c) Gegeben sind die Punkte $A(1|4|2), B(1|7|8)$ und $C(1|3|0)$.

- Zeigen Sie, dass C auf der Geraden durch A, B liegt.
- Beurteilen Sie, ob C auch auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.
- Der Punkt D ist von A doppelt so weit entfernt, wie in B. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.

b) Berechnen Sie:

$$\sum_{k=0}^{10} 3^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1}$$

07.01.2025

$$a_n = \frac{2n^2-1}{n+3} \qquad a_n \longrightarrow 2, \quad n \to \infty$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{2n^2-1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n^2-1-2n^2-6}{n^2+3}\right| = \left|\frac{-7}{n^2+3}\right| = \frac{7}{n^2+3} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}-3}}_{=:n_0} < n$$

Q.E.D.

b) $\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\qquad n_0 = \sqrt{\frac{7}{\left(\frac{1}{100}\right)} - 3} = \sqrt{697} = 26{,}4 \Rightarrow$ 26 Folgeglieder liegen außerhalb einer $U_{\frac{1}{100}}(2)$.

c) $a_n = \frac{n+2}{n-1}, \quad n > 1$

Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)(n+1)}{n\cdot(n+2)} = \frac{n^2+3n-n-3}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n-3}{n^2+2n} = 1 - \frac{3}{n^2+2n} < 1$$

$a_{n+1} < a_n \qquad (a_n)\downarrow$

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n-1} \geq \frac{n}{n} = 1 \qquad (a_n)$ beschränkt nach unten

Also konvergent

$A(1;4;2) \quad B(1;7;8) \quad C(1;3;0)$

$$g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

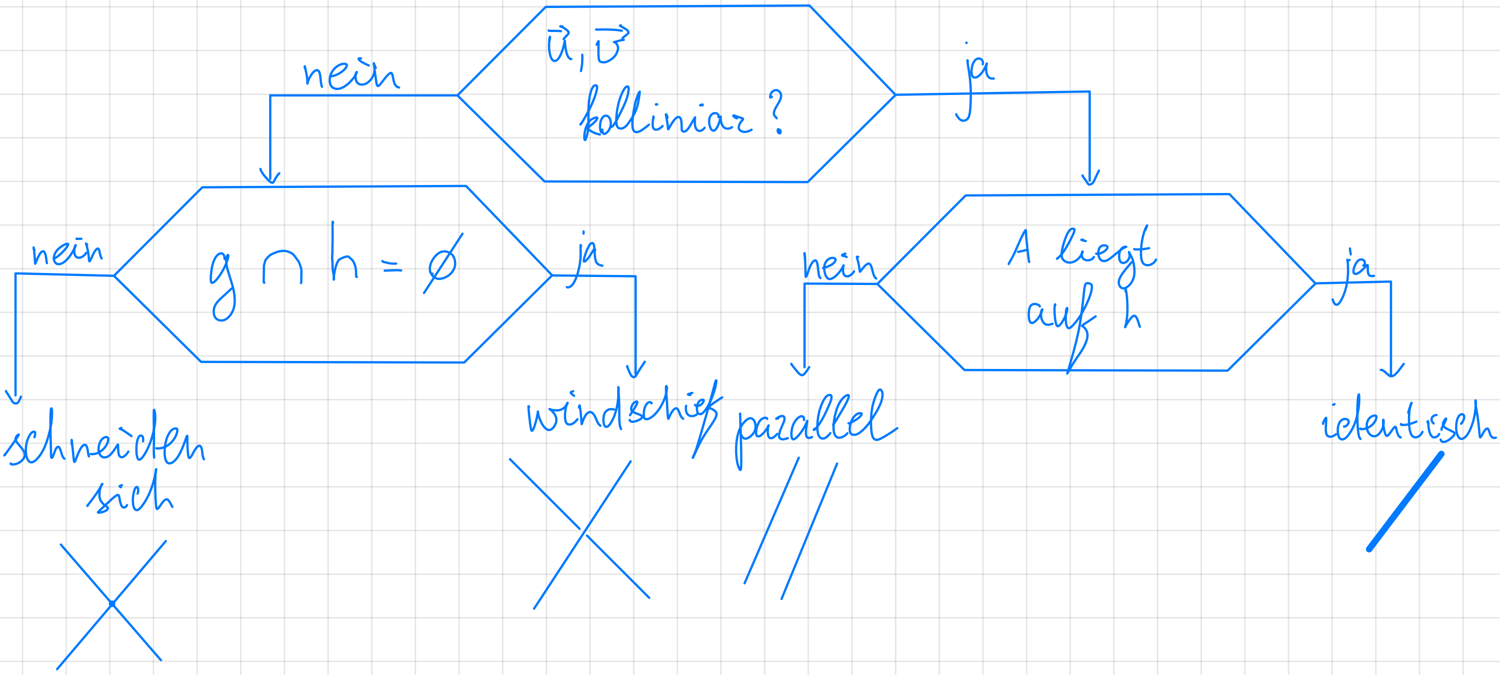
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

08.01.2025

$g : \vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$

$h : \vec{x}(s) = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$



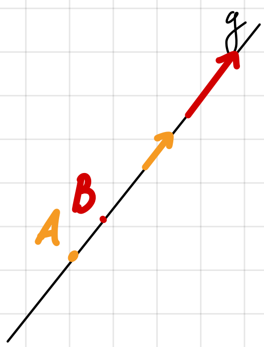
$g : \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h : \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind kolliniar, weil $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$ g und h sind identisch



$g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r - 2s &= -3 \\ 3r - s &= -4 \\ 2r - s &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r - 2s &= -3 \\ 5s &= 5 \\ 3s &= 3 \end{aligned} \qquad \Rightarrow s = 1, \; r = -1$$

$$\mathbb{L} = \{(-1; 1)\}$$

Der Schnittpunkt $S(5; -5; 1)$

$g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

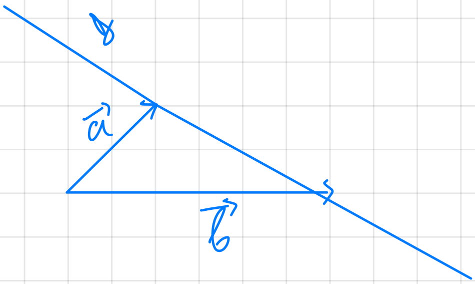
$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Untersuchen Sie, ob eine Seite des Dreiecks ABC mit A(3;3;6), B(2;7;6), C(4;2;5) auf der Geraden g liegt, oder zu g parallel ist.

$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x}(z) = \vec{a} + z(\vec{b} - \vec{a}) \qquad \vec{x}(2) = 2\vec{b} - \vec{a}$$

$$h: \vec{x}(s) = \vec{a} + \vec{b} + s(\vec{a} - \tfrac{1}{2}\vec{b})$$



$$\vec{a} + z(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + s(\vec{a} - \tfrac{1}{2}\vec{b})$$

$$z(\vec{b} - \vec{a}) - s(\vec{a} - \tfrac{1}{2}\vec{b}) = \vec{b}$$

$$z\vec{b} - z\vec{a} - s\vec{a} + \tfrac{1}{2}s\vec{b} = \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot (-z - s) + \vec{b} \cdot (z + \tfrac{1}{2}s) = \vec{b}$$

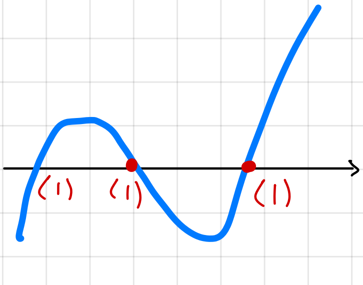
$$z + \tfrac{1}{2}s = 1$$

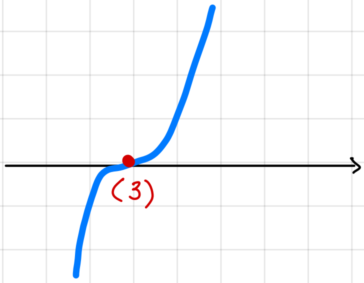
$$-z - s = 0$$

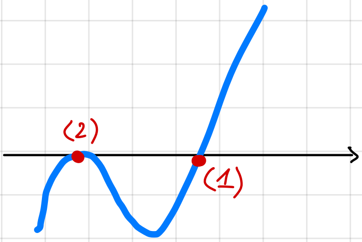
$z = -s \qquad s = -2$

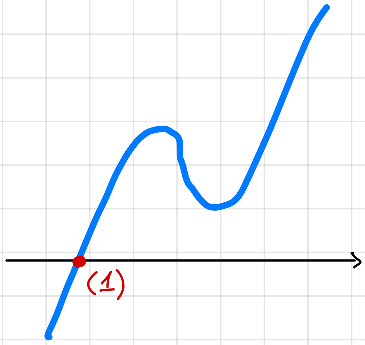
$-0{,}5s = 1 \qquad z = 2$

13.01.2025









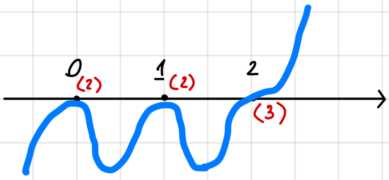
$$P(x) = x^2 (x-1)^2 (x-2)^3$$

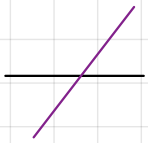
$$-2x^7$$ kommt von unten

$$x^7 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

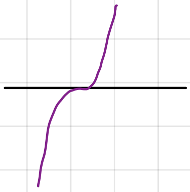
$-$ $+$ $\to$ $\nearrow$

$-$ $-$ $\|$ $+$ $+$ $\to$ $\searrow$





einfache Nullstelle



dreifache Nullstelle

x_0 Nullstelle von p, $p \in \Pi_n$ hat n Nullstellen

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x), \quad q \in \Pi_{n-1}$$
$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdot z(x), \quad z \in \Pi_{n-2}$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot s(x), \quad s \in \Pi_{n-3}$$
$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \cdot a, \quad a \in \mathbb{R}$$

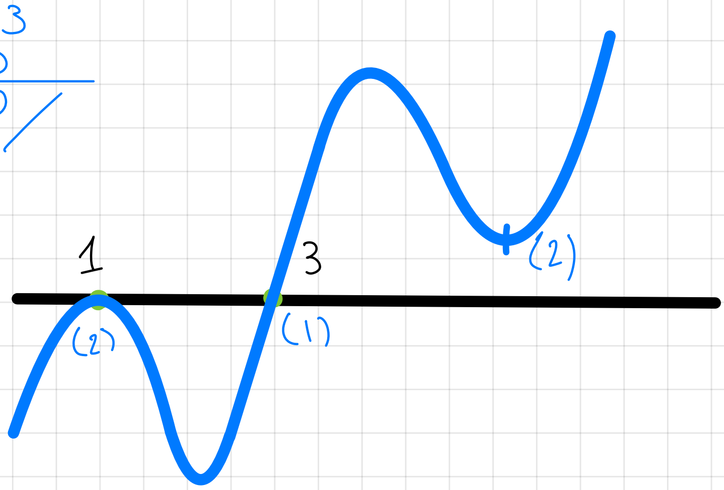
Linearfaktorzerlegung

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 7x - 3 =$$ $T(3) = \{1, 3\}$
$$= (x-1)(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3) =$$
$$= (x-1)(x-1)(x^3 - 3x^2 + x - 3) =$$
$$= (x-1)^2 (x-3)(x^2+1)$$

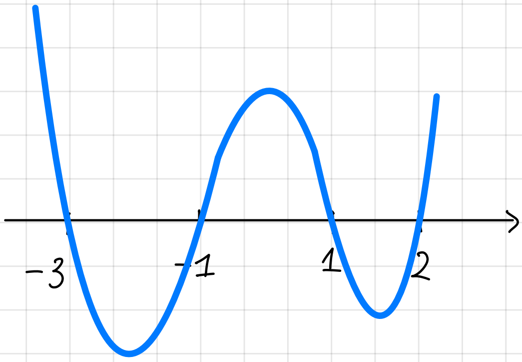
$x^2 + 1$ ist irreduzibel

	1	-5	8	-8	7	-3
1	–	1	-4	4	-4	3
	1	-4	4	-4	3	0 ✓

1	–	1	-3	1	-3
	1	-3	1	-3	0 ✓
3	–	3	0	3	
	1	0	1	0 ✓	



$$p(x) = 3x^4 + 3x^3 - 21x^2 - 3x + 18 =$$
$$= 3(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) =$$
$$= 3(x-1)(x-2)(x+1)(x-3)$$



	1	1	-7	-1	6
1	—	1	2	-5	-6
	1	2	-5	-6	0
2	—	2	8	6	
	1	4	3	0	
-1	—	-1	-3		
	1	3	0		
-3	—	-3			
	1	0			

$$\lim_{x \to -\infty} (3 \cdot x^4) = +\infty$$

$$3(x-1)(x-2)(x^2+4x+3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -3$$

Übungen zu Polynomen und dem Horner-Schema

1 Nullstellen von Polynomen

Geben Sie für die folgenden Polynome Nullstellen an und skizzieren Sie die Graphen qualitativ:

$x(x^2-12x+45)=x(x+3)(x-5)$

a) $p(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ b) $p(x) = x^3 - 9x$

c) $p(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$ d) $p(x) = x^{10} - x^9$

2 Wertebereich von Polynomen

Bestimmen Sie den Wertebereich für die folgenden Polynome:

a) $p(x) = x^3 - 14x + 16$ b) $p(x) = x^4 - 18x^2 + 27$

3 Horner-Schema

Berechnen Sie mit dem Horner-Schema alle reellen Nullstellen von:

a) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$ b) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3$

$(x-3)(x^4+x^2+1)$ $(x-3)(x^4+x+1)$

4 Vollständiges Horner-Schema

Wenn wir für ein Polynom vom Grad n das Horner-Schema $n+1$-mal an einer Stelle x_0 durchführen, so sprechen wir vom vollständigen Horner-Schema. Die Zahlen A_k, die rechts in jeder Zeile des vollständigen Horner-Schemas stehen heißen Entwicklungskoeffizienten von p bei der Entwicklung um x_0. Es gilt dann

$$p(x) = A_n(x - x_0)^n + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

Entwickeln Sie das Polynom $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 5$ um $x_0 = 2$.

(Probe durch Ausmultiplizieren)

Hinweis

Sie können die Aufgaben "per Hand" rechnen, falls Sie im Ergebnis unsicher sind, kontrollieren Sie Ihre Rechnung mit einem CAS (z.B. MuPAD).

20.01.25

$p(x) = x^n - 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

$n = 3 : \quad x^3 - 1 = x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$

$$\begin{array}{lcccc} p(1) & 1 & 0 & 0 & -1 \\ p(-1) & 1 & -0 & 0 & -1 \end{array}$$

$n = 4 : \quad x^4 - 1 = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{irreduzibel}}$

$$\begin{array}{lccccc} p(1) & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ p(-1) & 1 & -0 & 0 & -0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccccc} & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & - & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & - & & -1 & 0 & -1 & \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$\geq 1 > 0$

$n = 6 \quad x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$

$$\begin{array}{cc|ccccccc} & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & - & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & - & & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$x^2 + 64x + 107$

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -3 \quad 2$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -7 & -1 & 6 & = & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 1 & 6 & = & 0 \end{array}$$

(−1 ist eine Nullstelle)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\
1 & - & 1 & 2 & -5 & -6 \\
\hline
 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\
-1 & - & -1 & -1 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 6 & 0 &
\end{array}
$$

19.01.25

Hausaufgabe

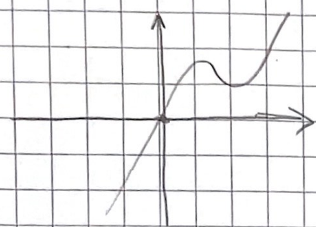
N 1

a) $p(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

$\Leftrightarrow p(x) = x(x^2 - 12x + 45)$

$\Delta = 144 - 4 \cdot 45 < 0 \Rightarrow$

Nullstelle bei $x = 0$

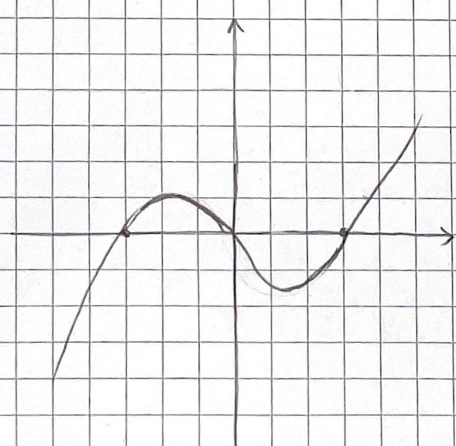


b) $p(x) = x^3 - 9x$

$\Leftrightarrow p(x) = x(x^2 - 9)$

$\Leftrightarrow p(x) = x(x-3)(x+3)$

Nullstellen $= \{(0 | 3 | -3)\}$



c) $p(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$

$\Leftrightarrow p(x) = x^2(3x^2 - 16x + 24)$

$x_{1,2} = \frac{16}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{6}\right)^2 - \frac{24}{3}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - 8} \in \emptyset$

Nullstelle bei $x = 0$

d) $p(x) = x^{10} - x^9 = x^9(x-1)$

Nustellen $= \{(0 | 1)\}$

N2 a) $p(x) = x^3 - 14x + 16$

$x \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

b) $p(x) = x^4 - 18x^2 + 27$

$x \in \mathbb{R}$

$p(x) = x^4 - 18x^2 + 81 - 54$

$p(x) = (x^2 - 9)^2 - 54$

$y \in [-54, \infty[$

N3 a) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$

	1	-3	1	-3	1	-3
3	-	3	0	3	0	3
	1	0	1	0	1	0

$p(x) = (x-3)(x^4 + x^2 + 1)$

Nullstelle bei $x = 3$

b) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3$

	1	-3	0	1	-2	-3
3		3	0	0	3	3
	1	0	0	1	1	0

$p(x) = (x-3)(x^4 + x + 1)$

Nullstelle bei $x = 3$

20.01.25

$p(x) = x^n - 1, \; n \in \mathbb{N}$

<u>$n = 3$:</u> $x^3 - 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$

	1	0	0	-1
$p(-1)$	-1	0	0	-1

$x = -1$ Nullstelle, wenn die Summe der Koeff. gleich null ist.

