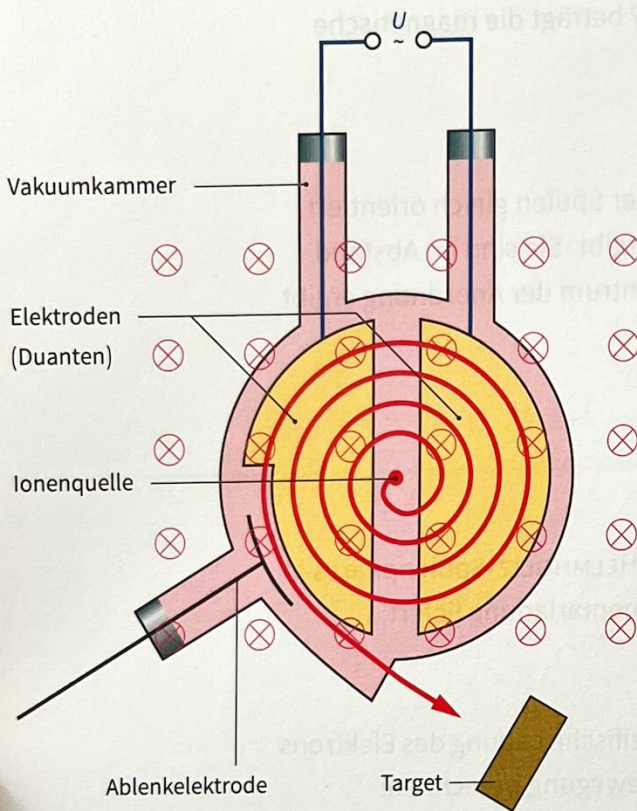


Abb. 2.24: Schematischer Aufbau eines Zyklotrons

Unter einem Zyklotron versteht man einen **Beschleuniger** für geladene Teilchen, bei dem sich die Teilchen auf einer Spiralbahn bewegen (Abb. 2.24). Ein Zyklotron besteht aus einer Vakuummkammer mit einem homogenen Magnetfeld und zwei halbkreisförmigen Metalldosen (Duanten), zwischen denen eine hochfrequente Wechselspannung angelegt wird. Befinden sich die Teilchen im Spalt zwischen den Duanten, so werden sie vom Feld der angelegten Spannung beschleunigt. Sobald sie in die Dosen eindringen befinden sie sich in einem FARADAY-Käfig (→ Seite 41) und bemerken daher nichts von der Umpolung der Wechselspannung. Sobald sie die Dose wieder verlassen, werden sie erneut vom elektrischen Feld beschleunigt. Durch die LORENTZ-Kraft werden die Teilchen im Magnetfeld des Zyklotrons auf eine Kreisbahn gezwungen, deren Radius von ihrer Geschwindigkeit abhängt: $r = \frac{v_{\perp}}{B} \cdot \frac{m}{q}$

Da die Geschwindigkeit bei jedem Umlauf zunimmt, bewegen sich die Teilchen auf einer Spiralbahn nach außen. Durch die Proportionalität zwischen der Teilchengeschwindigkeit und dem Zyklotron-Radius ist die Umlauffrequenz (**Zyklotronfrequenz**) unabhängig von der Teilchenenergie: $f = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{q}{m}$

Bei sehr großen Teilchengeschwindigkeiten muss die relativistische Massenzunahme der Teilchen (→ Seite 202 f.) berücksichtigt werden. Zur Kompensation verwendet man ein nach außen zunehmendes Magnetfeld. Da dieser Aufbau sehr aufwendig und teuer ist, werden Zyklotrone in der Regel nur für Ionen, nicht aber für Elektronen, eingesetzt. Eine typische Anwendung ist die Herstellung medizinischer Radionuklide (→ Seite 214) mit sehr kurzen Halbwertszeiten

(→ Seite 225) durch einen Beschuss der Atome mit Protonen (→ Seite 232), die auf eine Energie von 15–30 MeV beschleunigt wurden.

E- und B-Feld im Verbund – Geschwindigkeitsfilter für Ionen

Sowohl in der Technik als auch in der Grundlagenforschung ist es häufig wichtig, die chemische Zusammensetzung eines Gases zu analysieren. Eine einfache physikalische Methode beruht auf der Bestimmung der spezifischen Ladung geladener Gasteilchen. Hierzu werden die Gasteilchen in einer Vakuumkammer mit Elektronen beschossen, sodass sie einige ihrer Elektronen verlieren. Sie werden dadurch zu positiv geladenen Ionen, deren Geschwindigkeit völlig statistisch verteilt ist. Durch ein elektrisches Feld werden die Ionen zum Eingang eines Geschwindigkeitsfilters beschleunigt.

Dieser sogenannte **WIEN-Filter**, genauer: **WIEN'sche Geschwindigkeitsfilter**, besteht aus einem Plattenkondensator, der von einem Magnetfeld durchsetzt wird (→ Abb. 2.25).

Durch die zueinander senkrechte Anordnung von E - und B -Feld zeigt die LORENTZ-Kraft genau in die entgegengesetzte Richtung der elektrischen Feldkraft. Sind beide Kräfte gleich groß, so können die Ionen das Filter passieren, ohne abgelenkt zu werden: $F_E = F_L \Rightarrow qE = qv_\perp B \Leftrightarrow v_\perp = \frac{E}{B}$

Nachdem die Ionen das Geschwindigkeitsfilter verlassen haben gelangen sie in ein homogenes Magnetfeld, in dem sie sich entsprechen ihrer spezifischen Ladung (→ Seite 64) auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegen: $r = \frac{v_\perp}{B} \cdot \frac{m}{q}$

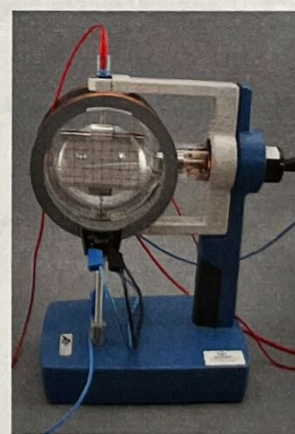
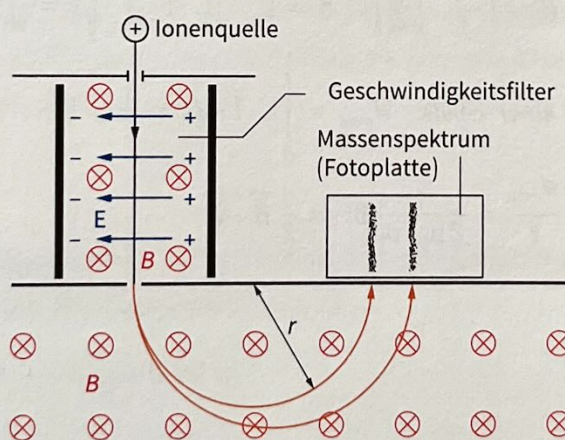


Abb. 2.25: Prinzip eines Massenspektrometers (links), Schulaufbau (rechts).

Mit einem solchen Massenspektrometer lässt sich immer nur das Verhältnis aus der Teilchenmasse zur Ladung bestimmen. Dadurch ist z. B. keine Unterscheidung des zweifach geladenen Eisens $^{56}\text{Fe}^{2+}$ vom einfach geladenen Silizium $^{28}\text{Si}^{1+}$ möglich. Meistens ist dies aber auch gar nicht notwendig, da bekannt ist, ob sich Eisen oder Silizium in der Probe befindet. Ist dies nicht bekannt, so nutzt man aus, dass jedes in der Natur vorkommende chemische Element aus verschiedenen Isotopen (→ Seite 211 f.) mit einer unterschiedlichen Masse besteht. Eisen besteht z. B. aus 91,7 % ^{56}Fe ; 5,8 % ^{54}Fe ; 2,5 % ^{57}Fe und 0,3 % ^{58}Fe . Für Silizium sind es entsprechend: 92,23 % ^{28}Si ; 4,67 % ^{29}Si und 3,1 % ^{30}Si .

WILHELM CARL
WERNER OTTO FRITZ
FRANZ WIEN
1864–1928

2.2 Magnetisches Feld

MAGNETE

Es gibt keine magnetischen Monopole, nur Dipole mit einem Nord- und Südpol. Permanentmagnete bestehen aus ferri- oder ferromagnetischem Material mit hoher Remanenz (hartmagnetisch).

Elektromagnete bestehen aus einer Spule mit einem zumeist ferromagnetischen Kern mit kleiner Remanenz (weichmagnetisch).

MAGNETISCHES FELD

Magnetische Felder entstehen durch das Bewegen von Ladungen. Die magnetischen Feldlinien sind stets geschlossen und zeigen die Richtung an, in die der Nordpol einer Kompassnadel gezogen wird. Der HALL-Effekt ermöglicht eine Messung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$.

→ Langgestreckte Spule: $H = I \cdot \frac{n}{l} \left[\frac{A}{m} \right] \quad B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l} \left[T = \frac{N}{A \cdot m} \right]$

→ Energie im Magnetfeld einer Spule: $W_{\text{mag}} = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2$

→ Energiedichte: $\varrho_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

LADUNGEN IM MAGNETISCHEN FELD

Die LORENTZ-Kraft steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung und zwingt Ladungen im homogenen Feld auf eine Kreisbahn.

→ LORENTZ-Kraft: $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot v \cdot B_{\perp}$

Achtung: $q_e = -e$

Durch eine Kombination von E und B-Feld lässt sich ein Geschwindigkeitsfilter für Ionen aufbauen (WIEN-Filter).