<u>$n = 4$:</u> $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

irreduzibel

1	0	0	0	-1
1	-0	0	-0	-1

	1	0	0	0	-1
1	–	1	1	1	1
	1	1	1	1	0

-1	–	-1	0	-1
	1	0	1	0

$4(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + x - 2 + 5$

$4 \qquad -3(x^2-4x+4)$

1

$1 \quad 1$

$1 \quad 2 \quad 1$

$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$4x^3 - 12 \cdot x^2 \cdot 2 + 12 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 \cdot 4 - 3x^2 + 12x - 12 + x + 3 =$

$= 4x^3 - 27x^2 + 61x + 35$

$p(x) = x^3 - 14x + 16$, $W = \mathbb{R}$, weil x^3 ungerader Exponent

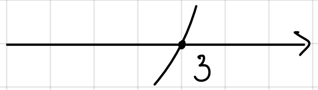
b) $p(x) = x^4 - 18x^2 + 27 \overset{x^2=u}{=} u^2 - 18u + 27 = (u^2 - 18u + 81) + 27 - 81 =$

$= (u-9)^2 - 54 = (x^2-9)^2 - 54 \geq -54$

21.01.2025

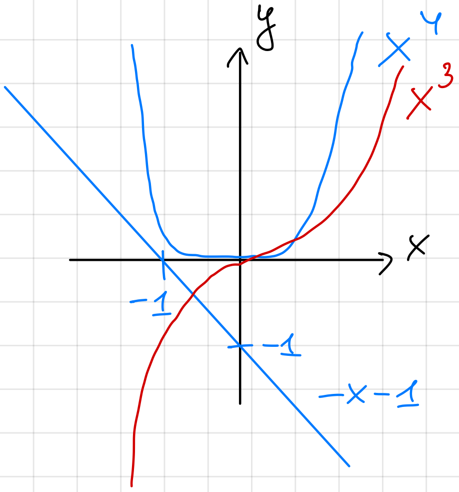
$$p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)\underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}_{\text{irreduzibel}}$$

	1	−3	1	−3	1	−3
3	—	3	0	3	0	3
	1	0	1	0	1	0



$$x^4 + x + 1 = 0$$

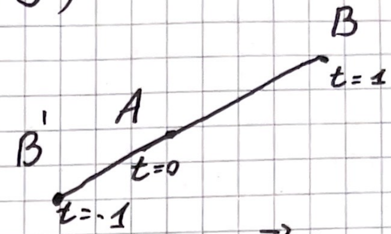
$$x^4 = -x - 1$$



$$p(x) = x^3 + x + 1$$

$$g_1 \equiv \vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\\2\\2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix}$$

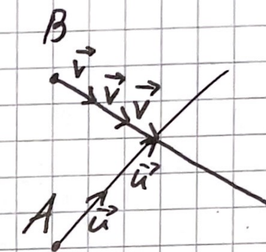
$$\begin{pmatrix} 2\\2\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\2\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\5 \end{pmatrix}$$
$t=0 \quad t=1 \quad t=2$



$A, B \in \mathbb{R}^3 \qquad S: \vec{v}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$

$0 \leq t \leq 1$

Strecke Strahl / Halbgerade Gerade



$$g_2 \equiv \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 3\\2\\-1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1\\1\\-1 \end{pmatrix}$$

$$g_3 \equiv \vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix} 4\\4\\4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2\\0\\6 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} + \underline{\underline{2}}\vec{u} = b + \underline{\underline{3}}\vec{v}$

$2 \neq 3$

$t_1 \neq t_2$ (muss nicht)

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}, \text{ weil } r \cdot 0 = 0 \neq 1$$

$\Downarrow$

nicht kollinear (linear unabhängig)

$$\begin{pmatrix} 2\\2\\2 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\2\\-1 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 1\\1\\-1 \end{pmatrix}$$

$$t_1\begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix} - t_2\begin{pmatrix} 1\\1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\2\\-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\\2\\2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= 1 && \Rightarrow t_1 = 1 \\ -t_2 &= 0 && \Rightarrow t_2 = 0 \\ -3t_1 + t_2 &= -3 && \Rightarrow t_1 = 1 \end{aligned}$$

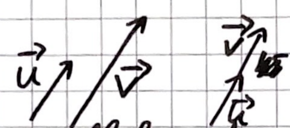
$\mathbb{L} = \{(1;0)\}$ $S(3;2;-1)$ ist Schnittpunkt von g_1 und g_2

$\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$ sind kolliniar, weil

$(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$



parallel identisch

g_1 und g_3 sind parallel oder identisch

$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

$t\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

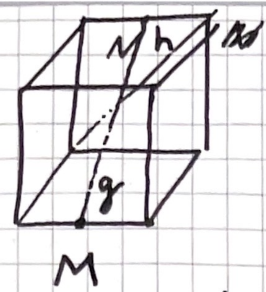
$A \notin g_3 \Rightarrow g_1$ und g_3 sind parallel

$g_2 \equiv \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

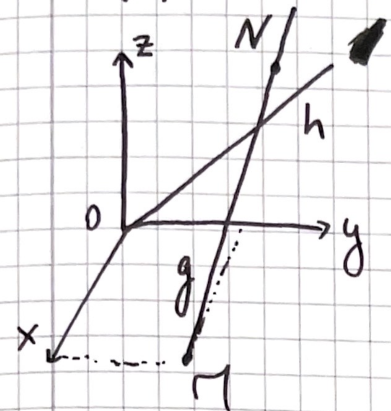
$t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix} \Rightarrow$ nicht kollinear $\Rightarrow$ Windschief oder schneidend

$\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
t_1 + 2t_2 &= 1 &&\Rightarrow t_2 = -0{,}5\\
t_1 &= 2 &&\Rightarrow t_1 = 2 \qquad \Rightarrow \text{Windschief}\\
(↯)\ -t_1 - 6t_2 &= 5 &&\Rightarrow t_2 = -\tfrac{7}{6}
\end{aligned}$$



$M(1; 0{,}5; 0)$
$N(0; 0{,}5; 1)$



$$h: \vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g = h \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t + s &= 1 &\Rightarrow s = 0{,}5 \\ t &= 0{,}5 &\Rightarrow t = 0{,}5 \\ t - s &= 0 &\Rightarrow s = 0{,}5 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{(0{,}5; 0{,}5)\}$ => hat ein Schnittpunkt

$S(0{,}5; 0{,}5; 0{,}5)$ $\quad \vec{s}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

g und h schneiden sich im Schnittpunkt $S(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

A(0|0|0) B(0|8|0) C(-6|8|0)

D(-6|0|0) E(-3|1|5) ~~D(-6|0|0)~~

F(-3|6|5) P(-3|0|0) Q(-1,5|0|2,5)

R(-6|4|0)

$$\overrightarrow{QR} = \vec{r} - \vec{q}$$

$$g: \vec{u}_1(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{u}_2(x) = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$g = h \iff \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4,5y &= -3 \\ 6x - 3,5y &= 4 \\ 5x - 2,5y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= -\tfrac{2}{3} \\ x &\neq \quad \neq 4 \\ x &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Geraden sind windschief

23.01.2025

Dezimalzahlen, $b = 10$, $Z = \{0, 1, .. 9\}$

$$456_{10} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$$Z = \sum_{k=0}^{n} d_k \cdot 10^k$$

Binärzahlen, $b = 2$, $Z = \{0, 1\}$

$$\overset{2^3}{1}\overset{2^2}{0}\overset{2^1}{1}\overset{2^0}{0}_2 = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10_{10}$$

$$p(2) = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$p(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot 1$$

	1	0	1	0
2	–	2	4	10
	1	2	5	10

$$11100101101_2 = 1837_{10}$$

$$27_{10} = \overset{\mathrm{I}}{1}\overset{\mathrm{II}}{1}\overset{\mathrm{III}}{0}\overset{\mathrm{IV}}{1}\overset{\mathrm{V}}{1}_2$$

$27 = 13 \cdot 2 + 1$ V

$13 = 6 \cdot 2 + 1$ IV

$6 = 3 \cdot 2 + 0$ III

$3 = 1 \cdot 2 + 1$ II

$1 = 0 \cdot 2 + 1$ I

	1	1	0	1	1
2	–	2	6	12	26
	1	3	6	13	27

Horner-Schema

euklidischer Algorithmus

$b = 10$ Dezimalzahl $Z = \{0, 1, \dots, 9\}$

$b = 2$ Binärzahl $Z = \{0, 1\}$

$b = 16$ Hexadezimalzahl $Z = \{0, 1, \dots, 9, a, b, c, d, e, f\}$

$b = 8$ Oktalzahl $Z = \{0, 1 .. 7\}$

$52_{16} = 82$

$$\begin{array}{c|cc} & 5 & 2 \\ 16 & - & 80 \\ \hline & 80 & 82 \end{array}$$

$18_{10} = 12_{16}$

$18 = 1 \cdot 16 + 2$

$1 = 0 \cdot 16 + 1$

$60_{10} = 3C_{16}$

$60 = 3 \cdot 16 + 12\ (C)$

$3 = 0 \cdot 16 + 3$

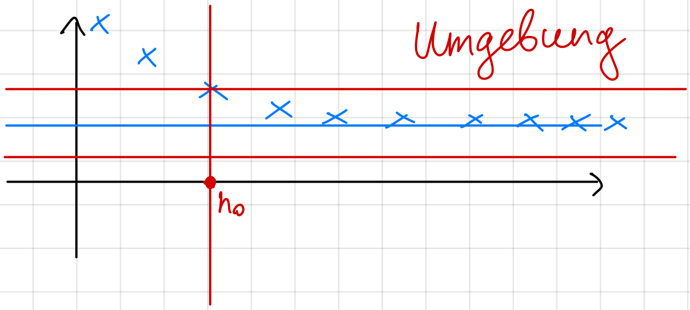
RGB - Farbsystem

rot grün blau

#000000 schwarz

FFFFFF weiß

bisher: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$



jetzt: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0-} = -\infty$$

$\frac{1}{0}$ existiert nicht

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$$

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

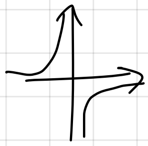
$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

	1	0	-3	2	
1	–	1	1	-2	
	1	1	-2	0	
1	–	1	2		
	1	2	0		
-2	–	-2			
	1	0			

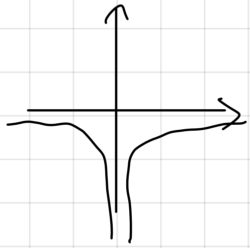
$x_1 = 1$

$x_2 = -2$

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \frac{-12}{9 \cdot (0^{\pm})} = \mp\infty$$



$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \frac{-3}{(0^{\pm})^2 \cdot 3} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty$$



Rationale Funktionen

27.01.25

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

$$\cancel{\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{-3}{0^\pm} = \mp\infty}$$ (falsch)

(Faktorisierung)

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\cancel{3}\cdot(-1)}{(0^\pm)^2\cdot\cancel{3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

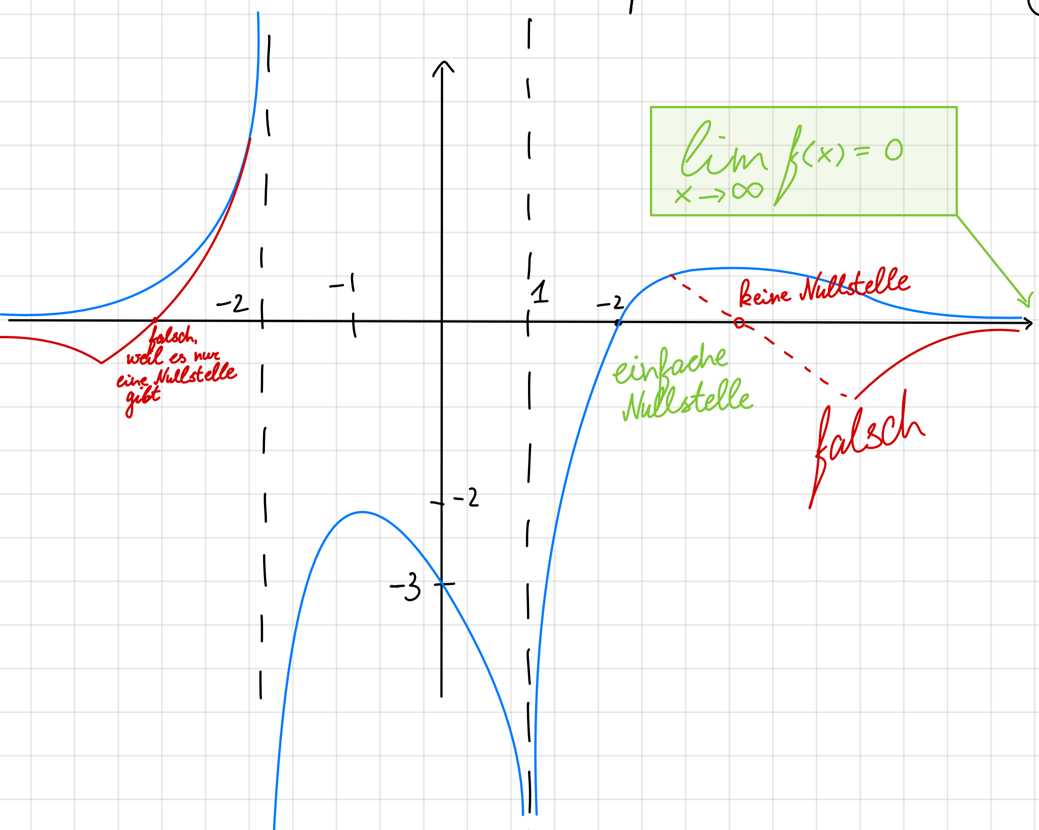
$$\lim_{x \to -2^\pm} f(x) = \lim_{x \to -2^\pm} \frac{\cancel{3}\cdot(-4)}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot 0^\pm} = \frac{-4}{3\cdot(0^\pm)} = \mp\infty$$

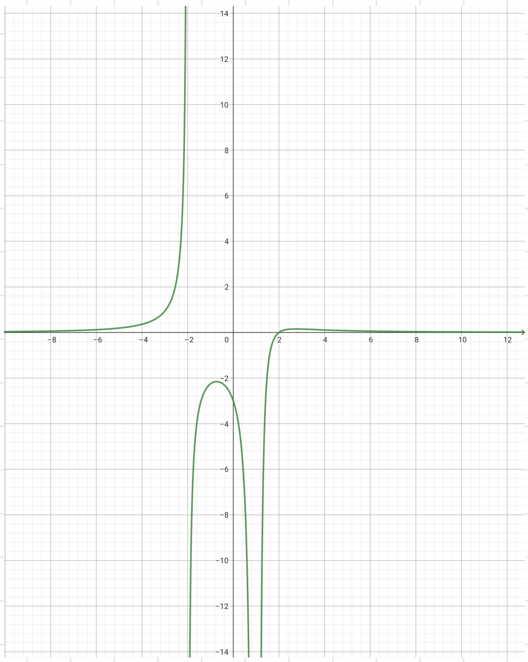
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\frac{3n-6}{n^3-3n+2} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \frac{\frac{3}{n^2}-\frac{6}{n^3}}{1-\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-0}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$N = \{2\}$ Nullstelle von f

$S(0; -3)$ Schnittpunkt mit y-Achse





1. Definitionsbereich ($\mathbb{D}$) (zuerst faktorisieren)
2. Verhalten an den Def. lücken
3. Verhalten im Unendlich
4. Nullstellen
5. Schnittpunkt mit y-Achse

Übung: $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-2}{x-3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

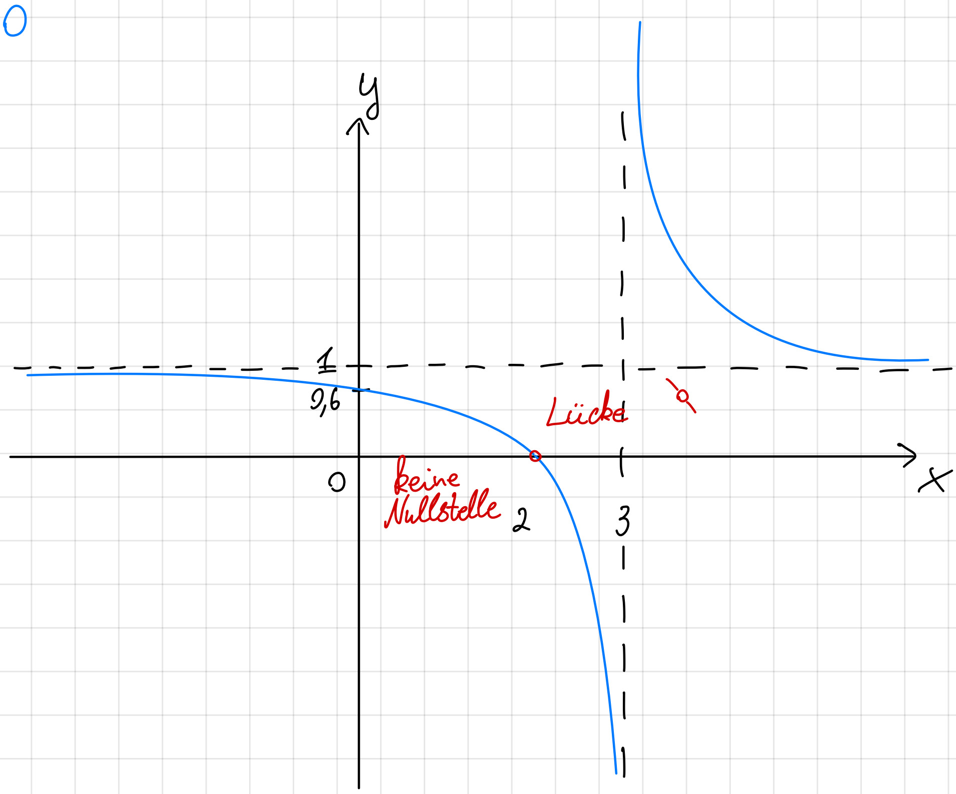
$\lim\limits_{x \to 3\pm} f(x) = \frac{1}{(0\pm)\cdot 1} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to 2\pm} f(x) = \frac{0}{-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

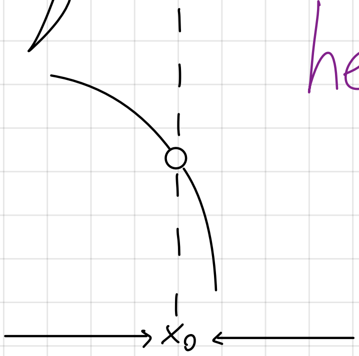
keine Nullstellen

$S(0; \frac{2}{3})$



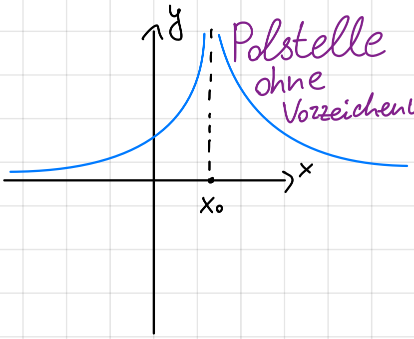
x_0 Def.lücke von f

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = a$$

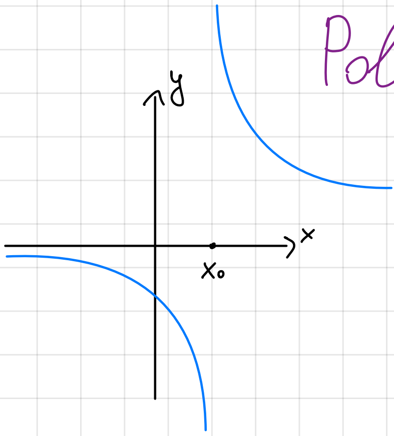


hebbare Lücke

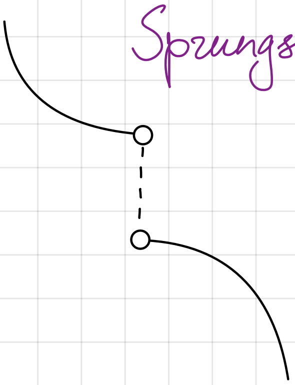
$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$$



Polstelle
ohne
Vorzeichenwechsel



Polstelle
mit VZW.



Sprungstelle

28.01.2025

$$f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20} = \frac{\overset{\text{Nullstelle}}{(x-2)(3x+1)}}{5(x^2-4)} = \frac{\cancel{(x-2)}(3x+1)}{5\cancel{(x-2)}(x+2)} \overset{\text{für } x\neq 2}{=} \frac{3x+1}{5(x+2)} := \tilde{f}(x)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} \qquad \approx \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

	3	−5	−2
2	–	6	2
	3x	1	0

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 4} = \frac{7}{20} = \tilde{f}(2)$$

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \frac{-5}{5 \cdot 0^{\pm}} = \frac{-1}{0^{\pm}} = \mp\infty$$

f ist in $x = 2$ durch $\frac{7}{20}$ passend ergänzbar

$x = 2$ ist eine hebbare Lücke

$x = -2$ ist eine Polstelle mit VZW

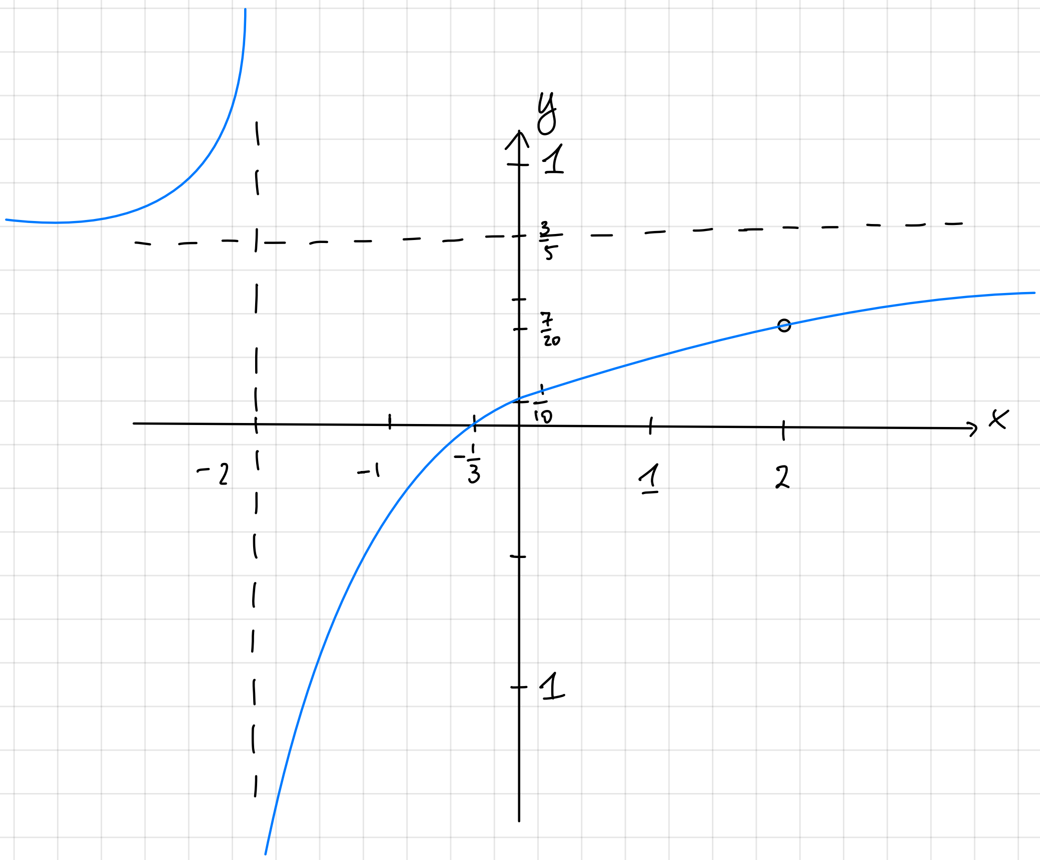
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}, & x \neq \pm 2 \\[2mm] \dfrac{7}{20}, & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3}{5}$$

$S\left(0; \frac{1}{10}\right)$

$N\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{3}{5}$$



$$f(x) = \frac{x^3-216}{72-2x^2} = \frac{x^3-216}{-2(x-6)(x+6)} = \frac{\cancel{(x-6)}(x^2+6x+36)}{-2\cancel{(x-6)}(x+6)} := \tilde{f}(x)$$

$$\lim_{x\to -6^{\pm}} f(x) = \frac{\cancel{-2}\cdot 216}{\cancel{-2}\cdot(-12)\cdot 0^{\pm}} = \mp\infty$$

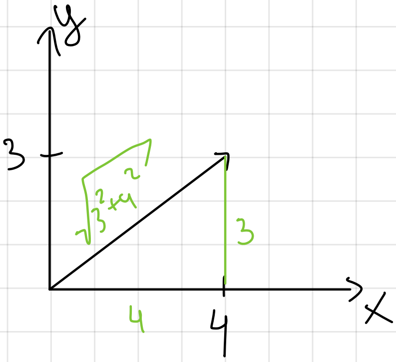
$$\lim_{x\to 6^{\pm}} f(x) = \frac{36\cdot 3}{(-2)\cdot 12} = -4\tfrac{1}{2} = -\frac{9}{2}$$

	1	0	0	−216
6	–	6	36	216
	1	6	36	0

29.01.2025

Betrag und Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$



$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Eigenschaften des Betrages

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Vektoren

1) $|\vec{a}| \geq 0$, $|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$
2) $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$
3) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ Dreiecksungleichung

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$P(-6|-2|3) \qquad Q(9|-2|11)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\underbrace{(9+6)^2}_{225} + (-2+2)^2 + \underbrace{(3-11)^2}_{64}} = 17$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + r \cdot \vec{a}| = |(1+r) \cdot \vec{a}| = |1+r| \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}| + |r \cdot \vec{a}| = |\vec{a}| + |r| \cdot |\vec{a}| = (1 + |r|) \cdot |\vec{a}|$$

$$P(5;0;z) \qquad Q(4;-2;5) \qquad |\overrightarrow{PQ}| = 3$$

$$(5-4)^2 + 2^2 + (z-5)^2 = 9$$

$$1 + 4 + z^2 - 10z + 25 - 9 = 0$$

$$z^2 - 10z + 21 = 0$$

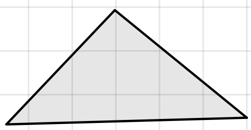
$$z_1 = 7 \qquad z_2 = 3$$

$$A(7;0;-1) \qquad B(5;-3;-1) \qquad C(4;0;1)$$

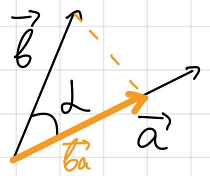
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13}$$



gleichschenkliges Dreieck



Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{b}_a|}{|\vec{b}|}$$

$$|\vec{b}_a| = \cos\alpha \cdot |\vec{b}|$$

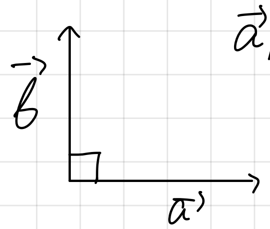
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

wichtig • >.