2.3 Induktion

Die **magnetische Induktion** entsteht durch Wechselwirkungen zwischen magnetischen Feldern und elektrischen Ladungen:

- ➔ Elektronen in einem ruhenden stromdurchflossenen Leiter werden durch die LORENTZ-Kraft (→ Seite 60) abgelenkt. Dadurch entsteht senkrecht zur Stromrichtung eine in der Regel sehr kleine Induktionsspannung (→ HALL-Effekt, Seite 62).
- ➔ In einem Leiter, der sich senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes bewegt, werden die Elektronen durch die LORENTZ-Kraft beschleunigt und es entsteht eine Induktionsspannung (siehe unten).
- ➔ Durch eine zeitliche Veränderung der magnetischen Flussdichte entsteht ein elektrisches Wirbelfeld (→ Seite 76), das in einer Leiterschleife eine Induktionsspannung hervorruft.

Induktion durch LORENTZ-Kraft

Wird ein Leiter der Länge d mit der Geschwindigkeit v_L senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes bewegt, so wirkt auf die Elektronen in ihm die LORENTZ-Kraft $F_L = q_e \cdot v_L \cdot B$. Dadurch werden die Elektronen entlang des Leiters verschoben. Bei einem isolierten Leiter können die Elektronen nicht abfließen und es entsteht ein elektrisches Feld zwischen den Leiterenden:

$$E = \frac{U_{\text{ind}}}{d}$$

Hierbei ist U_{ind} die **Induktionsspannung**. Sie errechnet sich im stationären Zustand aus dem Gleichgewicht mit der Feldkraft $F_E = q_e \cdot E$:

$$F_E = F_L \Rightarrow q_e \cdot \frac{U_{\text{ind}}}{d} = q_e \cdot v_L \cdot B \Rightarrow U_{\text{ind}} = B \cdot d \cdot v_L$$

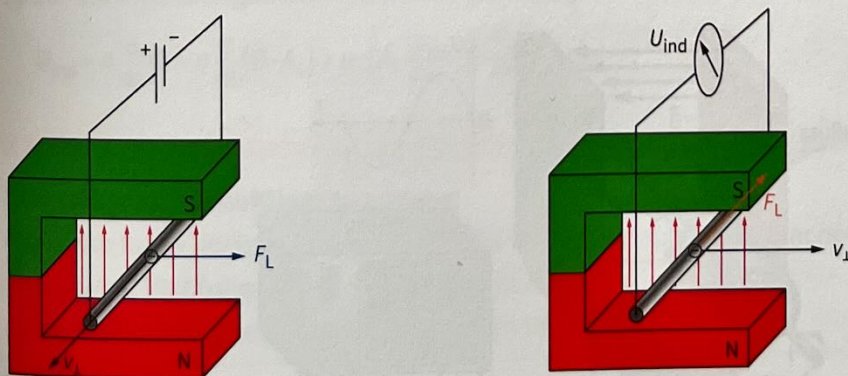


Abb. 2.26: Ein stromdurchflossener Leiter wird im homogenen Magnetfeld eines Hufeisenmagneten durch die LORENTZ-Kraft bewegt (links).

Wird hingegen der Leiter bewegt, verursacht die LORENTZ-Kraft eine Induktionsspannung an den Leiterenden (rechtes Bild).

Induktion durch Veränderung der Querschnittsfläche

Betrachten wir eine einfache Leiterschleife der Querschnittsfläche $A_{\perp}$ in einem homogenen Magnetfeld ($\rightarrow$ Abb. 2.27). Wird die rechte Kante der Leiterschleife mit der Geschwindigkeit $v_{\perp}$ nach rechts verschoben, so induziert die LORENTZ-Kraft in ihr die Spannung $U_{\text{ind}} = B \cdot d \cdot v_{\perp}$. Drücken wir die Geschwindigkeit $v_{\perp}$ durch die Änderung der Querschnittsfläche aus, so folgt:

$$d \cdot v_{\perp} = \frac{d \cdot \Delta S_{\perp}}{\Delta t} = \frac{\Delta A_{\perp}}{\Delta t} = \dot{A}_{\perp}$$

$$\Rightarrow U_{\text{ind}} = B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} = B \cdot \dot{A}_{\perp}$$

Diese Gleichung für U_{ind} gilt unabhängig davon, auf welche Art die Querschnittsfläche verändert wird.

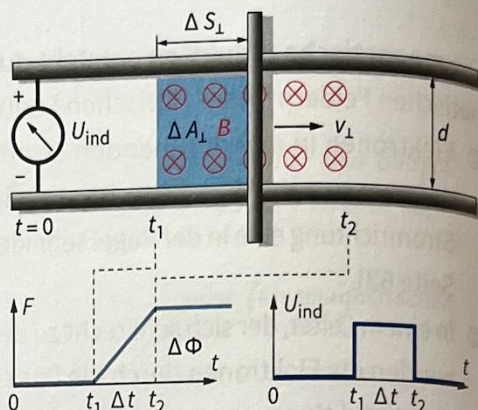


Abb. 2.27: Die Bewegung des Leiters ändert die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche der Leiterschleife und verursacht eine Induktionsspannung.

BEISPIEL

Einfacher Generator

Eine Leiterschleife wird von einem homogenen magnetischen Feld durchsetzt und senkrecht zu den Feldlinien mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω rotiert. Die Querschnittsfläche ändert sich dadurch periodisch:

$$A_{\perp} = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow U_{\text{ind}} = B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} = -B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Wird anstelle einer Leiterschleife eine Spule mit n Windungen rotiert, so ist die effektive Querschnittsfläche n -mal so groß:

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot A \cdot n \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Tipp: Wird an die Spule eine Wechselspannung angeschlossen, so wird aus dem Generator ein Motor.

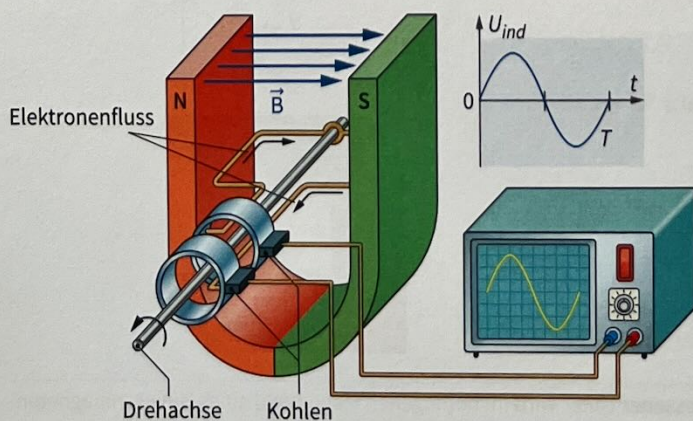


Abb. 2.28: Leiterschleife als Generator

Induktion durch Veränderung des magnetischen Flusses

Wird die Querschnittsfläche einer Leiterschleife verändert, so führt dies zu einer Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = B \cdot \frac{dA_{\perp}}{dt} = B \cdot \dot{A}$$

Solange das Magnetfeld konstant ist, lässt sich dieser Zusammenhang auch wie folgt schreiben:

$$U_{\text{ind}} = \frac{d}{dt} (\underbrace{B \cdot A_{\perp}}_{= \Phi}) = \frac{d}{dt} \Phi = \dot{\Phi}$$

Der **magnetische Fluss** Φ entspricht anschaulich der Anzahl der Feldlinien, die durch die Fläche $A_{\perp}$ hindurchtreten. Experimente zeigen, dass diese Veränderung des magnetischen Flusses Φ für die Induktionsspannung verantwortlich ist. Sie tritt daher auch auf, wenn sich die magnetische Flussdichte B anstelle der Querschnittsfläche $A_{\perp}$ ändert. Nach diesem Prinzip arbeitet ein Transformator (→ Seite 74). Für eine Spule mit n Windungen gilt damit ganz allgemein:

$$U_{\text{ind}} = n \frac{d}{dt} \Phi = n \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = n \cdot \left(A_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_{\perp}}{dt} \right)$$

INDUKTION, MAGNETISCHER FLUSS

Die LORENTZ-Kraft verursacht in einem Leiter der Länge d , der sich mit der Geschwindigkeit $v_{\perp}$ senkrecht zu den Feldlinien eines magnetischen Feldes mit Flussdichte B bewegt, die Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = B \cdot d \cdot v_{\perp}$$

Analog verursacht eine Änderung des magnetischen Flusses $\Phi = B \cdot A_{\perp}$ in einer Spule mit n Windungen die Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = n \frac{d}{dt} \Phi = n \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = n \cdot \left(A_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_{\perp}}{dt} \right)$$

VORSICHT: FALLE

Vorzeichen der Induktionsspannung

Die Formeln der vorigen Abschnitte für die Induktionsspannung machen keine Aussage zur Richtung der Induktionsspannung. Diese Aussage folgt erst aus der LENZ'schen Regel.

LENZ'sche Regel

Bewegt sich ein Stabmagnet auf die Öffnung einer Leiterschleife zu, so verursacht die Zunahme des magnetischen Flusses eine Induktionsspannung. Ist die Leiterschleife geschlossen, so fließt ein Induktionsstrom, der seinerseits ein Magnetfeld hervorbringt.