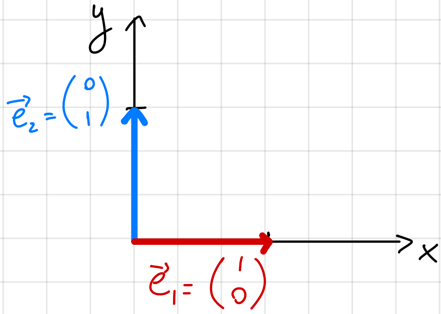
$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}_a| = \underbrace{\cos\alpha \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|}_{\text{Skalarprodukt der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$



$\vec{a}, \vec{b}$ orthogonal (= senkrecht, $\perp$)



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

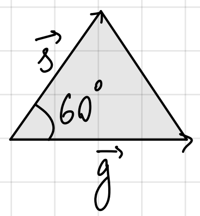
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \bullet (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) =$$

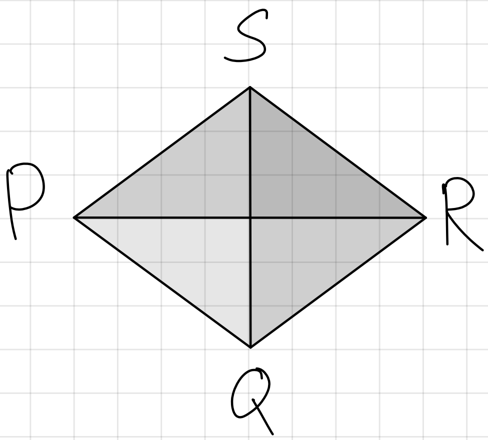
$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2}_{1} =$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$$



$$\vec{g} \cdot \vec{s} = |\vec{g}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 60° = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18$$



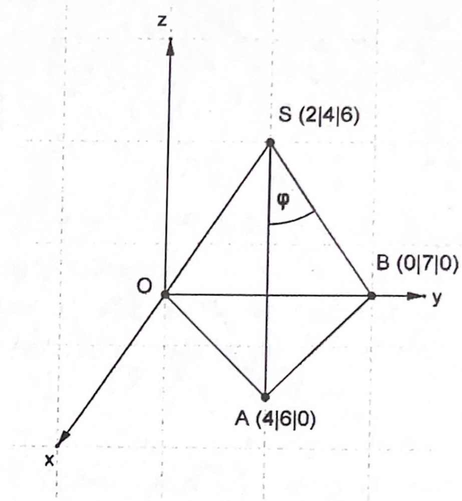
Für das Skalarprodukt existiert eine **Koordinatenform**. Es gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

bzw. allgemein

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k.$$

Die Koordinatenform des Skalarproduktes ermöglicht es nun, die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren aus ihren Koordinaten zu berechnen.

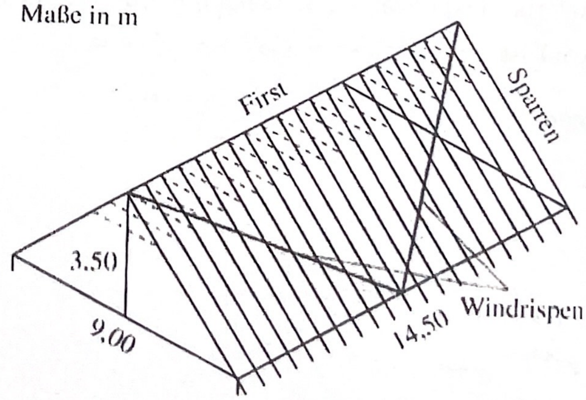


Übungen

1. Gegeben ist der Tetraeder OABS. Berechnen Sie den Winkel φ.
2. Bestimmen Sie alle Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Hausaufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g durch die Punkte $A\ (2|-3|1)$ und $B\ (10|5|15)$. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte der Geraden g, die von A den Abstand 9 haben.
   [zur Kontrolle: Einer der Punkte hat die Koordinaten $P(6|1|8)$].
2. Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{a} - r\cdot\vec{b}\ \perp\ \vec{b}$ ist.
   Interpretieren Sie die Lage der Vektoren geometrisch.
3. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Punkte $A\ (-4|8)$, $B\ (5|-4)$ und $C\ (7|10)$. Bestimmen Sie den **Fußpunkt** F der Höhe h_c. [Unter dem Fußpunkt versteht man den Schnittpunkt des Lotes von C auf die Strecke AB.]
4. Die nebenstehende Grafik zeigt die Anordnung der Balken eines Daches.
   a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie die Lage eines Sparrens und einer Windrispe durch einen Vektor.
   b) Berechnen Sie die Länge einer Windrispe und die Größe des Winkels zwischen Sparren und Windrispe.



Skalarprodukt

Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Länge des zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeiles. Der Betrag wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. allgemein in $\mathbb{R}^n$ gelten für den Betrag folgende Darstellungen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2}$. (Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras)

Für den Betrag gelten folgende Eigenschaften

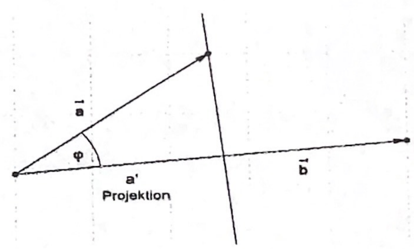
1. $|\vec{a}| \geq 0$, insbesondere $|\vec{0}| = 0$.
2. $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecks-Ungleichung , vgl. auch Analysis)

Beispiel: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$.

Übungen

1. Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P(-6|-2|3)$ und $Q(9|-2|11)$.
2. In welchen Fällen gilt für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ die Gleichung $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
3. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate p_3 so, dass $P(5|0|p_3)$ vom Punkt $Q(4|-2|5)$ den Abstand 3 hat.
4. Welche besondere Form hat das Dreieck $A(7|0|-1)$, $B(5|-3|-1)$ und $C(4|0|1)$?

Unter dem **Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$** versteht man den kleineren Winkel zwischen den Pfeilen der Vektoren. In dem folgenden Bild ist a' die **Projektion** des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$. Für die Projektion gilt im Fall $0 < \varphi < 90°$: $a' \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. Das letzte Produkt wird sich für unsere Fragestellungen in diesem Kapital als nützlich erweisen.

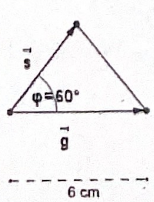


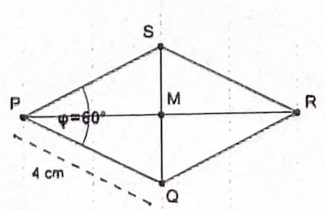
Definition und Satz

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, so heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ das **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$. (Bemerkung: Die Bezeichnung Skalarprodukt erinnert daran, dass dieses Produkt kein Vektor, sondern ein Skalar, also hier eine reelle Zahl, ist.

Für $0° \leq \varphi < 90°$ ist das Skalarprodukt positiv, für $\varphi = 90°$ ist das Skalarprodukt null und für $90° < \varphi \leq 180°$ ist das Skalarprodukt negativ. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ $(\neq \vec{0})$ heißen orthogonal (bzw. senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist, wir schreiben $\vec{a} \perp \vec{b} \quad :\Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

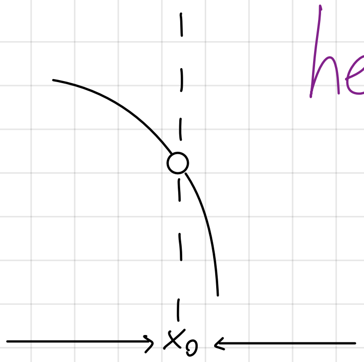
Übungen





1. Bestimmen Sie $\vec{g} \cdot \vec{s}$ für das Dreieck im nebenstehenden Bild.
2. Bestimmen Sie die folgenden Skalarprodukte für die Raute im nebenstehenden Bild:
   $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$
3. Überlegen Sie sich für eigene Vektoren die entsprechenden Skalarprodukte.

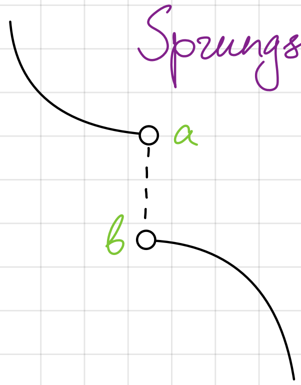
30.01.25



hebbare Lücke

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = a$$

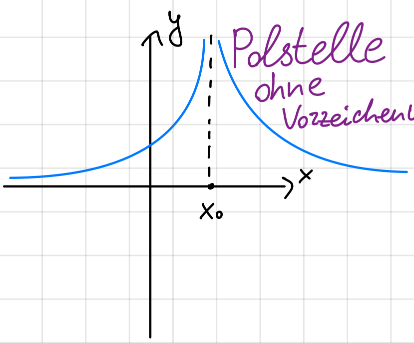
Sprungstelle



$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a$$

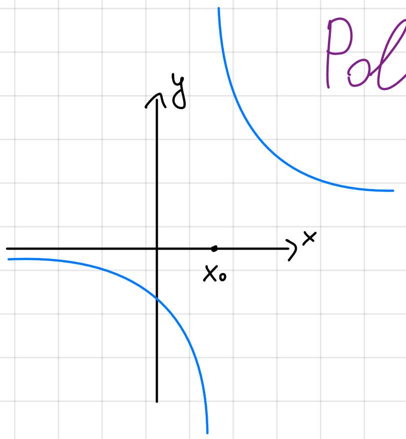
$$a \neq b$$



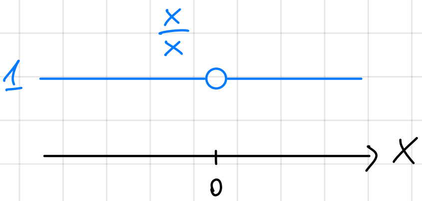
Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \infty \quad (-\infty)$$

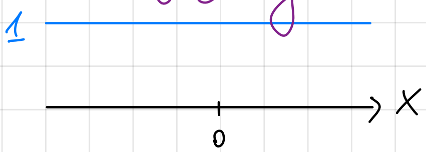
Polstelle mit VZW.



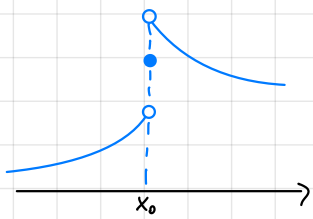
$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty \quad (\mp\infty)$$

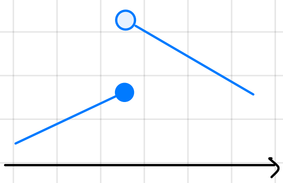


stetig



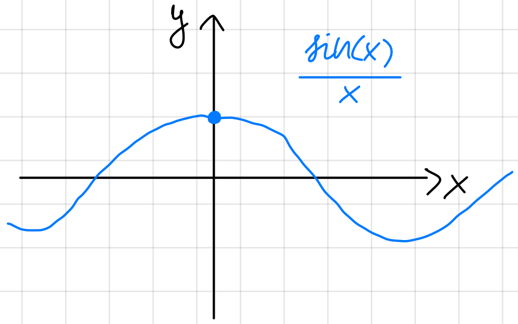
$$\lim_{x \to 0 \pm} f(x) = 1 = 1 = f(0)$$





$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 -} f(x) \neq f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{x^3-216}{72-2x^2} = \frac{x^3-216}{-2(x^2-36)} = \frac{\cancel{(x-6)}(x^2+6x+36)}{(-2)\cdot\cancel{(x-6)}(x+6)} \underset{\text{für } x \neq 6}{=} \frac{x^2+6x+36}{(-2)\cdot(x+6)} =: \tilde{f}(x)$$

① $D = \mathbb{R} \setminus \{-6; 6\}$

② $\lim\limits_{x \to -6^\pm} f(x) = \frac{-432}{(-2)\cdot(-12)\cdot 0^\pm} = \mp\infty$ (Pollstelle mit VZW.)

$\lim\limits_{x \to 6^\pm} f(x) \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x \to 6^\pm} \tilde{f}(x) = \frac{3 \cdot 36}{(-2)\cdot 12} = -\frac{9}{2}$ (Hebbare Lücke)

③ Nullstellen: keine, $\Delta < 0$

④ Schnittpunkt mit der y-Achse $S(0; -3)$

⑤ Verhalten im Unendlich

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3-216}{72-2x^2} = \mp\infty$

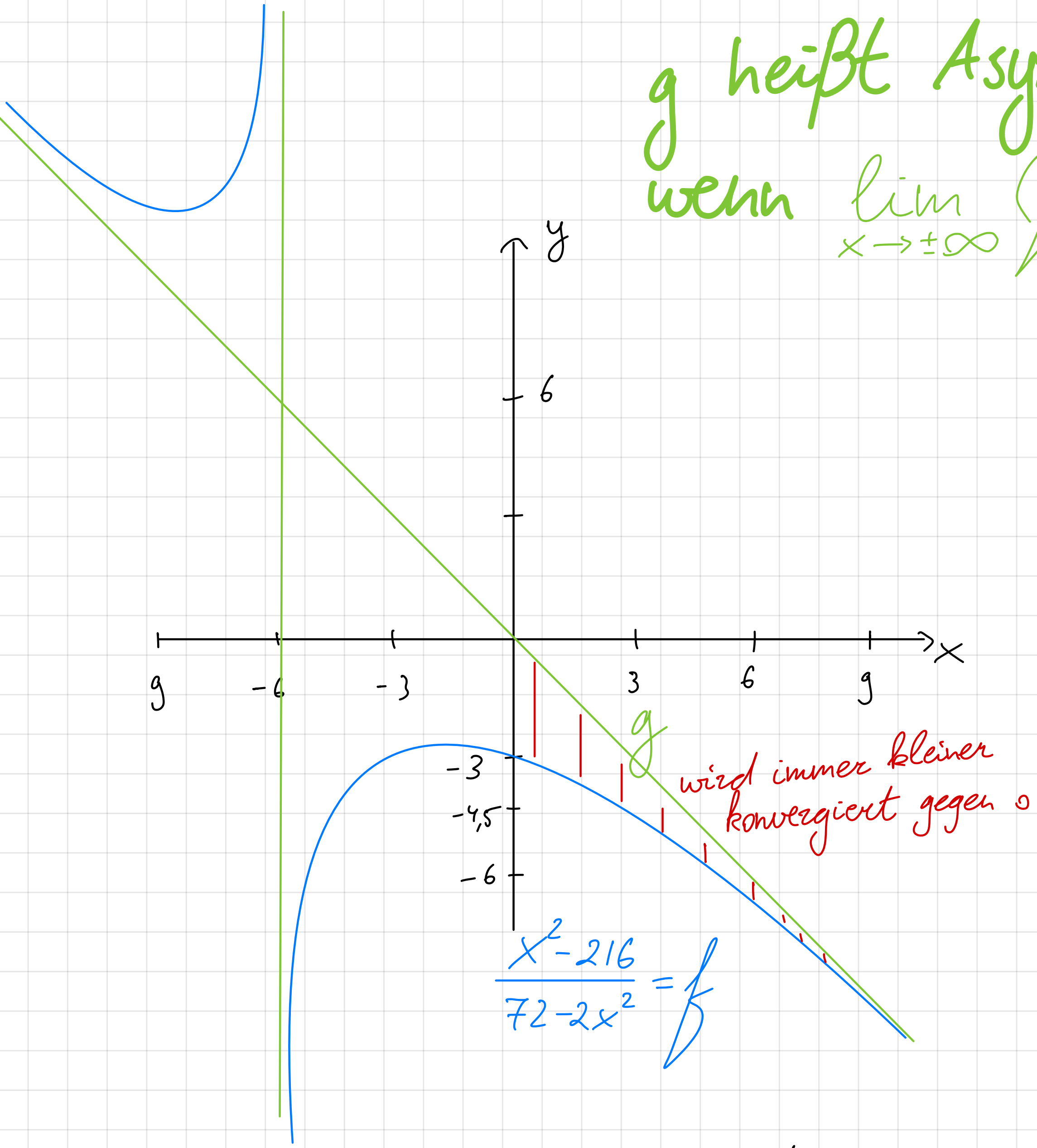
	1	6	36
-6	—	-6	0
	1	0	36

$\underbrace{1 \quad 0}_{\text{Asymptote}}$ 36 Rest

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+6x+36}{x+6}$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

g heißt Asymptote auf f wenn $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$



$$f(x) = \frac{x^4}{x^2-1} = \frac{x^4}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{x^4}{x-1}}{x+1} = \frac{x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}}{x+1} =$$

$$= \underbrace{x^2+1}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{(x-1)(x+1)}}_{\text{Rest}}$$

	1	0	0	0	0
1	–	1	1	1	1
	1	1	1	1	1 $\frac{1}{x-1}$ Rest 2
−1	–	−1	0	−1	
	1 x^2	0 +	1 1	0 Rest 1	

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{x^4}{x^2-1}}_{f(x)} - \underbrace{(x^2+1)}_{g(x)} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

1. Definitionsbereich (D) (zuerst faktorisieren) 03.02.25

2. Verhalten an den Def. lücken

3. Verhalten im Unendlich

4. Nullstellen

5. Schnittpunkt mit y-Achse

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^3}{x^2+x+1} + \overbrace{\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}}^{1} =$$

$$(x^3+x^2+x+1) : (x^2+x+1) = \overset{\frac{x^3}{x^2}}{x} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$-(x^3+x^2+x) \qquad \cdot x$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \underbrace{x}_{\text{Asymptote}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = 0$$