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die Energie zum Aufbau des Induktionsstroms durch die Bewegung des Stabmagneten aufgebracht werden muss. Mit anderen Worten: Die Bewegung des Stabmagneten wird gebremst. Da diese Bremswirkung nur durch das induzierte Magnetfeld der Leiterschleife hervorgerufen sein kann, muss seine Richtung dem Magnetfeld des Stabmagneten entgegengerichtet sein. Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein und wird als **LENZ'sche Regel** bezeichnet.

HEINRICH FRIEDRICH
EMIL LENZ
1804 – 1865

LENZ'SCHE REGEL

Der induzierte Strom ist immer so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt.

Selbstinduktion

Ändert sich die Stromstärke in einer Spule, so führt dies zu einer Änderung des magnetischen Flusses Φ . Diese Änderung verursacht nun ihrerseits in der Spule eine Induktionsspannung, die nach der LENZ'schen Regel ihrer Ursache entgegengerichtet ist:

$$I_{\text{Spule}} = \frac{U_{\text{Spule}} - U_{\text{ind}}}{R_{\text{Spule}}} = \frac{U_{\text{Spule}} - n\dot{\Phi}}{R_{\text{Spule}}}$$

Um der LENZ'schen Regel Rechnung zu tragen, findet man häufig die Definition:

$$U_{\text{Selbstinduktion}} = -n\dot{\Phi}$$

Kennen wir für eine Spule den Zusammenhang zwischen der Stromstärke und dem magnetischen Fluss $\Phi = B \cdot A$, so lässt sich diese Gleichung weiter umformen:

$$B_{\text{langgestreckte Spule}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l} \Rightarrow U_{\text{Selbstinduktion}} = -n\dot{\Phi} = \underbrace{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n^2}{l}}_{=: L} \cdot \dot{I} = -L \cdot \dot{I}$$

Die Proportionalitätskonstante L heißt **Induktivität**. ihr Wert ist für die jeweilige Spule charakteristisch und wird in der Regel experimentell ermittelt. Die Einheit der Induktivität wurde nach dem amerikanischen Physiker JOSEPH HENRY benannt:

$$\text{Henry} \quad 1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

Durch Integration der Selbstinduktionsspannung lässt sich auch der magnetische Fluss der Spule durch die Induktivität ausdrücken:

$$U_{\text{Selbstinduktion}} = -n\dot{\Phi} = -L \cdot \dot{I} \Leftrightarrow \dot{\Phi} = \frac{L}{n} \dot{I} \Leftrightarrow \Phi = \frac{L}{n} I$$



Abb. 2.29:
JOSEPH HENRY
1797 – 1878

Spulenstrom einschalten

Eine reale Spule lässt sich idealisieren als Reihenschaltung eines Widerstandes R und einer widerstandsfreien Induktivität L .

Verbinden wir diese Reihenschaltung mit der Betriebsspannung U_B , so entsteht eine Selbstinduktionsspannung (Gegenspannung):

$$U_{\text{Selbstinduktion}} = -L \cdot \dot{I}$$

Durch den Widerstand fließt damit der Strom:

$$I = \frac{U_B}{R} - \frac{L}{R} \cdot \dot{I}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$I(t) = \frac{U_B}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R}$$

Der Stromverlauf ist völlig analog zum Anstieg der Spannung eines Kondensators, der über einen Widerstand geladen wird (→ Seite 50).

Spulenstrom ausschalten

In einer Parallelschaltung aus Spule und Widerstand hört der Strom nicht sofort auf, wenn die Spule von der Versorgungsspannung getrennt wird, da die Änderung des magnetischen Flusses einen Strom induziert:

$$I_{\text{Selbstinduktion}} = \frac{-L \cdot \dot{I}}{R}$$

Bezeichnet I_0 den Spulenstrom vor dem Abschalten, so lautet die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R}$$

Der Verlauf dieser Stromkurve ist völlig äquivalent zur Abnahme der Spannung an einem Kondensator, der über einen Widerstand entladen wird (→ Seite 50).

Das OHM'sche Gesetz $U = R \cdot I$ liefert uns die zu diesem Strom gehörige Induktionsspannung:

$$U_{\text{Selbstinduktion}}(t) = R \cdot I(t) = R \cdot I_0 e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Die Induktionsspannung ist zu Beginn ($t = 0$) am größten und nimmt dann exponentiell ab. Für den Sonderfall $R \rightarrow \infty$ wird auch die Induktionsspannung unendlich. Tatsächlich führt dies beim Öffnen eines Schalters zu einer Bogenentladung zwischen den Schalterkontakten. Um Schäden durch solche Überspannungen zu vermeiden, sollte einer Spule stets ein Widerstand, ein Kondensator oder eine Diode in Sperrrichtung (**Freilaufdiode**) parallel geschaltet werden.

Technisch ausgenutzt wird dieser Effekt hingegen zur Erzeugung von Hochspannungen für Blitzröhren oder Zündkerzen bei Autos mit Benzinmotor.

Transformator

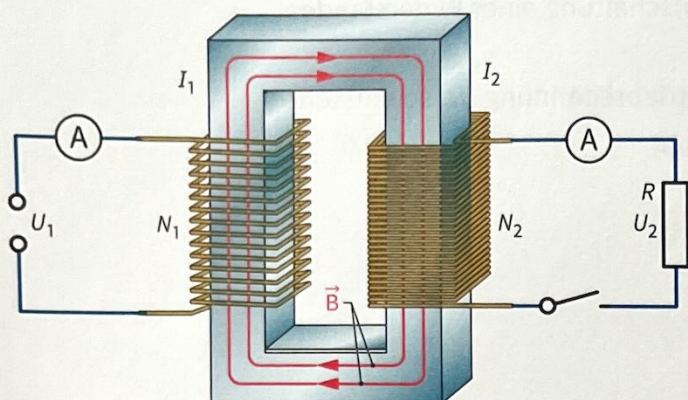


Abb. 2.30: Spannungen, Ströme und magnetischer Fluss im Transformator

Ein **Transformator** besteht aus zwei Spulen, die um einen gemeinsamen ringförmigen ferromagnetischen ($\rightarrow$ Seite 56) Kern gewickelt sind. Die **Primärspule** wird an eine Wechselspannung U_1 angeschlossen ($\rightarrow$ Abb. 2.30). Vernachlässigen wir den OHM'schen Widerstand der Wicklung, so entspricht die **Klemmenspannung** U_1 der Selbstinduktionsspannung:

$$U_1 = -U_{\text{Selbstinduktion}} = n_1 \dot{\Phi}$$

Da der magnetische Fluss vollständig innerhalb des Kerns verläuft, induziert die Flussänderung in der **Sekundärspule** die Spannung U_2 :

$$U_2 = -n_2 \dot{\Phi}$$

Die Spannungsübersetzung des Transformators ist damit:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{n_2}{n_1}$$

Da sich diese Beziehung unmittelbar aus dem Induktionsgesetz ergibt, ist sie unabhängig von einer Belastung der Sekundärseite durch einen Widerstand.

Leerlauf: $U_1 = \hat{U}_1 \cos \omega t = -L_1 \dot{I}_{1,\text{Leerlauf}} \Rightarrow I_{1,\text{Leerlauf}} = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} \sin \omega t$

Die aufgenommene Leistung beträgt damit:

$$P_{1,\text{Leerlauf}} = U_1 \cdot I_{1,\text{Leerlauf}} = \frac{\hat{U}_1^2}{\omega L_1} \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{\hat{U}_1^2}{2\omega L_1} \sin(2\omega t)$$

Im zeitlichen Mittel wird keine Leistung aufgenommen, da Strom und Spannung um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander versetzt sind. Man spricht daher auch von einem **Blindstrom**. Ein realer Transformator nimmt auch im Leerlauf eine geringe Leistung auf, die er in Wärme umwandelt. Die Ursache hierfür sind der OHM'sche Widerstand der Wicklung sowie Verluste durch Wirbelströme ($\rightarrow$ Seite 76) im Kern.

Betrieb: Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses im Kern wird unabhängig von der Belastung der Sekundärseite durch die Betriebsspannung U_1 bestimmt: $\dot{\Phi} = U_1/n_1$

Wird die Sekundärseite des Transformators mit einem OHM'schen Widerstand belastet, so fließt hier der Strom $I_{2,\text{Last}} = U_2/R$. Dieser induziert seinerseits einen magnetischen Fluss $\Phi_{2,\text{Last}}(t)$. Da sich der magnetische Fluss im Kern insgesamt jedoch nicht ändert, muss der zusätzliche Fluss $\Phi_{2,\text{Last}}(t)$ durch einen zusätzlichen Strom $I_{1,\text{Last}}$ in der Primärspule kompensiert werden.

Nach dem Energieerhaltungssatz (→ Seite 17) folgt:

$$P = U_1 \cdot I_{1,\text{Last}} = U_2 \cdot I_{2,\text{Last}} = \frac{n_2}{n_1} U_1 \cdot I_{2,\text{Last}} \Rightarrow \frac{I_{2,\text{Last}}}{I_{1,\text{Last}}} = \frac{n_1}{n_2}$$

Insgesamt fließt damit durch die Primärspule der Strom $I_1 = I_{1,\text{Leerlauf}} + I_{1,\text{Last}}$, wobei nur der Laststrom zur Leistung beiträgt. Wird die Sekundärseite des Trafos kurzgeschlossen, so ist $U_2 = 0$ und damit auch $I_{1,\text{Leerlauf}} = 0$.