$y=x$ ist Asymptote an f für $x \to \pm\infty$

① $x^2+x+1 \neq 0$

$D_f = \mathbb{R}$

$$x^3+x^2+x+1 : x^2+x+1 = x$$
$$-(x^3+x^2+x)$$
$$1$$

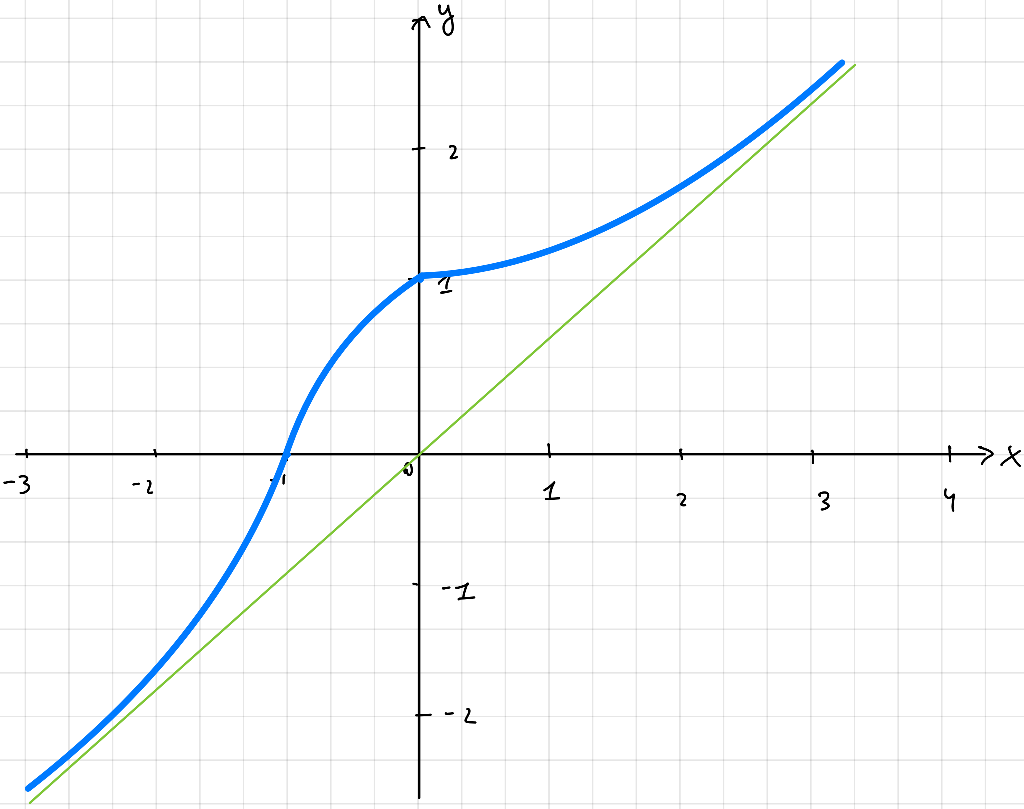
$$x + \frac{1}{x^2+x+1}$$

② —

③ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

④ Nullstellen: $x=-1$

⑤ $S(0;1)$


y
x
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

① $D_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$

$x_0 = 4$ ist hebbare Lücke

② $$\lim_{x \to 4\pm} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 4\pm} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

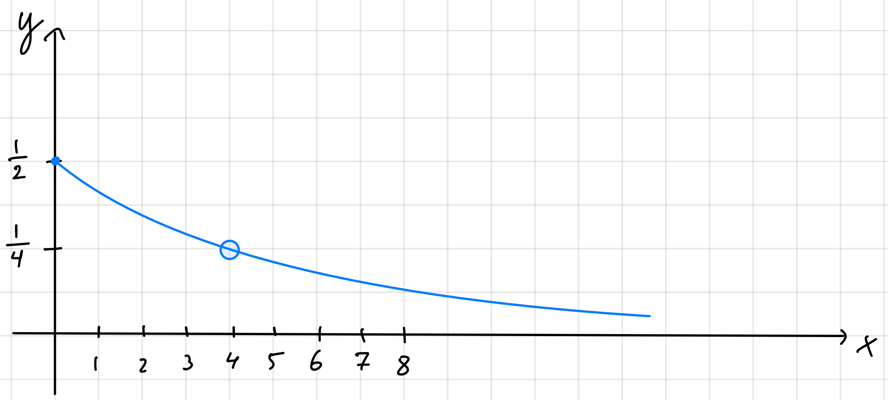
Die Funktion f an der Stelle $x_0 = 4$ durch $\frac{1}{4}$ passend ergänzt werden

③ $$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Die x-Achse $(y=0)$ ist Asymptote an f für $x \to \infty$

④ keine Nullstelle

⑤ $S(0; \frac{1}{2})$



$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = x-2 = \tilde{f}(x)$$

① $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

② $\lim\limits_{x \to 3\pm} f(x) = \lim\limits_{x \to 3\pm} \tilde{f}(x) = \underline{1}$

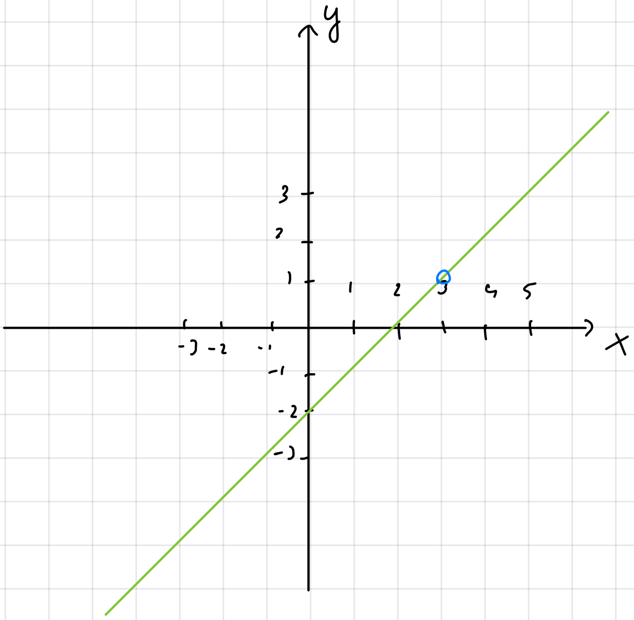
Ergänzung

Hebbare Lücke

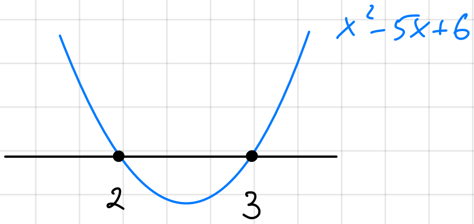
③ $S(0;2)$

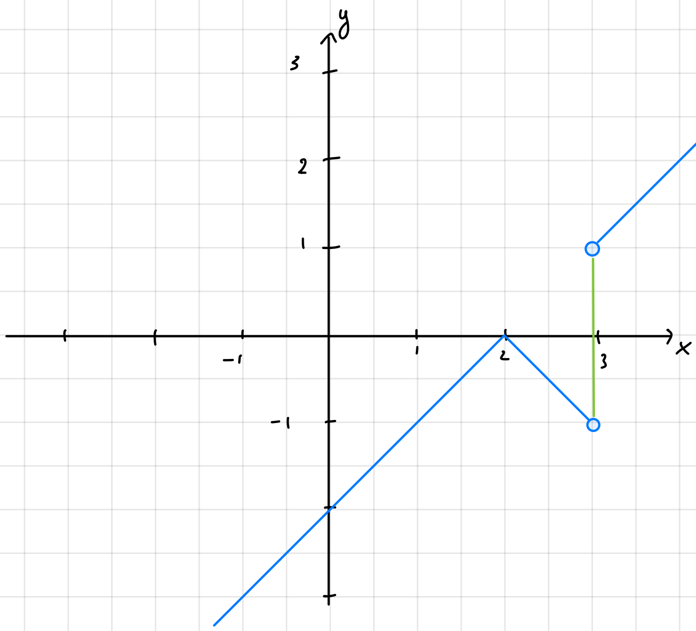
④ Nullstelle $x_0 = 2$

⑤ Asymptote $y = x-2$



$$f(x) = \frac{|x^2-5x+6|}{x-3} = \begin{cases} x-2, & \text{für } x \leq 2, x > 3 \\ 2-x, & \text{für } 2 < x < 3 \end{cases}$$





$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (x-2) = 1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (2-x) = -1$$

$x_0 = 3$ ist eine Sprungstelle

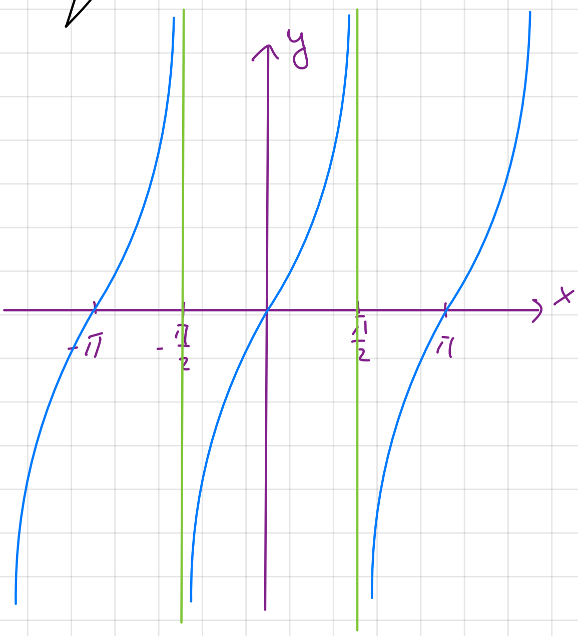
04.02.25

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

arctan ist eine Umkehrfunction zu tan

$$\tan(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

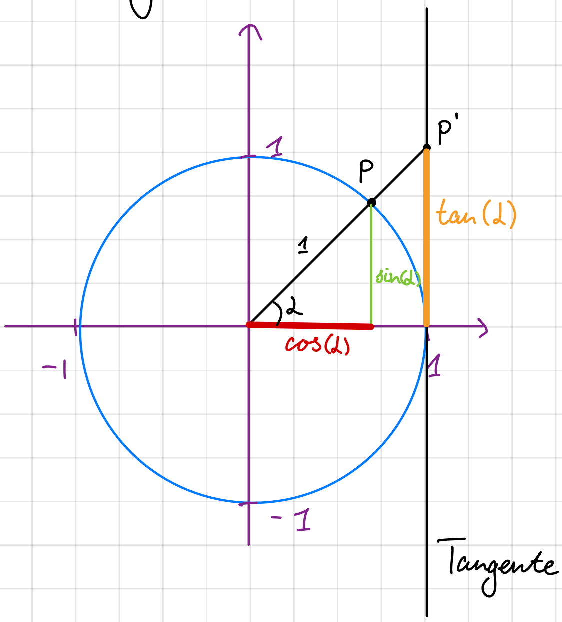
Def.-lücke im $\tan(x) \iff \cos(x) = 0 \iff x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

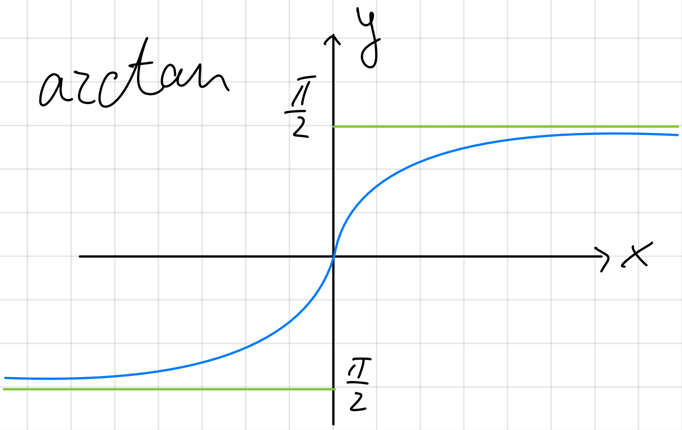


$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{1}$$

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \nearrow$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\nearrow$$

arctan



$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$x = 1$ ist eine Sprungstelle (mit der Höhe π)

① $D_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1^\pm} f(x) = \arctan\left(\frac{2}{0^\pm}\right) = \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$

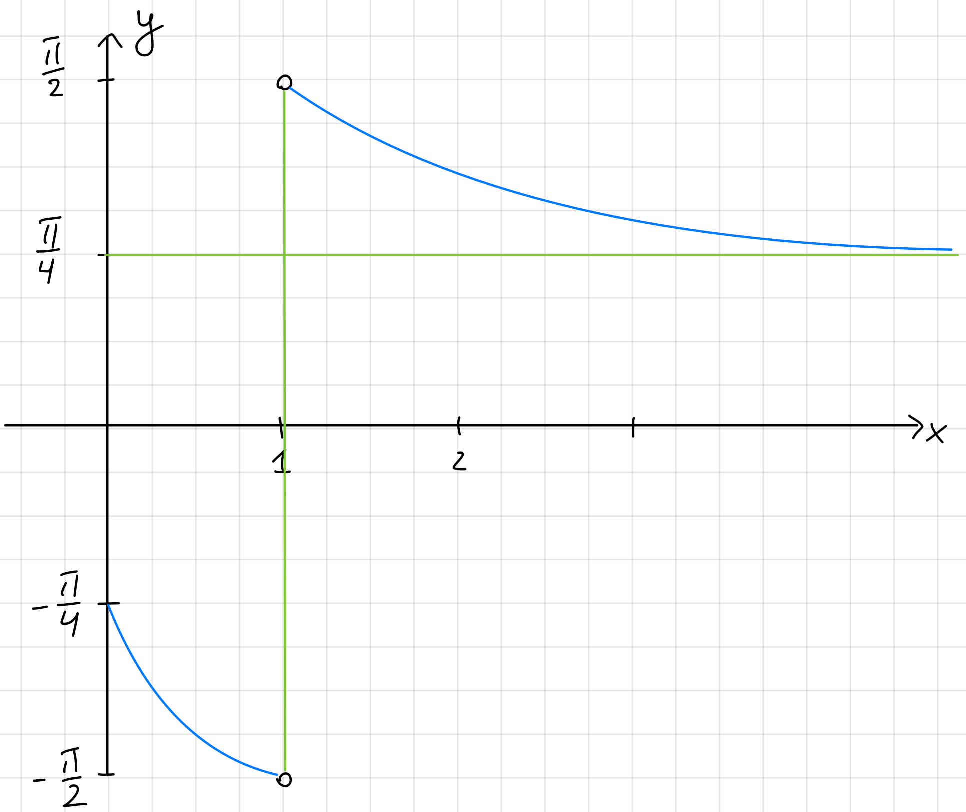
② $f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad S(0; -\frac{\pi}{4})$

④ Nullstellen: $x_0 = 0$ einzige Nullstelle

⑤ Asymptote: $y = \frac{\pi}{4}$ für $x \to \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \arctan\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) =$

$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$



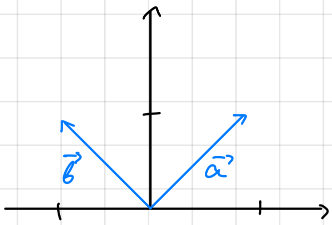
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \alpha = 90^\circ, \quad \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\alpha = \arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

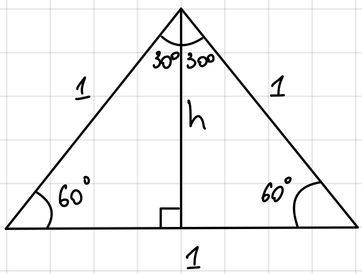
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 1 = 0 \longrightarrow \alpha = 90^\circ$

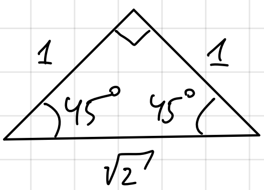
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$



$\sin(60^\circ) = h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$



$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\angle = \arccos\left(\frac{1+0+4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}\right) = 24{,}09^\circ$$

$\angle ASB$ – ?

$A(4;6;0) \quad S(2;4;6) \quad B(0;7;0)$

$$\vec{SA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{SB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\angle = \arccos\left(\frac{2\cdot(-2)+2\cdot 3+6\cdot 6}{\sqrt{2^2+2^2+6^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+6^2}}\right) = 35.08^\circ$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -4t \\ 4t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{matrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4k \\ 4k \\ k \end{pmatrix}$$

$$y = 4z$$

$$3x + 8z + 4z = 0$$

$$x = \frac{-12z}{3} = -4z$$

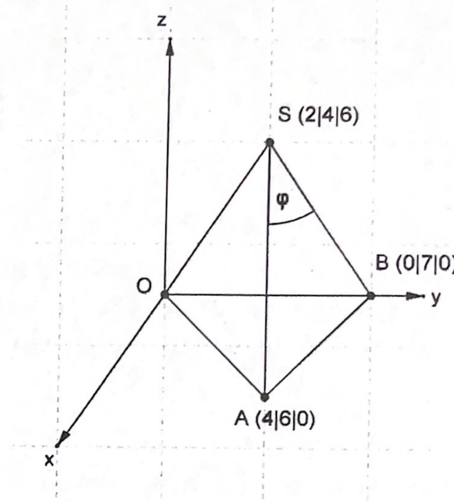
Für das Skalarprodukt existiert eine **Koordinatenform**. Es gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

bzw. allgemein

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k.$$

Die Koordinatenform des Skalarproduktes ermöglicht es nun, die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren aus ihren Koordinaten zu berechnen.

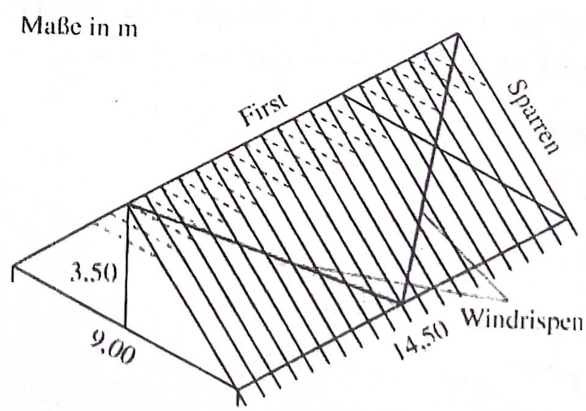


Übungen

1. Gegeben ist der Tetraeder OABS. Berechnen Sie den Winkel φ.
2. Bestimmen Sie alle Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Hausaufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g durch die Punkte $A\ (2|-3|1)$ und $B\ (10|5|15)$. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte der Geraden g, die von A den Abstand 9 haben.
   [zur Kontrolle: Einer der Punkte hat die Koordinaten $P(6|1|8)$].
2. Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{a} - r \cdot \vec{b}\ \perp\ \vec{b}$ ist.
   Interpretieren Sie die Lage der Vektoren geometrisch.
3. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Punkte $A\ (-4|8),\ B\ (5|-4)$ und $C\ (7|10)$. Bestimmen Sie den **Fußpunkt** F der Höhe h_c. [Unter dem Fußpunkt versteht man den Schnittpunkt des Lotes von C auf die Strecke AB.]
4. Die nebenstehende Grafik zeigt die Anordnung der Balken eines Daches.
   a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie die Lage eines Sparrens und einer Windrispe durch einen Vektor.
   b) Berechnen Sie die Länge einer Windrispe und die Größe des Winkels zwischen Sparren und Windrispe.



$A(2;-3;1) \quad B(10;5;15)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{A} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 9$$

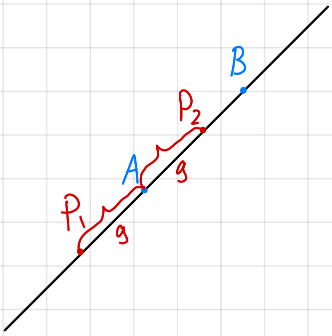
$$\sqrt{r^2}\sqrt{4^2+4^2+7^2} = 9$$

$$9\sqrt{r^2} = 9$$

$$r = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - r\cdot\vec{b} \perp \vec{b}$$

$$(a_1 - r b_1)\cdot b_1 + (a_2 - r b_2)\cdot b_2 + (a_3 - r b_3)\cdot b_3 = 0$$

$$a_1 b_1 - r b_1^2 + a_2 b_2 - r b_2^2 + a_3 b_3 - r b_3^2 = 0$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = r b_1^2 + r b_2^2 + r b_3^2$$

$$r = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = 2$$

Name:	
Klasse:	Datum:

Arbeitsblatt
Mathematik

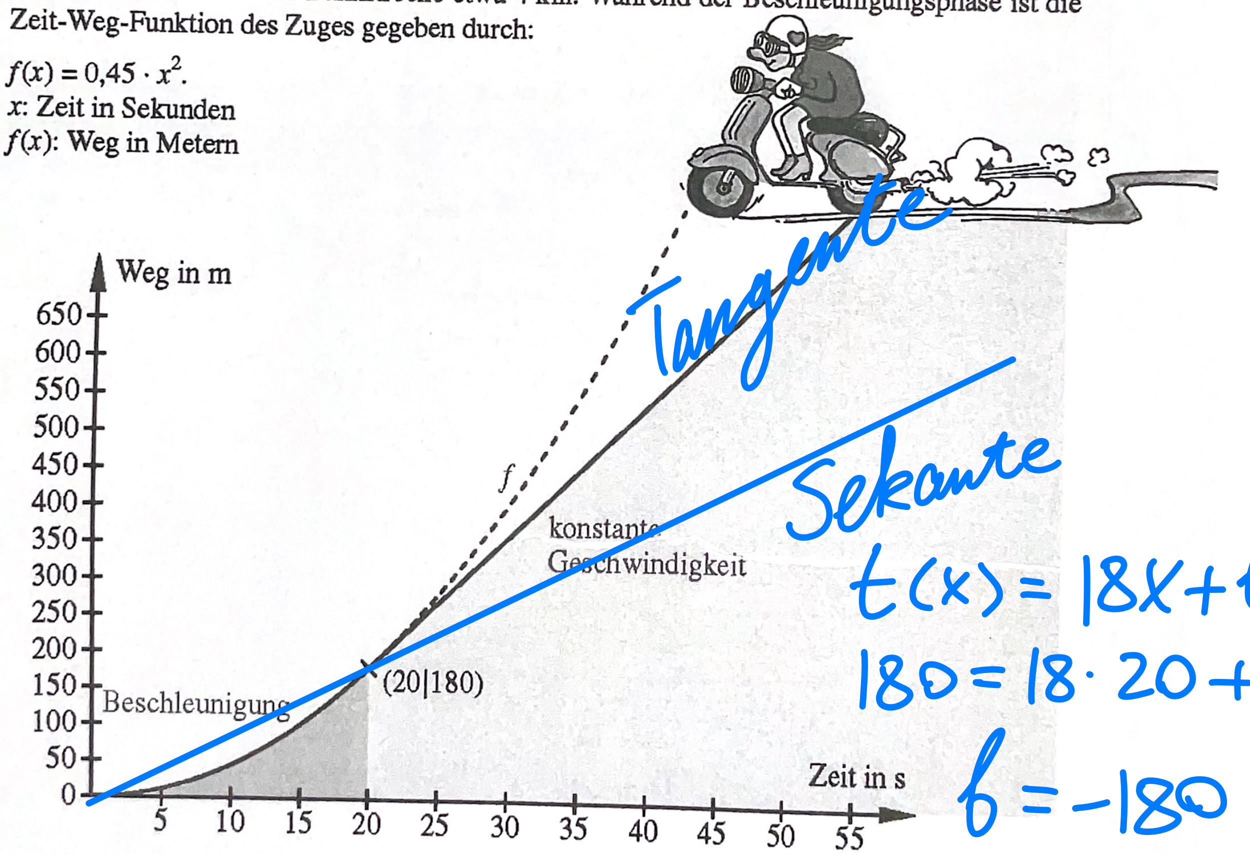
Ableitung und lokale Änderungsrate

Von mittleren zu lokalen Änderungen

Auftrag Noch einmal winken

Jessika hat ihren Freund zur Regionalbahn gebracht. Der Zug setzt sich in Bewegung und Jessika steigt auf ihren Roller. „Ob ich ihm an der Schranke noch zuwinken kann?"
Schätzen Sie anhand der folgenden Angaben, ob Jessika eine Chance hat:
Sie braucht in der Regel ca. 4 Minuten bis zur Schranke. Der Zug hat eine Beschleunigungsphase von 20 Sekunden. Danach fährt er mit gleichmäßiger Geschwindigkeit weiter. Bis zur Schranke sind es auf der Bahnstrecke etwa 4 km. Während der Beschleunigungsphase ist die Zeit-Weg-Funktion des Zuges gegeben durch:

$f(x) = 0{,}45 \cdot x^2$.
x: Zeit in Sekunden
$f(x)$: Weg in Metern

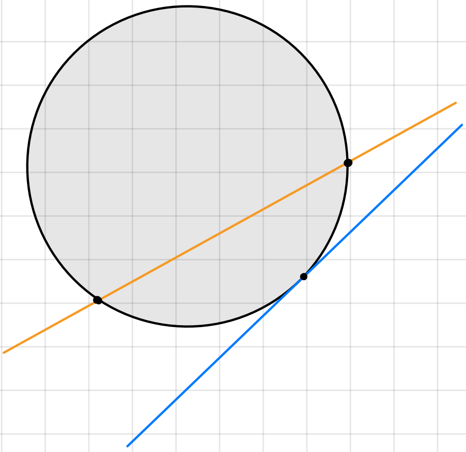


$t(x) = 18x + b$
$180 = 18 \cdot 20 + b$
$b = -180$

Viola: „In 20 Sekunden legt der Zug 180 m zurück, dann fährt er also mit einer Geschwindigkeit von 9 $\frac{m}{s}$. Das entspricht ca. 32 $\frac{km}{h}$. Er erreicht die Schranke folglich nach ca. $\frac{4}{32}$ Stunden. Das sind ca. 7 Minuten. Voilà, das schafft sie locker!"