Feldenergie

Mithilfe der **Selbstinduktionsspannung** (→ Seite 72) lässt sich die Energie des magnetischen Feldes berechnen:

$$W_{\text{mag}} = \int U \cdot I dt; \text{ mit } U = L \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow W_{\text{mag}} = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Für eine langgestreckte Spule ergibt sich wegen $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A \cdot \frac{n^2}{l}$:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A \cdot \frac{n^2}{l} \cdot I^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{l} \right)^2}_{= B^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot A \cdot l}_{= V} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 \cdot V$$

Dies ist die Energie, die im Volumen V eines homogenen Magnetfeldes gespeichert ist. Die magnetische Energiedichte folgt hieraus durch Division durch V :

$$\varrho_{\text{mag}} = \frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 = \frac{1}{2} H \cdot B$$

Eine genauere Herleitung liefert das vektorielle Ergebnis $\varrho_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$.

Die Energiedichte ist unabhängig von der Existenz einer Spule. Daher lässt sich die Gleichung durch Integration auf inhomogene Felder verallgemeinern und z. B. bei elektromagnetischen Wellen anwenden (→ Seite 118 ff.).

Energiedichte

BEISPIEL

Tragkraft Hufeisenmagnet

Werden die Pole eines Hufeisenmagneten durch ein ferromagnetisches Material (→ Seite 56), wie z. B. Eisen, verbunden, so verlaufen die Feldlinien nahezu vollständig im Innern dieses Verbindungsstücks, das als **Joch** bezeichnet wird. Wird dieses von einem Pol um den kleinen Abstand dx entfernt, so ändert dies nichts am Verlauf der Feldlinien und es entsteht ein von Feldlinien durchsetzter Raum mit dem Volumen $V = A \cdot dx$.

Die in diesem Volumen gespeicherte Feldenergie beträgt:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 \cdot A \cdot dx$$

Durch Ableiten nach dem Abstand dx folgt hieraus die Haltekraft des Magneten:

$$F_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot \mu_r} B^2 \cdot A$$

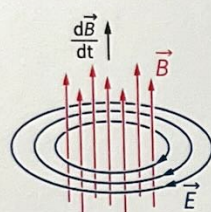


Abb. 2.31: Ein hochfrequentes magnetisches Wechselfeld induziert ein elektrisches Wirbelfeld, das die Gasatome zum Leuchten anregt.

JAMES CLERK MAXWELL

1831 – 1879

OLIVER HEAVISIDE

1850 – 1925

JOSIAH WILLARD GIBBS

1839 – 1903

Das elektrische Wirbelfeld

Eine Änderung der magnetischen Flussdichte induziert in einer Leiterschleife eine Spannung. Wird die Leiterschleife kurzgeschlossen, so fließt ein Induktionsstrom – angetrieben durch ein **elektrisches Wirbelfeld** (→ Beispiel auf Seite 89). Die Existenz dieses elektrischen Wirbelfeldes ist unabhängig von der Leiterschleife, wie folgendes Experiment zeigt: Eine Glaskugel, gefüllt mit einem Helium-Neon-Gasgemisch von geringem Druck, wird vom Magnetfeld einer Spule durchsetzt, die an eine hochfrequente Wechselspannung angeschlossen ist.

Durch die schnelle Änderung der magnetischen Flussdichte entsteht ein starkes elektrisches Wirbelfeld, das zufällig ionisierte Gasatome auf einer Kreisbahn beschleunigt. Durch Zusammenstöße mit anderen Gasatomen entstehen weitere Ionen, wodurch die Stromstärke schnell ansteigt. Da hin und wieder Ionen und Elektronen auch wieder rekombinieren, (→ Abb. 2.31), leuchtet das Gas entlang des Strompfads hell auf.

Die MAXWELL-Gleichungen – Interaktion von elektrischem und magnetischem Feld

Eine geschlossene Theorie über den **Elektromagnetismus** wurde erstmals in den Jahren 1861 und 1865 von **JAMES CLERK MAXWELL** veröffentlicht. In die heute bekannte Form brachten die MAXWELL'schen Gleichungen 1884 **OLIVER HEAVISIDE** und **WILLARD GIBBS**.

Die vier MAXWELL'schen Gleichungen lassen sich in zwei mathematisch völlig äquivalenten Formen darstellen: als Integral oder als Ableitung (→ Anhang Seite 277).

⇒ Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

$$\oint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Da es keine magnetischen Monopole gibt, ist das Integral der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ über eine geschlossene Oberfläche O immer null. Mit anderen Worten: Alle Feldlinien, die in das Volumen hineingehen müssen es auch wieder verlassen.

⇒ GAUSS'scher Satz: Die elektrischen Ladungen sind die Quellen und Senken des elektrischen Feldes.

$$\oint_O \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \rho \text{ mit } Q = \iiint_V \rho dV \text{ und } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche O entspricht der eingeschlossenen Ladung Q (→ Seite 47).