Begründen Sie, warum diese Schätzung sehr ungenau ist und sich Jessika darauf lieber nicht verlassen sollte.
Besimmen Sie die Geschwindigkeit, die der Zug nach 20 Sekunden erreicht, genauer und lösen Sie Jessikas Problem.

TIPP: Um die Durchschnittsgeschwindigkeit zu bestimmen, berechnet Viola den *Differenzenquotienten*: $\frac{\text{Differenz der } y\text{-Werte}}{\text{Differenz der } x\text{-Werte}}$



06.02.25

Tangente - Momentangeschwindigkeit

Sekante - Durchnittlich

sch

$$f(x) = 0{,}45x^2$$

$$\lim_{x \to 20} \frac{0{,}45x^2 - 180}{x - 20} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 20} (0{,}45x + 9) = 18$$

$$\frac{f(x) - f(20)}{x - 20}$$ Differenzenquotient

$$\lim_{x \to 20} \frac{f(x) - f(20)}{x - 20}$$ Ableitung / Differenzialquotient

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ $\frac{df}{dx}$ df, dx sind Differenziale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}45(20+h)^2 - 0{,}45 \cdot 20^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}45(400 + 40h + h^2 - 400)}{h} = 0{,}45 \cdot (40 + 0) =$$

$$= 18$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2) = 3x_0^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \dots = \cos(x)$$

10.02.2025

10:20 Uhr 18°C Minute 0
10:30 Uhr 20°C Minute 10

$$\frac{20-18}{10-0} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \frac{°C}{min}$$

Differenzenquotient

Zwischen 10:20 Uhr und 10:30 Uhr ändert sich die Temperatur um 0,2°C pro Minute.

10:35 Uhr 21°C

10:00 Uhr 14°C

$f = \frac{1}{2}x^2 - 4$

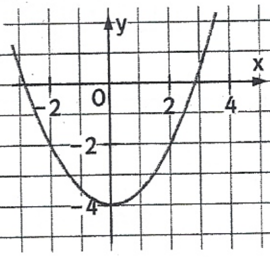
$s(t) = m \cdot t + b$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1{,}9) - f(-2)}{-1{,}9 + 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-1{,}9)^2 \cancel{-4} - \frac{1}{2}(-2)^2 \cancel{+4}}{0{,}1} = -\frac{39}{20} = -1{,}95$

Mittlere Änderungsrate – Differenzenquotient

1 Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ rechnerisch, in Teilaufgabe a) auch grafisch

a) im Intervall $[0; 2]$



b) im Intervall $[-1; 1]$

c) im Intervall $[-2; -1{,}9]$

Ergebnis: ______

Ergebnis: ______

Ergebnis: $-1{,}95$

2 Grüner Tee wird mit 70 °C heißem Wasser aufgebrüht. Beim Abkühlen wurde die Temperatur gemessen.

Zeit t (in min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Temperatur T (in °C)	70,0	60,6	52,8	46,7	41,5	37,3	34,0	31,3	29,3	27,5

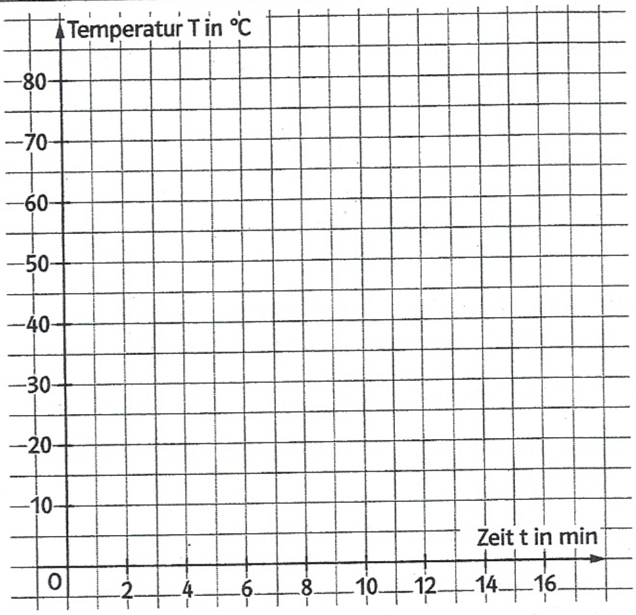
a) Zeichnen Sie den Graphen.

b) Die mittlere Änderungsrate der Funktion *Zeit t → Temperatur T* für den gesamten Messzeitraum beträgt $\frac{\quad}{\quad} \approx$ ______ (in $\frac{°C}{min}$).

c) Die mittlere Änderungsrate ist negativ, weil

______.

d) Bestimmen Sie die mittleren Änderungsraten für die ersten und letzten zwei Minuten rechnerisch und mithilfe des Graphen.

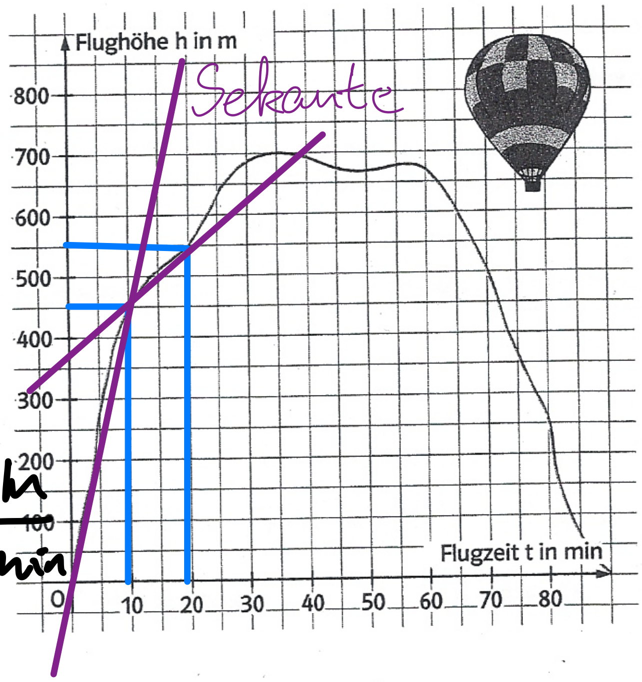


3 Bei der Fahrt mit einem Heißluftballon wird die aktuelle Höhe aufgezeichnet.

a) Die mittlere Steiggeschwindigkeit in den ersten 10 Minuten beträgt $45 \frac{m}{min}$. Zwischen Minute 10 und Minute 20 beträgt die mittlere Steiggeschwindigkeit $10 \frac{m}{min}$. Der Ballon steigt also in dieser zweiten Zeitspanne ______.

b) Berechnen Sie die durchschnittlichen Sinkgeschwindigkeiten von Minute 65 bis Minute 70 und von Minute 70 bis Minute 90.

$$\frac{0-500}{90-70} = \frac{-500}{20} = -25 \frac{m}{min}$$



$S(10;450)$ $P(20;550)$

$s(t) = m \cdot t + b = 10t + b = 10t + 350$

$m = \frac{550-450}{20-10} = \frac{100}{10} = 10$

$450 = 10 \cdot 10 + b$

$b = 350$

$f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2-(2+h)}{h(2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2} = f'(2)$

11.02.25

1 Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 4x^2;\; x_0 = -1$

1. Schritt: Differenzenquotient aufstellen $\qquad \frac{f(\;\;+h)-f(\;\;)}{h} = \frac{4\cdot(\;\;+h)^2 - 4\cdot(\;\;)^2}{h}$

2. Schritt: Differenzenquotient umformen $\qquad = \frac{\_\_\_\_}{h} = \frac{\_\_\_\_}{h}$

$= \frac{\_\_\_\_}{h} = \frac{\_\_\_\_}{h}$

3. Schritt: Grenzwert für $h \to 0$ bestimmen $\qquad = \_\_\_\_ \to \_\_\_\_$ für $h \to 0$

Man erhält für die Ableitung f'(____) = ____.

b) $f(x) = \frac{2}{x};\; x_0 = 2$

Man erhält für die Ableitung f'(____) = ____.

c) $f(x) = -x^2 - 2;\; x_0 = -2$

Man erhält für die Ableitung f'(____) = ____.

2 Wird eine Feuerwerksrakete senkrecht gestartet, so gilt für ihre Höhe a (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) näherungsweise: $a(t) = -5t^2 + 40t$. $= -5(t^2 - 8t + 16) + 80 = -5(t-4)^2 + 80$

a) Die mittlere Änderungsrate von a(t) im Zeitintervall [0; 2] ist die Durchschnitts geschwindigkeit der Rakete. Die lokale Änderungsrate a'(t) der Flughöhe entspricht der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Rakete beträgt in den ersten 2 Sekunden ________ und in den nächsten 2 Sekunden ________.

c) Die Momentangeschwindigkeit der Rakete nach 2 Sekunden beträgt ________.

3 Ordnen Sie jedem Graphen die passende Funktionsgleichung zu. An welchen Stellen sind diese Funktionen nicht differenzierbar?

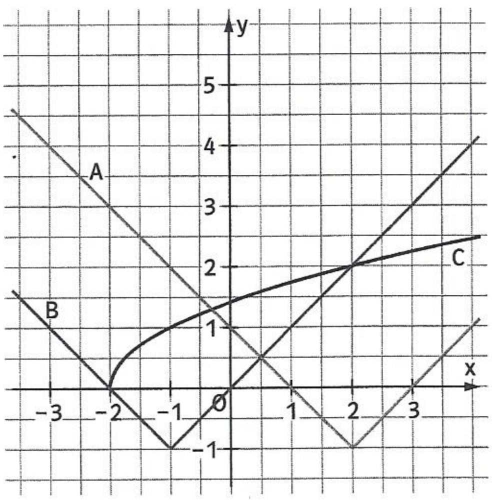


Schaubild	Funktion	Nicht differenzierbar in
A	$\lvert x-2\rvert - 1$	$x_0 = 2$
B	$\lvert x+1\rvert - 1$	$x_0 = -1$
C	$\sqrt{x+2}$	$x_0 = -2$

$f(x) = |x + 2| - 1$ $\qquad g(x) = |x - 2| - 1$ $\qquad h(x) = \sqrt{x - 2}$

$i(x) = \sqrt{x + 2}$ $\qquad k(x) = |x + 1| - 1$

$x^{0,5} = 0{,}5\, x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{a(2)-a(0)}{2-0} = \frac{60-0}{2-0} = 30$$

$I = [2;4]$

$$\frac{a(4)-a(2)}{4-2} = \frac{80-60}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{0+} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

f ist in R^+ differenzierbar

$f(x) = |x|$

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0\pm} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0\pm} \frac{|h|}{h}$ existiert nicht, weil:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

$f'(0+) = 1$

$f'(0-) = -1$

$f'(0)$ nicht definiert

Skalarprodukt

Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Länge des zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeiles. Der Betrag wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. allgemein in $\mathbb{R}^n$ gelten für den Betrag folgende Darstellungen $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$. (Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras)

Für den Betrag gelten folgende Eigenschaften

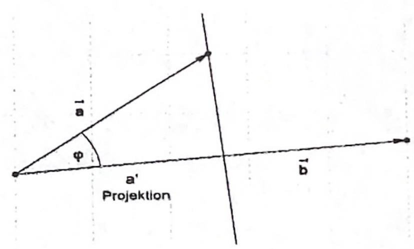
1. $|\vec{a}| \geq 0$, insbesondere $|\vec{0}| = 0$.
2. $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecks-Ungleichung , vgl. auch Analysis)

<u>Beispiel</u>: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$.

Übungen

1. Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P(-6|-2|3)$ und $Q(9|-2|11)$.
2. In welchen Fällen gilt für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ die Gleichung $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
3. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate p_3 so, dass $P(5|0|p_3)$ vom Punkt $Q(4|-2|5)$ den Abstand 3 hat.
4. Welche besondere Form hat das Dreieck $A(7|0|-1)$, $B(5|-3|-1)$ und $C(4|0|1)$?

Unter dem **Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$** versteht man den kleineren Winkel zwischen den Pfeilen der Vektoren. In dem folgenden Bild ist a' die **Projektion** des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$. Für die Projektion gilt im Fall $0 < \varphi < 90°$: $a' \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. Das letzte Produkt wird sich für unsere Fragestellungen in diesem Kapital als nützlich erweisen.

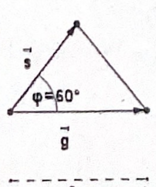


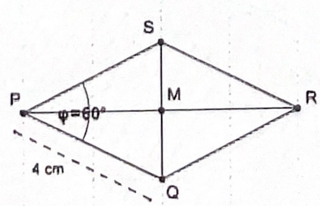
Definition und Satz

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, so heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} \;:=\; |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ das **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$. (Bemerkung: Die Bezeichnung Skalarprodukt erinnert daran, dass dieses Produkt kein Vektor, sondern ein Skalar, also hier eine reelle Zahl, ist.

Für $0° \leq \varphi < 90°$ ist das Skalarprodukt positiv, für $\varphi = 90°$ ist das Skalarprodukt null und für $90° < \varphi \leq 180°$ ist das Skalarprodukt negativ. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ $(\neq \vec{0})$ heißen orthogonal (bzw. senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist, wir schreiben $\vec{a} \perp \vec{b} \;:\Leftrightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Übungen

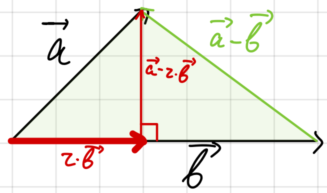




1. Bestimmen Sie $\vec{g} \cdot \vec{s}$ für das Dreieck im nebenstehenden Bild.
2. Bestimmen Sie die folgenden Skalarprodukte für die Raute im nebenstehenden Bild:
   $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MQ}$, $\quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS}$, $\quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$
3. Überlegen Sie sich für eigene Vektoren die entsprechenden Skalarprodukte.

12.02.2025

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$



Suche $z \in \mathbb{R}$

$\vec{a} - z \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$

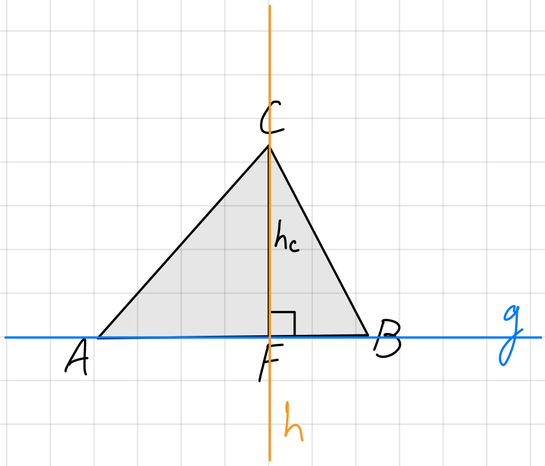
$(\vec{a} - z \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \bullet \vec{b} - z \cdot \vec{b} \bullet \vec{b} = 0$

$60 - z \cdot 30 = 0$

$z = 2$

$A(-4;8) \quad B(5;-4) \quad C(7;10)$



$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$

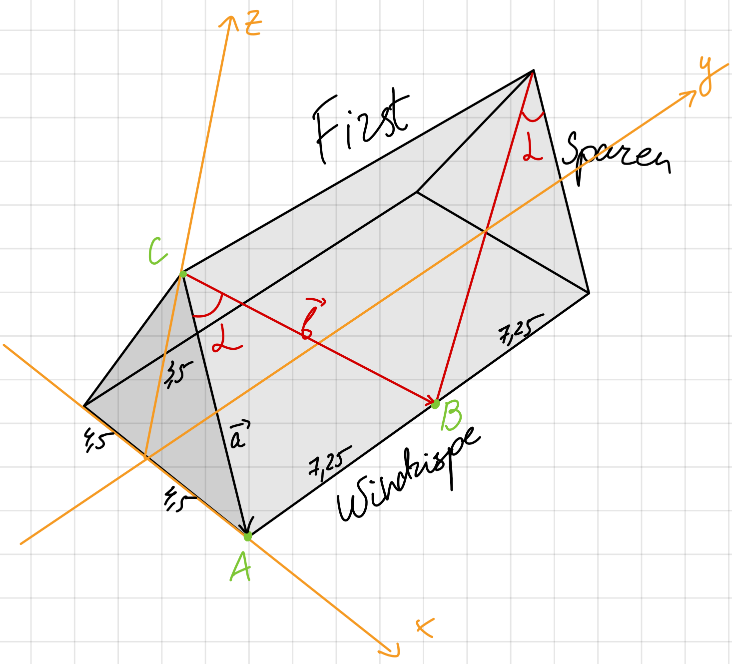
$\begin{array}{rcl|l} 9z - 12s &=& 11 & (4) \\ -12z - 9s &=& 2 & (3) \\ \hline 9z - 12s &=& 11 & \\ -75s &=& 50 & \end{array}$

$z = \frac{1}{3}$

$s = -\frac{2}{3}$

$$\vec{x}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad F(-1;4)$$

$$h = |\overrightarrow{FC}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 10$$



$$A = (4,5;0;0) \qquad B = (4,5;7,25;0) \qquad C = (0;0;3,5)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 7,25 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 20,25 + 0 + 12,25 = 32,5$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{20,25 + 0 + 12,5} = 5,7$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{20,25 + 52,5625 + 12,25} = 9,22$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{32,5}{5,7 + 9,22}\right) = 51,8^\circ$$

Gerade: $g: \vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ Parameterform

$ax + by = c$ Koordinatenform

Ebene: $E: \vec{x}(r,s) = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ Parameterform

$ax + by + cz = d$ Koordinatenform

①

$A(1; -1; 1) \quad B(1,5; 1; 0) \quad C(0; 1; 1)$

$$E: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② $E: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A(7; 5; -3) \notin E$

$B(7; 1; 8) \in E$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr|} r & + & 2s & = & 5 \\ 3r & - & s & = & 5 \\ 5r & + & s & = & -4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} r & + & 2s & = & 5 \\ & & -7s & = & -10 \\ & & -9s & = & -29 \end{array}$$

$\mathbb{L} = \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r + 2s &= 5 \\ 3r - s &= 1 \\ 5r + s &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r + 2s &= 5 \\ -7s &= -14 \\ -9s &= -18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= 1 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(1,2)\}$$

$$E: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 + 2r + 3$$

$$y = 1 + r \qquad \Rightarrow r = y - 1$$

$$z = 1 + \frac{1}{2}s \qquad \Rightarrow s = 2z - 2$$

$$x = 1 + 2y - 2 + 6z - 6 = 2y + 6z - 7$$

$$x - 2y - 6z = -7$$

1. Gegeben ist die Ebene $E \equiv \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Liegen die Punkte $A(8|3|14)$, $B(1|1|0)$ und $C(4|0|11)$ in der Ebene E?
   Bestimmen Sie eine Zahl p so, dass der Punkt $P(0|\,p|\,p)$ in der Ebene liegt.

2. Die Punkte $A(0|0|4), B(5|0|0)$ und $C(0|4|0)$ legen eine Ebene E fest. Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie einen Ausschnitt der Ebene E. Geben Sie eine Parametergleichung von E an.

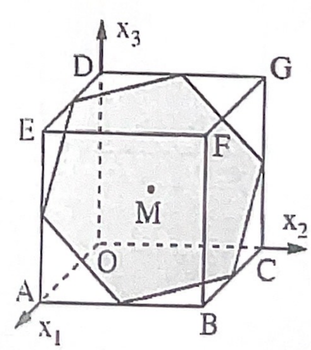
3. Gegeben sind drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ihre Ortsvektoren sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. Bestimmen Sie welche Punkte der Ebene $E \equiv \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$ festgelegt werden, durch die Bedingung
   a) $r + s = 1$ b) $r - s = 0$ c) $0 \le r \le 1$ d) $0 \le r \le 1 \;\wedge\; 0 \le s \le 1$

4. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der x_2x_3 – Ebene.

5. Bestimmen Sie zu der Ebene E eine Gleichung in Normalenform
   a) $E \equiv 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 10$ b) $E \equiv x_2 = -5$

6. Untersuchen Sie, ob die Gerade $g \equiv \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zu $E \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist.

7. Betrachten Sie die Ebene, durch den Mittelpunkt des Würfels, die orthogonal zur Diagonalen OF ist. Stellen Sie die Ebene in Normalenform auf. Begründen Sie, dass die Ebene die Kanten des Würfels, die sie schneidet, jeweils halbiert.



13.02.2025

Функция	Производная	
$a \cdot f(x)\ (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot f'(x)$	
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$	Summenregel
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Produktregel
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

1. $x' = 1$
2. $C' = 0$
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
4. $(u + v)' = u' + v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$
   $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
13. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
15. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
18. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

$$\left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n \cdot \left(f(x)\right)^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$(\sin^4(x))' = 4 \cdot \sin^3(x) \cdot \cos(x)$$

$$\left(f(x)+g(h)\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(h))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(h)}{h} =$$

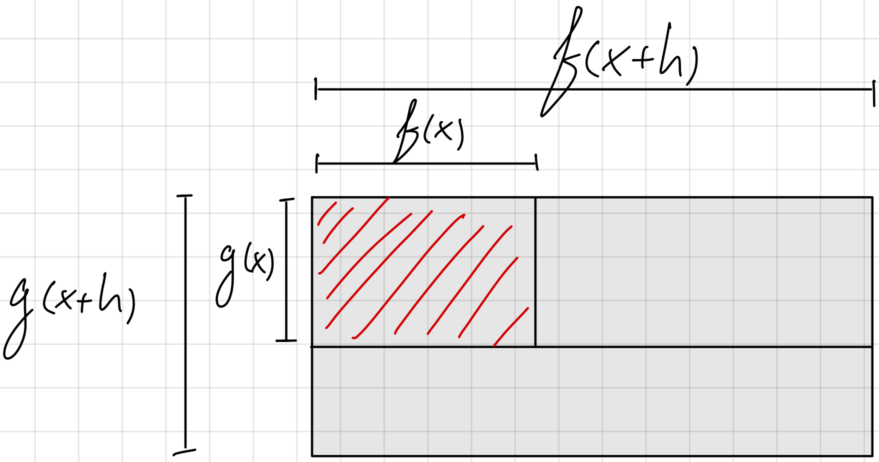
$$= f'(x)+g'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\cdot\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right)\cdot f(x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x+h) =$$

$$= f'(x)g(x) + g(x)\cdot f'(x)$$



$$f(x) = (x^2+1)\cdot e^x$$

$$f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2e^x + e^x = e^x(2x+x^2+1) =$$

$$= e^x(x+1)^2$$

$$e^x(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(x) = 5x(1-x)^2$$

$$f'(x) = 5(1-x)^2 - 2\cdot 5x(1-x) = 5(1-x)(1-3x)$$

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2 =$$

$$= (x-1)(x+1)\,(2(x+1)\,+3(x-1))\,=$$

$$= (x-1)(x+1)^2(2x+2+3x-3) =$$

$$= (x-1)(x+1)^2(5x-1) \quad = 0$$

$x_1 = 1$ (einfach)

$x_2 = -1$ (doppelt)

$x_3 = 0{,}2$

17.02.25

Sei f dfb. und bijektiv, die Umkehrfunktion heiße $f^{-1}(x)$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$(f(g(x)))' = (f \circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$\sqrt{\sin(x^2-1)}$$

$$x \xrightarrow{f_1} x^2-1 \xrightarrow{f_2} \sin(x^2-1) \xrightarrow{f_3} \sqrt{\sin(x^2-1)}$$

$$f_3(f_2(f_1(x)))$$

$$f_1(x) = x^2-1$$

$$f_2(x) = \sin x$$

$$f_3(x) = \sqrt{x}$$

$$f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2-1)}} \cdot \cos(x^2-1) \cdot 2x =$$

$$= x \cdot \frac{\cos(x^2-1)}{\sqrt{\sin(x^2-1)}}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$(x^2)' = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2}}} = 2x$$

$$\left(f(x)\right)' = (e^x)' = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

$$\left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\left(\tan(x)\right)' = 1 + \tan^2(x)$$

Sei $f(x) = \tan(x)$ und $f^{-1}(x) = \arctan(x)$

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \cos^2(\arctan(x))$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\tan(\arctan(x))\right)^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x))^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x) = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$$(a^x)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$$

Zusammenfassung der wesentlichen Ableitungsregeln

Die vorkommenden Parameter c und k stehen für reelle Zahlen.
g und h sind differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen g' und h' bekannt sind.

Funktion $f(x)$	**Ableitung** $f'(x)$	**Bemerkung, Regel**
x	1	
x^2	$2x$	
x^3	$3x^2$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	
e^x	e^x	e ist die Eulersche Zahl
a^x	$\ln a \cdot a^x$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
c	0	Konstantenregel
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	Summenregel
$k \cdot g(x)$	$k \cdot g'(x)$	Faktorregel
$g(x) \cdot h(x)$	$g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$	Produktregel
$(g(x))^n$	$n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	Potenzregel
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	Quotientenregel
$h(g(x))$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

Übungen zur Differenzierbarkeit

1. Wie oft ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

   a. $f(x) = |x| - \sqrt{|x|}$ b. $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

2. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ folgender Funktionen:

   $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$ $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 4$ $f(x) = \left(\sqrt{x} + 2\right)^3$

   $f(x) = x + \sin(x)$ $f(x) = x^2 + \cos(x)$ $f(x) = 5 \cdot x^3 - \sin(x)$

3. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ ohne und mit der Produktregel:

   $f(x) = (1 + x) \cdot (1 - x)$ $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(1 - \sqrt{x}\right)$ $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + 3 \cdot x - 4\right)$

4. Leiten Sie aus der Produktregel für zwei Faktoren eine Regel für drei Faktoren her, sodass Sie $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ differenzieren können. Wenden Sie Ihre Regel auf folgende Funktionen an:

   $f(x) = \left(x^2 - 2 \cdot x\right) \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(x)$ $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

   Wie könnte man die zweite Funktion anders ableiten?

5. Differenzieren Sie mit Hilfe der Quotientenregel

   $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $f(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$ $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$

   $f(x) = \frac{1}{x \cdot \cos(x)}$ $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$

6. Differenzieren Sie mithilfe der Kettenregel

   $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$ $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ $f(x) = \cot\left(\frac{1}{x^2}\right)$

7. Ableitung der Umkehrfunktion

   $f(x) = \arccos(x)$ $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ $f(x) = \arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$

8. Untersuchen Sie, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist, und geben Sie in diesem Fall die Ableitung $f'(0)$ an (Benutzen Sie den Differenzenquotient).

   $$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x - x + 1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim\limits_{x \to 1\pm} f(x) = \frac{2}{0\pm} = \pm\infty$

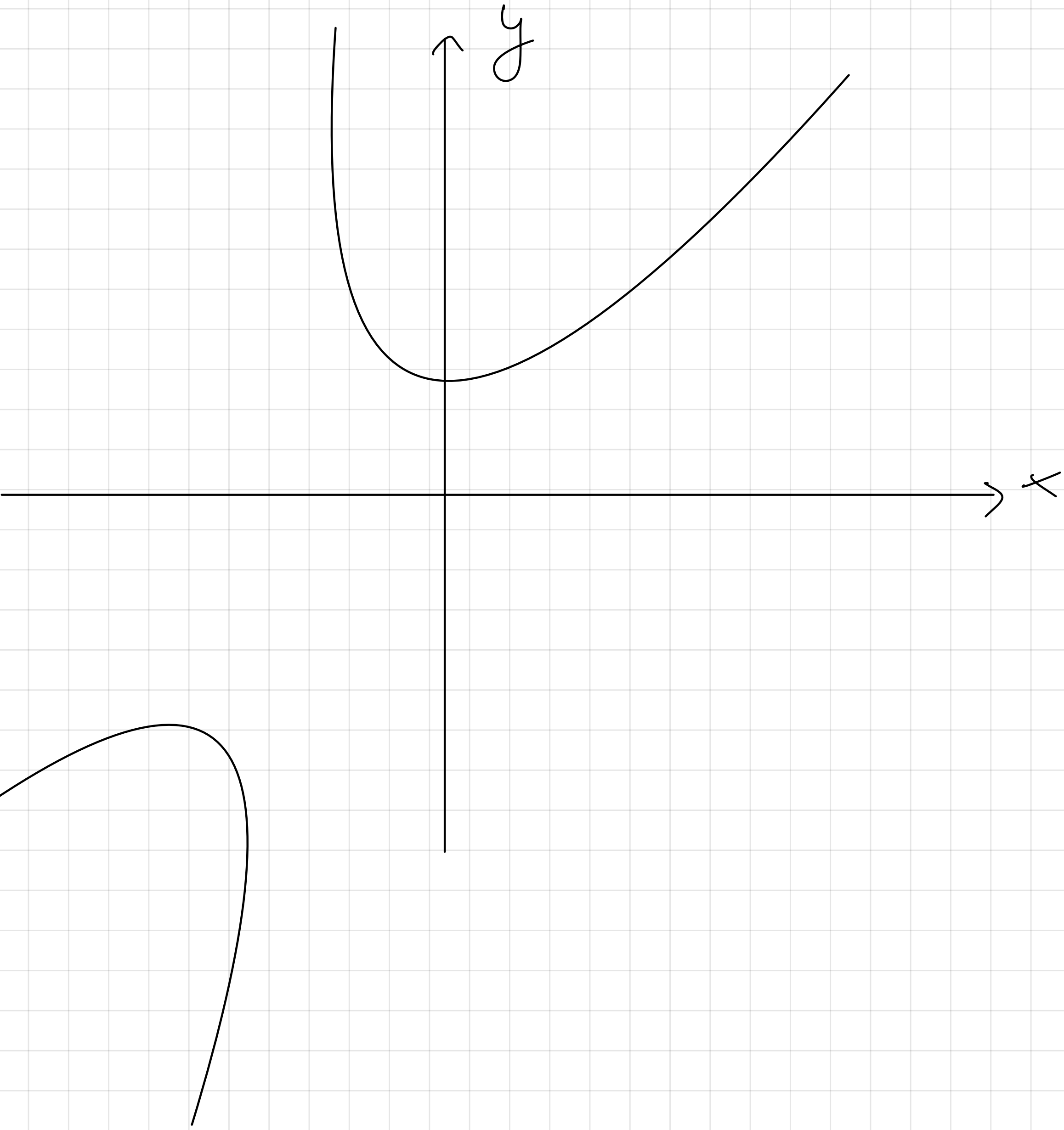
$S(0; 1)$

keine Nullstelle, weil x^2+1 irreduzibel

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 1 \\ -1 & - & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$\underbrace{1 \quad -1}_{\text{Asymptote}}$ 2 Rest

$y = x - 1$


y
x

19.02.2025

Gerade: $g: \vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ Parameterform

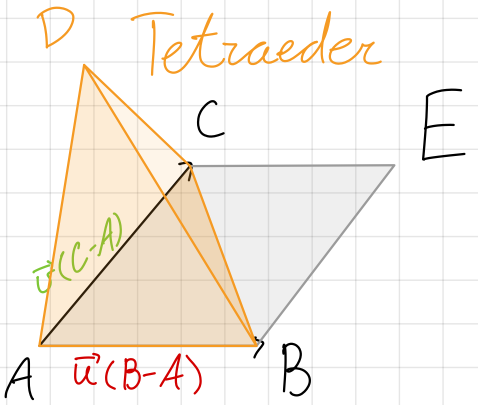
$ax + by = c$ Koordinatenform

Ebenen: $E: \vec{x}(r,s) = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ Parameterform

$\underline{a}\,\underline{x} + \underline{b}\underline{y} + \underline{c}\underline{z} = \underline{d}$ Koordinatenform

Koeffizienten

$E: \vec{x}(r,s) = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$



$A(1;1;1) \quad B(3;2;1) \quad C(-1;-1;-1) \quad D(1;0;1)$

$E: \vec{x}(r,s) = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2r - 2s = 0 \qquad r = 0$

$r - 2s = -1$ falsch

$-2s = 0 \qquad s = 0$

wegen $0 \neq -1$ ist $D \notin E_{ABC}$

$$E: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2r - 2s \\ 1 + r - 2s \\ 1 \quad - 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$1 - 2s = z$

$1 - z = 2s$

$\frac{1}{2} - \frac{z}{2} = s$

$1 + r - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right) = y$

$1 + r - 1 + z = y$

$r = y - z$

$1 + 2(y-z) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right) = x$

$1 + 2y - 2z - 1 + z - x = 0$

$-x + 2y - z = 0$

$x - 2y + z = 0$

$E: \; 2x - y + 3z = 6$

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

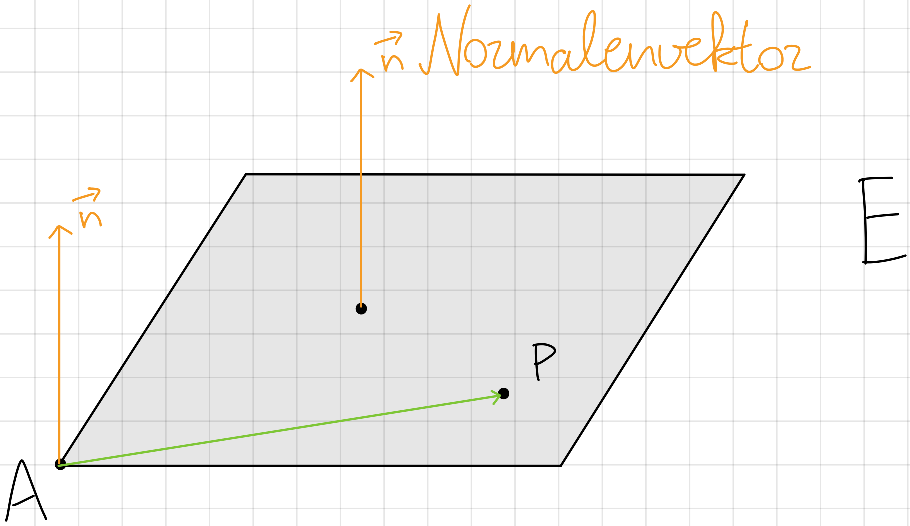
$$E: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$2x - y + 3z = 6$

$2x + 3z - 6 = y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z - 6 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2r + 3s - 6 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinaten $\longrightarrow$ Parameter



$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{n} &= d \end{aligned}\right\} \text{Normalenform}$$

$$P(4;1;3) \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 22$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 22 \qquad \text{Normalenform}$$

Normalenvektor

$$2x - y + 5z = 22 \qquad \text{Koordinatenform}$$

$$E: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \overset{\vec{u}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} + s \overset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{n} \perp E \iff \vec{n} \perp \vec{u} \overset{\text{und}}{\wedge} \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$n_1 + 2n_3 = 0$$
$$-5n_2 + 8n_3 = 0$$

unendlich viele

$$\text{Sei } n_3 = t \in \mathbb{R}$$
$$n_2 = \frac{8}{5} t$$
$$n_1 = -2t$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1{,}6\,t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -50 + 16 + 15 = -19$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = -19$$

$$-10x + 8y + 5z = -19$$

Übungen zur Differenzierbarkeit

1. Wie oft ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

   a. $f(x) = |x| - \sqrt{|x|}$ b. $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

2. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ folgender Funktionen:

   $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$ $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 4$ $f(x) = \left(\sqrt{x} + 2\right)^3$

   $f(x) = x + \sin(x)$ $f(x) = x^2 + \cos(x)$ $f(x) = 5 \cdot x^3 - \sin(x)$

3. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ ohne und mit der Produktregel:

   $f(x) = (1 + x) \cdot (1 - x)$ $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(1 - \sqrt{x}\right)$ $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + 3 \cdot x - 4\right)$

4. Leiten Sie aus der Produktregel für zwei Faktoren eine Regel für drei Faktoren her, sodass Sie $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ differenzieren können. Wenden Sie Ihre Regel auf folgende Funktionen an:

   $f(x) = \left(x^2 - 2 \cdot x\right) \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(x)$ $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

   Wie könnte man die zweite Funktion anders ableiten?

5. Differenzieren Sie mit Hilfe der Quotientenregel

   $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $f(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$ $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$

   $f(x) = \frac{1}{x \cdot \cos(x)}$ $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$

6. Differenzieren Sie mithilfe der Kettenregel

   $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$ $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ $f(x) = \cot\left(\frac{1}{x^2}\right)$

7. Ableitung der Umkehrfunktion

   $f(x) = \arccos(x)$ $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ $f(x) = \arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$

8. Untersuchen Sie, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist, und geben Sie in diesem Fall die Ableitung $f'(0)$ an (Benutzen Sie den Differenzenquotient).

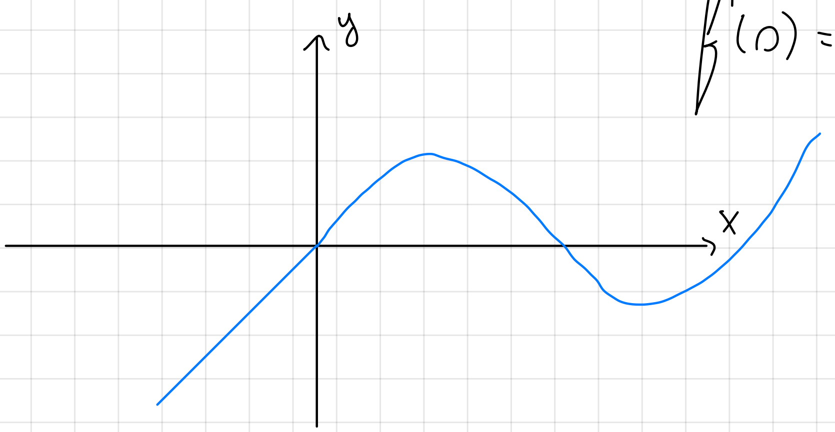
   $$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

24.02.25

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = 1$$



$$f''(x) = \begin{cases} -\sin(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} -\cos(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0$$

$f'''(0)$ ex. nicht, weil

$$f'''(0-) = 0 \neq -1 = f'''(0+)$$

f ist zweimal stetig-differenzierbar

$$f \in C^2(\mathbb{R}) \qquad C^\infty(\mathbb{R})$$

$A \Rightarrow B$

aus A folgt B

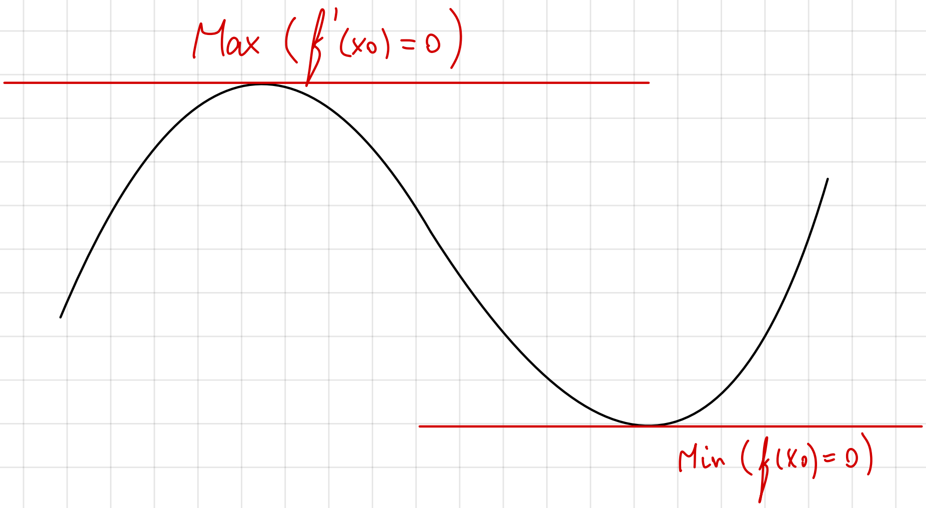
A hinreichend für B

B notwendig für A

Kaffee => gemahlene Bohnen
gemahlene Bohnen $\not\Rightarrow$ Kaffee
heißes Wasser, gemahlene Bohnen => Kaffe

n teilbar durch 6 hinreichend für n teilbar durch 3
n teilbar durch 3 notwendig für n teilbar durch 6

Extr(emum): Maximum | Minimum



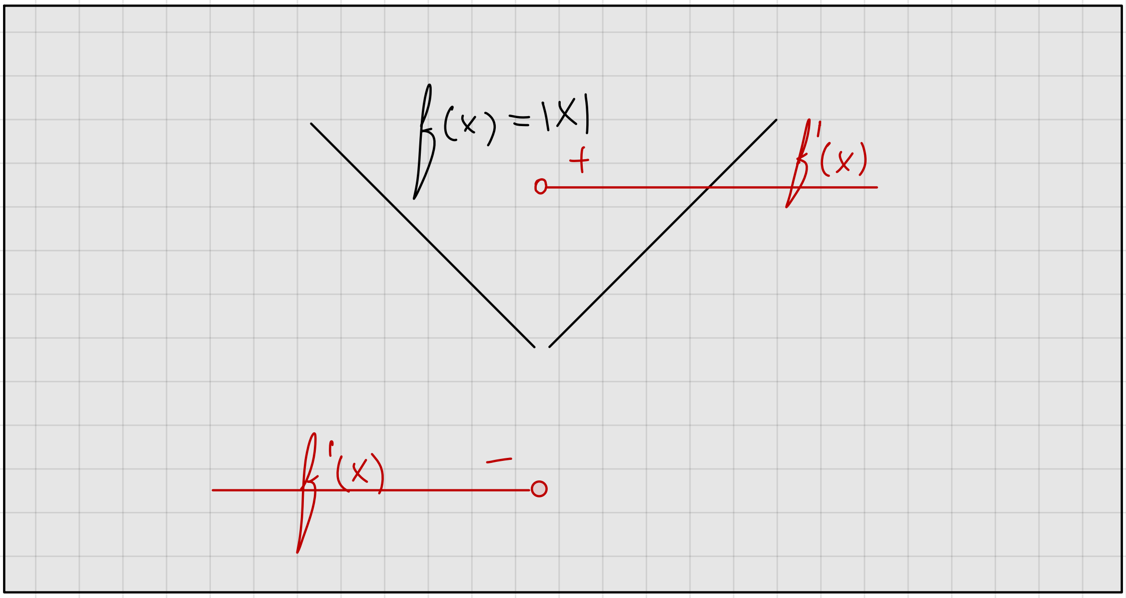
x_0 Extr. $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ Extr.

f' hat in x_0 einen VZW $\Rightarrow x_0$ Extr.