FARADAY'sches Induktionsgesetz

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

Eine zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$ induziert ein elektrisches Wirbelfeld. Dabei ist das geschlossene Kurvenintegral über die elektrische Feldstärke genauso groß wie die zeitliche Änderung des von der Kurve begrenzten magnetischen Flusses.

AMPÈRE'sches Gesetz mit MAXWELL'scher Ergänzung des Verschiebungsstroms (Durchflutungssatz)

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE
1775 – 1836

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \iint_O \vec{D} \cdot d\vec{A} + I \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{d}{dt} \vec{D} + \vec{j}$$

$$\text{mit } I = \iint_O \vec{j} \cdot d\vec{A} \text{ sowie } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \text{ und } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Aus der Magnetostatik ist bekannt, dass ein Strom I von einem magnetischen Wirbelfeld umgeben ist. Maxwell ergänzte, dass auch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes ein magnetisches Wirbelfeld hervorruft. Erst durch diese Ergänzung lässt sich die Existenz elektromagnetischer Wellen erklären.

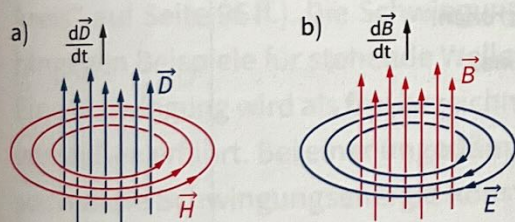


Abb. 2.32: a) Ein zeitabhängiges elektrisches Feld ruft ein magnetisches Wirbelfeld hervor.
b) Ein zeitabhängiges magnetisches Feld ruft ein elektrisches Wirbelfeld hervor.

ZUSATZWISSEN

Vektoranalysis

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$; Gradient: $\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \varphi(\vec{r})$

Divergenz: $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$; Rotation: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

Ist $\vec{F}(\vec{r})$ eine vektorielle Funktion, $K = \{\vec{r}(t) | a \leq t \leq b\}$ ein Kurvenstück und

$O = \{\vec{r}(u, v) | a_1 \leq u \leq b_1 \text{ und } a_2 \leq v \leq b_2\}$ eine Oberfläche, so ist:

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_b^a \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

$$\iint_O \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{d}{du} \vec{r}(u, v) \times \frac{d}{dv} \vec{r}(u, v) \right) du dv$$

siehe auch
Anhang
→ Seite 280

2.3 Induktion

INDUKTION

→ Induktionsgesetz: $U_{\text{ind}} = n \frac{d}{dt} \Phi = n \frac{d}{dt} (B \cdot A_{\perp}) = n \cdot \left(A_{\perp} \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_{\perp}}{dt} \right)$

Das Vorzeichen der Induktionsspannung ist so zu wählen, dass der induzierte Strom der Induktionsursache entgegenwirkt (LENZ'sche Regel).

→ Selbstinduktion einer Spule: $U_{\text{Selbstinduktion}} = -n \dot{\Phi} = -L \cdot \dot{I} \Leftrightarrow \Phi = \frac{L}{n} I$

Ein Stromfluss verursacht ein magnetisches Wirbelfeld, eine Änderung der magnetischen Flussdichte verursacht ein elektrisches Wirbelfeld.

WICHTIGE EINHEITEN

→ Ampere $1 A = 1 \frac{C}{s}$

Bei einer Elementarladung von $e = 1,602\,177\,3 \cdot 10^{-19} C$ entspricht dies $1/1,6 \cdot 10^{-19} \approx 6 \cdot 10^{18}$ Elektronen.

Das Ampere ist eine Grundeinheit des SI-Systems.

→ Coulomb $1 C = 1 A \cdot s$

→ Volt $1 V = 1 \frac{J}{C} = 1 \frac{Nm}{C} = 1 \frac{Nm}{As}$

→ Farad $1 F = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{As}{V}$

→ Tesla $1 T = 1 \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{N}{A \cdot m}$

→ Henry $1 H = 1 \frac{V \cdot s}{A}$

→ Joule $1 J = 1 Nm = 1 \frac{kg m^2}{s^2} = 1 VC = 1 VAs$

→ Elektronenvolt $1 eV = 1,6022 \cdot 10^{-19} C \cdot 1 V = 1,6022 \cdot 10^{-19} J$

→ Watt $1 W = 1 \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = 1 \frac{kg m^2}{s^3} = 1 \frac{CV}{s} = 1 VA$

Wichtige Konstanten

→ $e = 1,602\,177\,3 \cdot 10^{-19} C$

→ $\epsilon_0 = 8,854\,19 \cdot 10^{-12} C/(V \cdot m)$

→ $\epsilon_r = 1$ in Vakuum

→ $\epsilon_r \approx 1$ in Luft, sonst $\epsilon_r > 1$

→ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} = 1,25664 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \quad \left[\frac{V \cdot s}{A \cdot m} = T \cdot \frac{m}{A} = \frac{N}{A^2} \right]$