$- \to + \Rightarrow x_0$ Min

$+ \to - \Rightarrow x_0$ Max



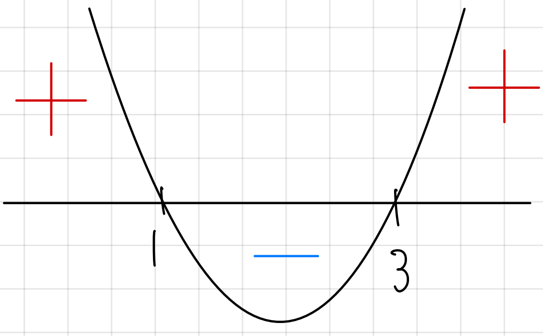
$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)} \qquad x = 1$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left((x+1)^2\right)' - (x+1)^2(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)(2x-2-x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$$



f' hat in $x_1 = -1$ einen $(+|-)$ VZW.

$x_1 = -1$ Max

($x_2 = 3$ Min analog)

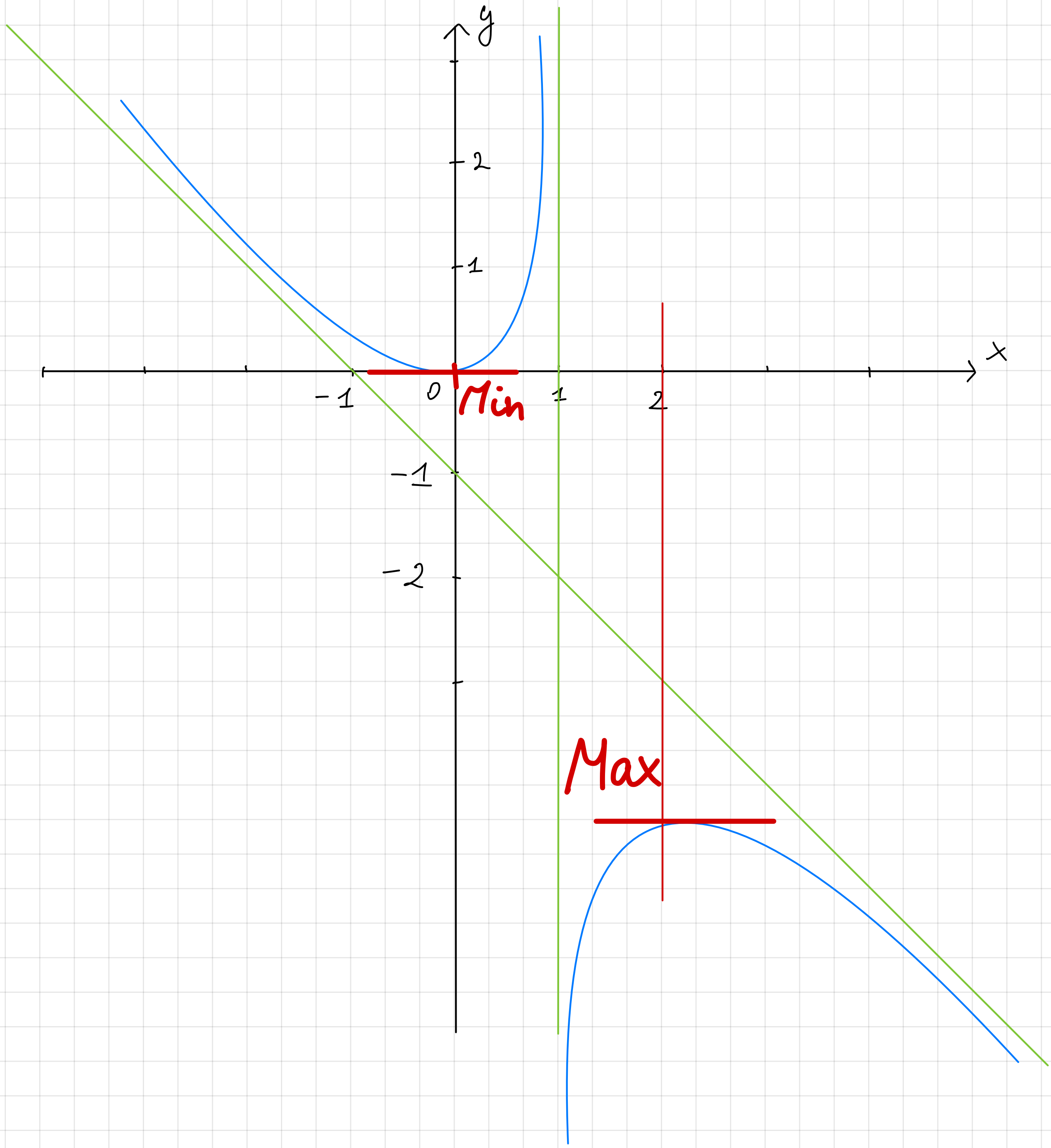
25.02.2025

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} = -\frac{x^2}{x-1}$$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. Nullstelle: $N = \{0\}$ doppelte
3. $S(0;0)$
4. $\lim\limits_{x \to 1^\pm} f(x) = \frac{1}{0^\mp} = \mp\infty$ $\quad x = 1$ Polstelle mit VZW
5. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & - & -1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

Asymptote: $y = -x - 1$



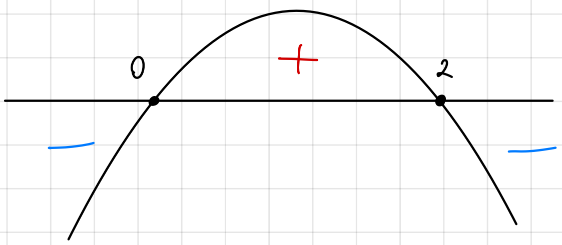
y
x
2
1
-1
-2
0
-1
1
2
Min
Max

$$f'(x) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-2x+x)}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

notwendige Bedingung:

$$f'(x)=0 \iff x_1 = 0 \lor x_2 = 2$$

hinreichende Bedingung:



in $x_1 = 0$ hat f' einen (−|+) VZW, d.h. Min Tiefpunkt

in $x_2 = 0$ hat f' einen (+|−) VZW, d.h. Max Hochpunkt

T(0;0)

H(2;−4)

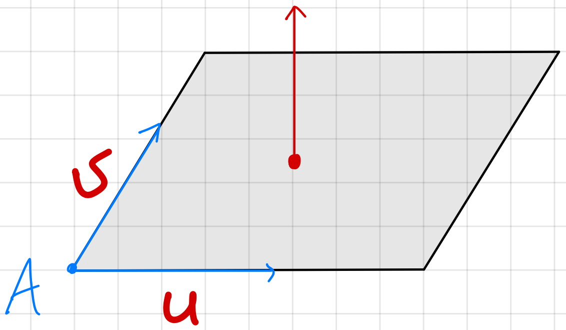
$E: x+2y+2z=3$ Koordinatenform 26.02.2025

Normalenform $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3$

Hesse-Normalenform (HNF) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$

Parameterform: $E: \vec{x}(r,s)=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=3$

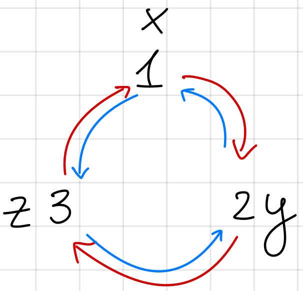
$N \cdot$ (jeder Punkt der Ebene) $=3$

Definition: Seien $\vec{u},\vec{v}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\vec{u}\times\vec{v}$ das Vektorprodukt genau dann, wenn gilt:

1. $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$, $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$
2. $\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}$ bilden ein Rechtssystem
3. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\alpha$, $\alpha\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$ Winkel

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$

①



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

x : 23 - 32

y : 31 - 13

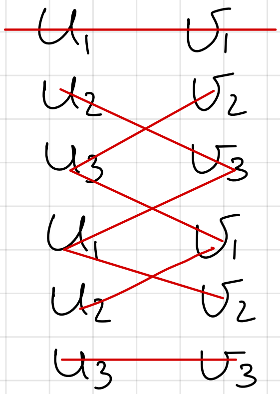
z : 12 - 21

②

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \vec{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \vec{e}_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③



$\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1 - 0\cdot 0\\ 0\cdot(-2) + 2\cdot 1\\ -2\cdot 0 \;+ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-2} & \cancel{-2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{array} = \begin{pmatrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{2}\end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -2 & -2 \\ \vec{e}_2 & 1 & 0 \\ \vec{e}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1 \cdot 1 - \vec{e}_2(-2) + \vec{e}_2 \cdot 2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{E}: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -21 + 6 = -15$$

$$-3x + 6y - 3z = -15$$

$$x - 2y + z = 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 5$$

$$E: \vec{x}(r,s) = \vec{a} + r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1$$

$$r + s = 1$$

$$r = 1 - s$$

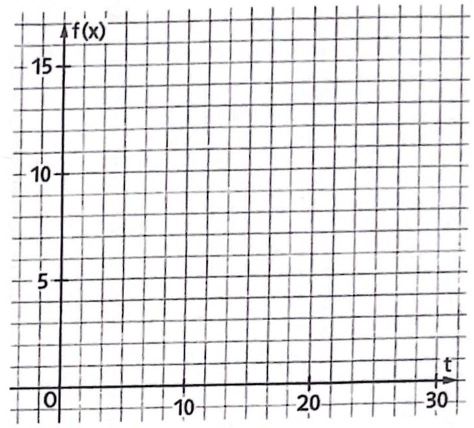
$$\vec{a} + (1-s)\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v} =$$

$$= \vec{a} + \vec{u} - s\cdot\vec{u} \cdot s\cdot\vec{v} =$$

$$= \vec{a} + \vec{u} + s(\vec{v} - \vec{u})$$

Gerade

1 Die Funktion f mit $f(t) = -0{,}006t^3 + 0{,}18t^2 - 1{,}35t + 15$; $0 \le t \le 25$, beschreibt die Dicke der Eisdecke eines zugefrorenen Sees im Monat Februar, t in Tagen und f(t) in cm.



a) Erstellen Sie eine Wertetabelle und skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f.

t	0	5	10	15	20	25
f(t)						

b) Das globale Maximum der Funktion ist ________, es wird erreicht am: __________________________.

c) Geben Sie die Extrempunkte der Funktion an und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

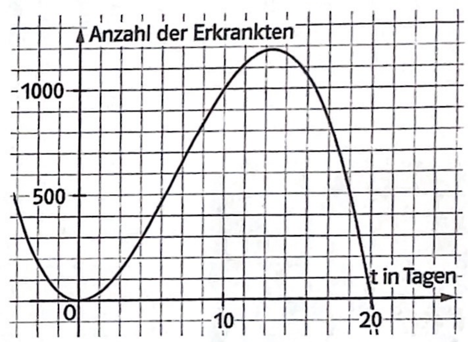
____

____

d) Das Betreten der Eisdecke ist erlaubt, wenn die Dicke mindestens 12 cm beträgt. Untersuchen Sie, wann dies der Fall ist. ____

e) Weshalb ist die Funktion f für Werte von $t > 25$ nicht mehr geeignet, die Dicke der Eisdecke zu beschreiben? ____

2 Das Schaubild zeigt die Entwicklung der Grippeinfizierten in einer Kleinstadt. Auf der Rechtsachse sind die Tage seit Beginn der Infektion abgetragen, auf der Hochachse die Anzahl der Erkrankten.



a) Beschreiben Sie den Verlauf der Grippewelle.

____

____

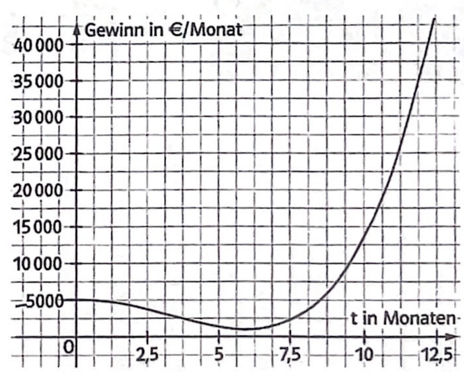
____.

b) Welche der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu dem Graphen?

$\boxed{f(x) = x^3 - 20x^2}$ $\boxed{g(x) = -x^3 + 20x^2}$ $\boxed{h(x) = x^3 + 20x^2}$ $\boxed{i(x) = -x^3 - 20x^2}$

c) Das globale Maximum wird nach ______ Tagen erreicht und beträgt etwa ________ Infizierte.

3 Die Funktion f mit $f(t) = 3\frac{7}{81}t^4 - 222\frac{2}{9}t^2 + 5000$; $0 \le t \le 12$, t in Monaten, beschreibt den Gewinn pro Monat eines kleinen Geschäftes während des ersten Jahres des Bestehens. Füllen Sie die Lücken.



a) Während der Sommermonate sinkt der Gewinn auf ______ € pro Monat.

b) Das globale Maximum wird im Monat ________________ erreicht und beträgt etwa __________________________.

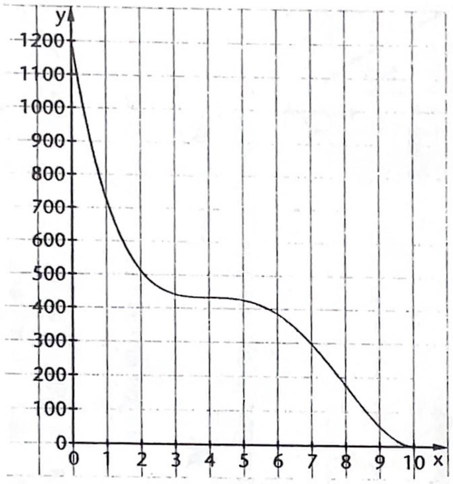
c) Ein lokales Maximum mit 5000 € pro Monat liegt ____ vor.

d) Sowohl beim lokalen als auch beim absoluten Maximum handelt es sich um __________________________.

Aufgabe 6 *Kartenvorverkauf*

POP-Konzert in der Jahrhunderthalle ausverkauft

Düsseldorf – Wer sich jetzt noch um Karten bemüht, kommt zu spät. Wenige Stunden nach Beginn des Kartenverkaufs im Internet gab es schon keine Karten mehr ...



Der Verlauf des Kartenverkaufs im Internet kann an der nebenstehenden Grafik abgelesen werden. Der Vorgang lässt sich mithilfe der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 24x^3 + 192x^2 - 640x + 1200$ modellieren.

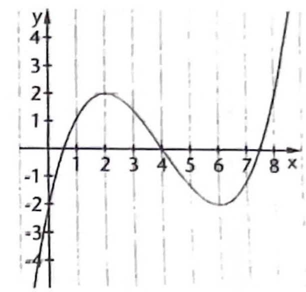
a) Welche Informationen lassen sich der Grafik entnehmen? Beschreiben Sie den Verlauf mit Worten.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Wendepunkte des Graphen und beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang. E2 F6 F7

c) Wie viele Karten waren durchschnittlich in den ersten vier Stunden verkauft worden? E2

d) Wann wären die Karten ausverkauft gewesen, wenn der Verkauf so weiter gegangen wäre wie zum Zeitpunkt zwei Stunden nach Verkaufsbeginn? E7

Aufgabe 9 *Untersuchung des Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades*



Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2$.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen dieser Funktion.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in H(2|2) einen Hochpunkt und in T(6|−2) einen Tiefpunkt besitzt. F2 F3

b) Im Funktionsterm f(x) lässt sich der Linearfaktor (x − 4) ausklammern. Daher kann man f(x) auch darstellen als

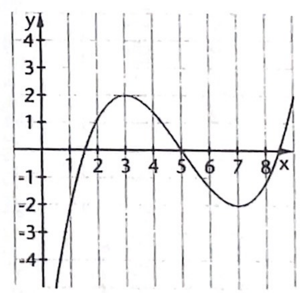
$f(x) = (x - 4) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

Bestimmen Sie rechnerisch die exakten Nullstellen der Funktion (keine Näherungswerte). B1

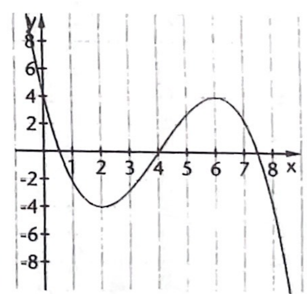
c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass W(4|0) ein Wendepunkt des Graphen ist. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Wendetangente mit der y-Achse. E7 F6 F7

d) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch ist und begründen Sie dies.
(I) Die Gerade durch die Punkte A(1|f(1)) und B(5|f(5)) hat die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.
(II) Der Graph von f′ ist streng monoton steigend für x < 2.
(III) Die Steigung des Graphen ist nie kleiner als −1,5. A1 A3

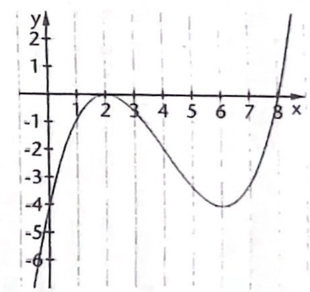
e) Der Graph der Funktion f kann durch Streckungen und Verschiebungen verändert werden.
Entscheiden Sie, welche Veränderung hier vorliegt, begründen Sie dies und geben Sie geeignete Funktionsgleichungen für die Graphen an. F1 F8



Graph 1



Graph 2

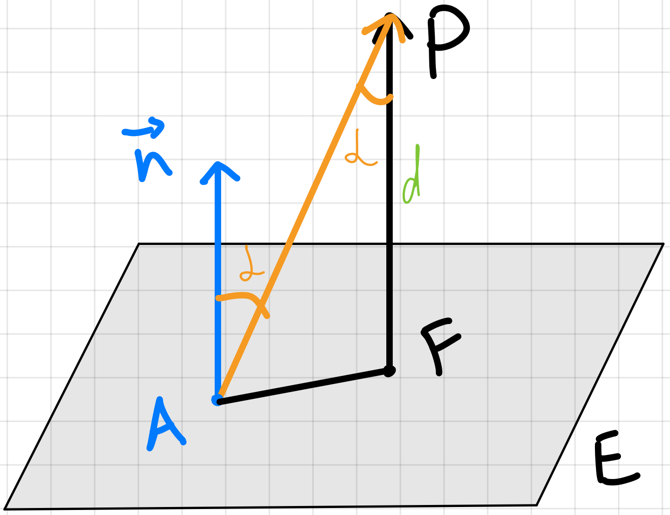


Graph 3

(Beachten Sie die unterschiedliche Skalierung der y-Achse!)

Neues Quartal

19.03.2025



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP} = |\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot\cos\alpha = |\vec{n}|\cdot\cancel{|\overrightarrow{AP}|}\cdot\frac{d}{\cancel{|\overrightarrow{AP}|}} = |\vec{n}|\cdot d$$

$$\cos\alpha = \frac{d}{|\overrightarrow{AP}|}$$

$$\tilde{d} = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|p_1n_1+p_2n_2+p_3n_3-d|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$$

d

$$\tilde{d} = \frac{|2+8\cdot0-4\cdot1-25|}{\sqrt{1+64+16}} = \frac{27}{9} = 3$$

$E: x+8y-4z = 25$

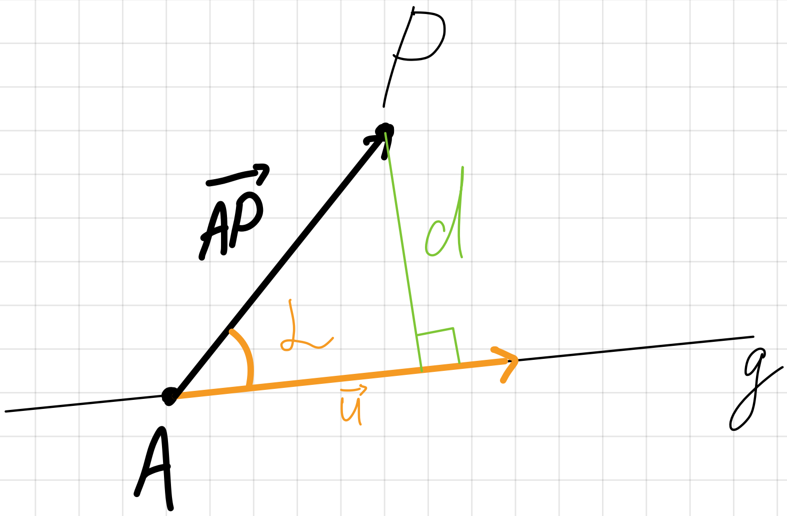
$P(2|0|1)$

$P(1|2|4)$

$E: 2x-3y+6z=13$ $\qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{AP}|}{|\vec{n}|}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{AP}|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{AP}|}{7}=$$

$$=\frac{\overset{2}{2\cdot 1}-\overset{-6}{3\cdot 2}+\overset{24}{4\cdot 6}-\overset{-13}{13}}{7}=\frac{7}{7}=1$$



$$|\vec{AP}\times\vec{u}|=|\vec{AP}|\cdot|\vec{u}|\cdot\sin\alpha=|\vec{AP}|\cdot|\vec{u}|\cdot\frac{d}{|\vec{AP}|}=|\vec{u}|\cdot d$$

$$\sin\alpha=\frac{d}{|\vec{AP}|}$$

$$d=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

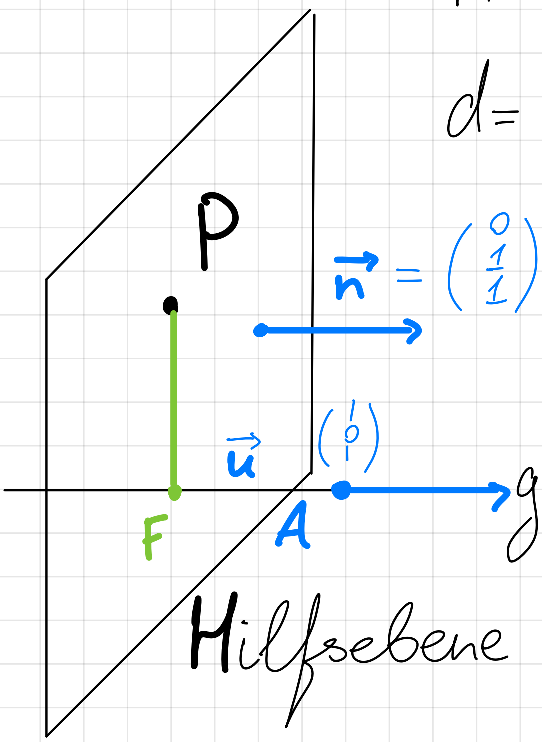
$$g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P(1|2|0)$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 1+\tau \end{pmatrix} \qquad P(1|2|0)$$

$$H: y + z = 2 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$



$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, weil kollinear mit u

$$H \cap g$$

$$\tau + 1 + \tau = 2$$

$$2\tau = 1$$

$$\boxed{\tau = 0{,}5}$$

Lotfußpunkt $F(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{PF}| = \sqrt{0 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

1. Methode: Abstandsformel
2. Methode: Hilfseben
3. Methode: Minimierung der Abstände

$P(1;2;0)$

$g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{PA}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \tau - 2 \\ 1+\tau \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\tau-2)^2 + (1+\tau)^2} \rightarrow \min$

$\Longleftrightarrow \quad (\tau-2)^2 + (1+\tau)^2 \rightarrow \min$

$\Longleftrightarrow \quad \tau^2 - 4\tau + 4 + 1 + 2\tau + \tau^2 = 2\tau^2 - 2\tau + 5$

$f(\tau) = 2\tau^2 - 2\tau + 5$

notw. Bed, $f'(\tau) = 4\tau - 2$

$4\tau - 2 = 0$

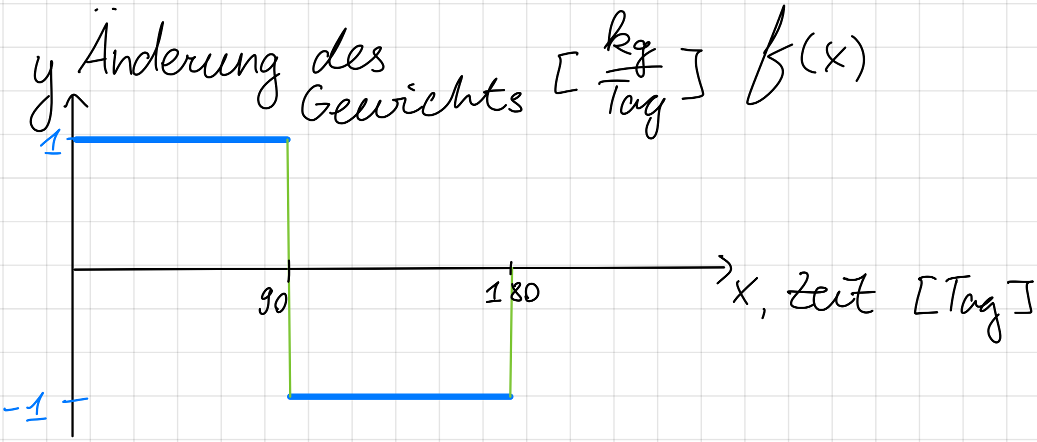
$\boxed{\tau = \frac{1}{2}}$

20.03.25

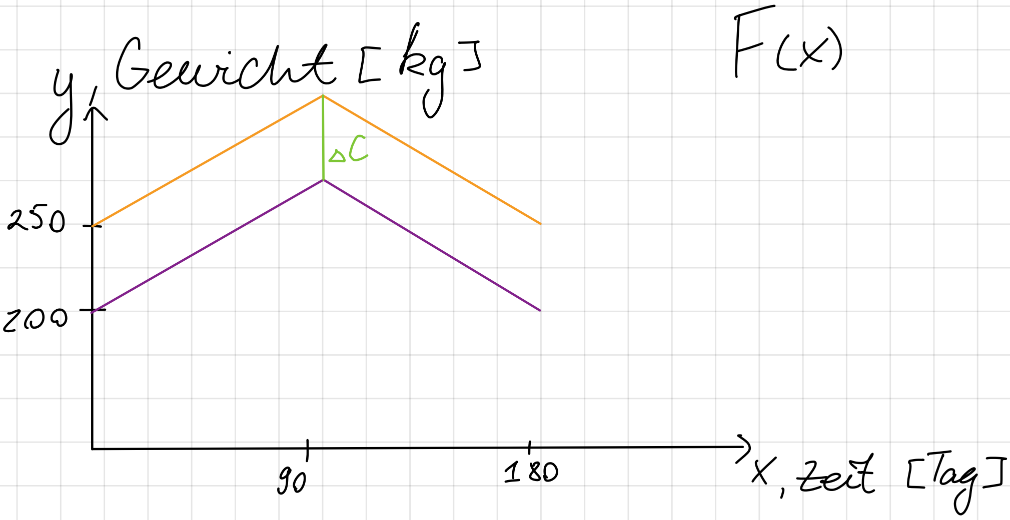
$$\boxed{t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Gleichung einer Tangente

24.03.2025



$f(x)$



$F(x)$

$F(x) + C$

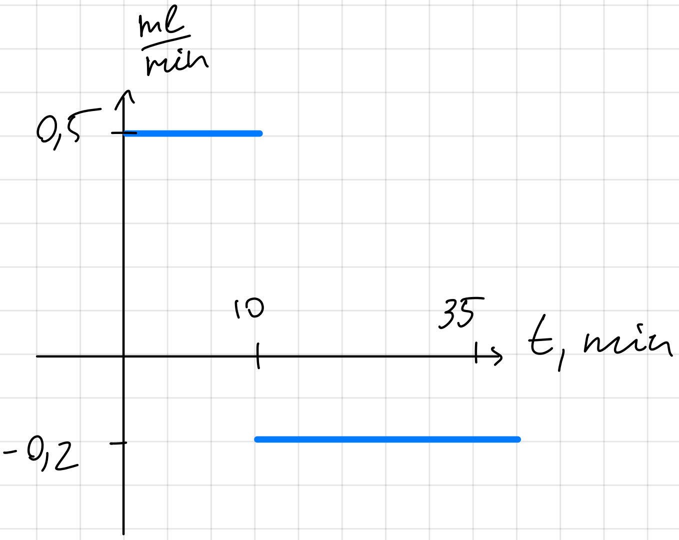
$(F(x) + C)' = f(x)$

F – Stammfunktion zu f : $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x)$

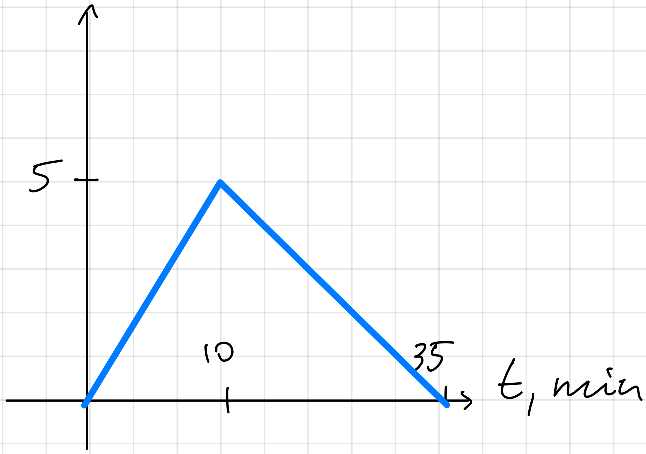
$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \boxed{+\,C}}$$ unbestimmtes Integral

$$\boxed{\int_{45}^{135} f(x)\,dx = 0}$$ bestimmtes Integral

positiv/negativ orientierte Fläche

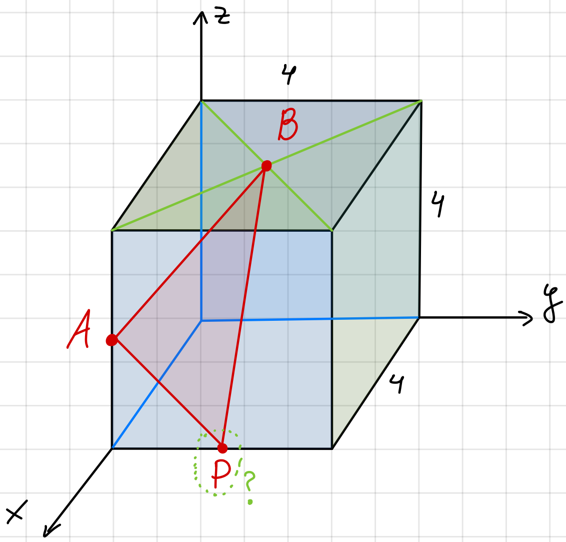


ml/min
0,5
10
35
t, min
-0,2



5
10
35
t, min

26.10.2025



Bestimme P, sodass $F_{\triangle ABP} = 2\sqrt{6}$

$A(4;0;2)$
$B(2;2;4)$
$P(4;y;0)$ $\quad y \in [0;4]$

$$\frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AP}\right| = 2\sqrt{6}$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AP}\right| = 4\sqrt{6}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{6}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -2y-4 \\ -4 \\ -2y \end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{6}$$

$$(-2y-4)^2 + (-4)^2 + (-2y)^2 = (4\sqrt{6})^2$$

$$(4y^2 + 16y + 16) + 16 + 4y^2 = 16 \cdot 6$$

$$8y^2 + 16y - 64 = 0$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

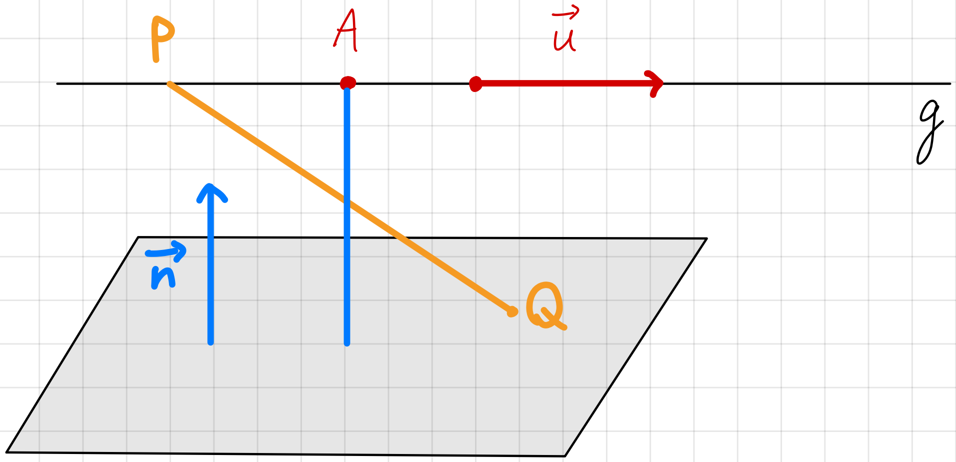
$$y_1 = -4 \qquad \boxed{y_2 = 2}$$

$8y^2 + 16y + 32$

$y^2 + 2y + 4$

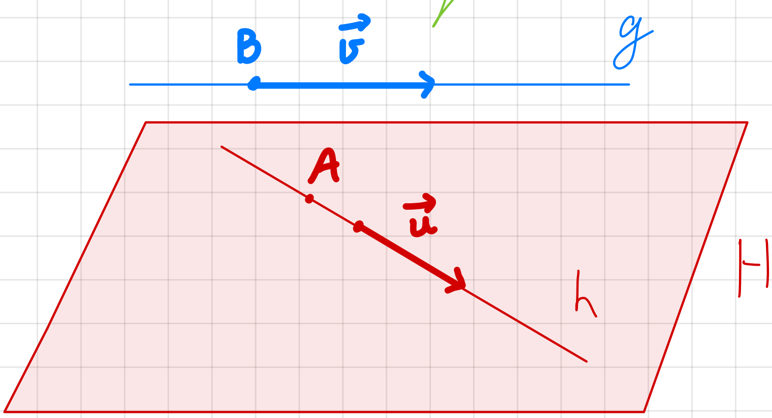
$2y + 2 = 0$

$y = -1$



$$d(g,h) = d(g,H) = d(A,H)$$

Windschief



$$g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $h \subset H$

2) $g \parallel H$

$$H: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

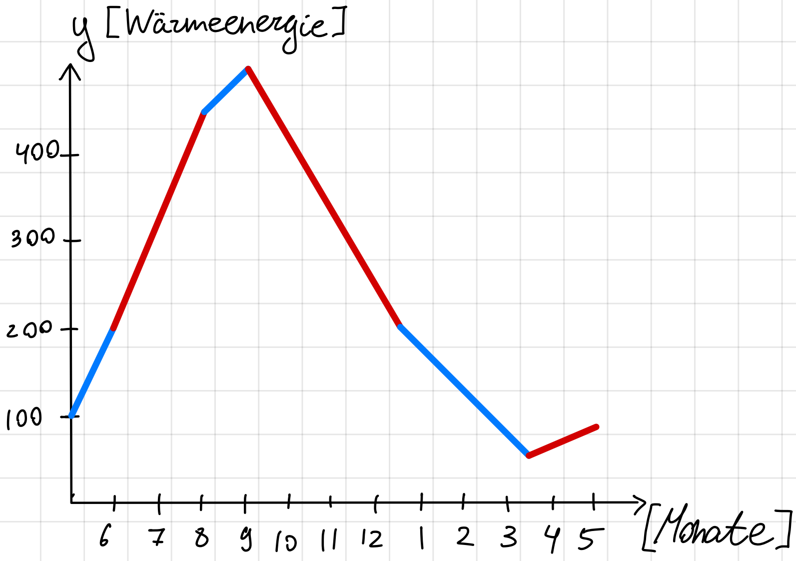
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x + y - z = 9$$

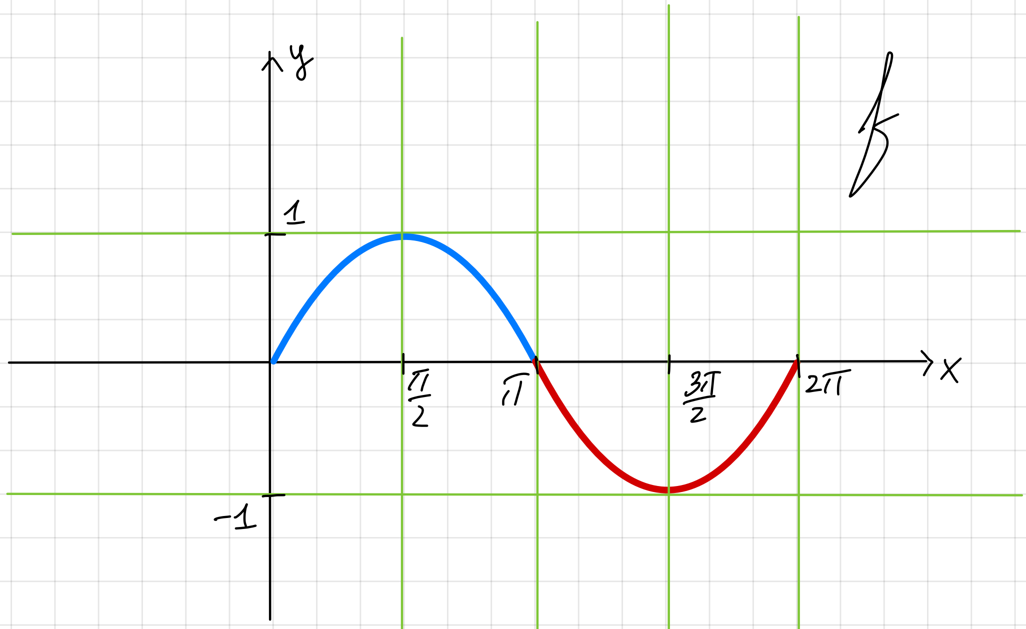
$B(3;4;8)$

$$d = \frac{|3+4-8-9|}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}7$$

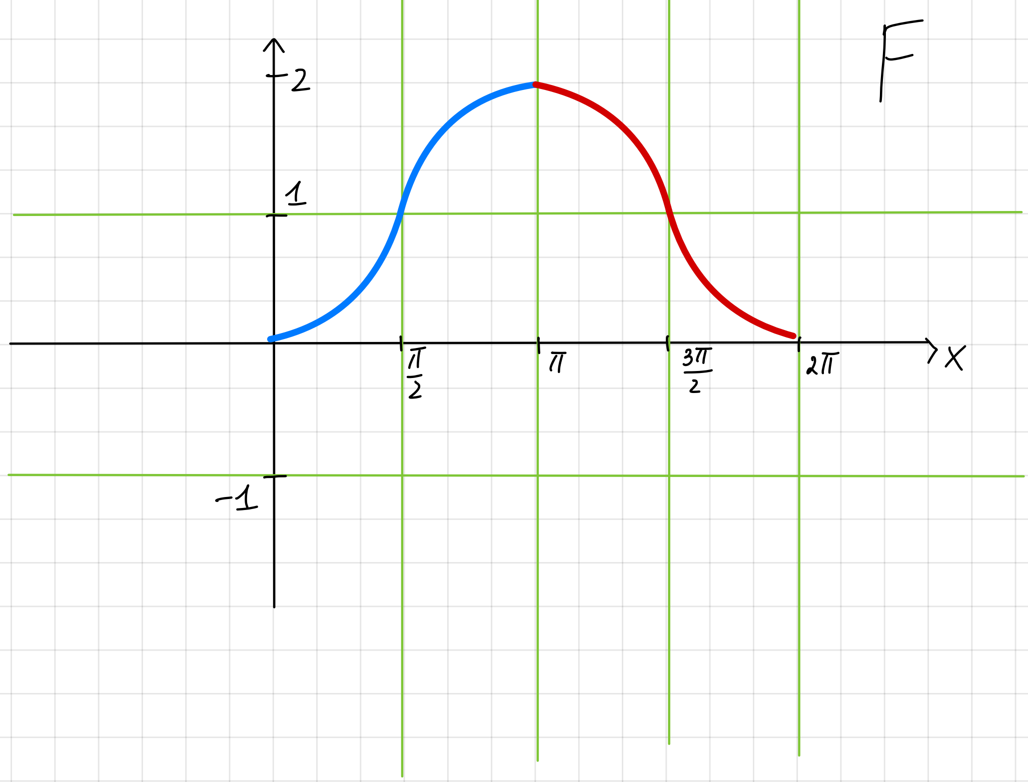
27.03.25



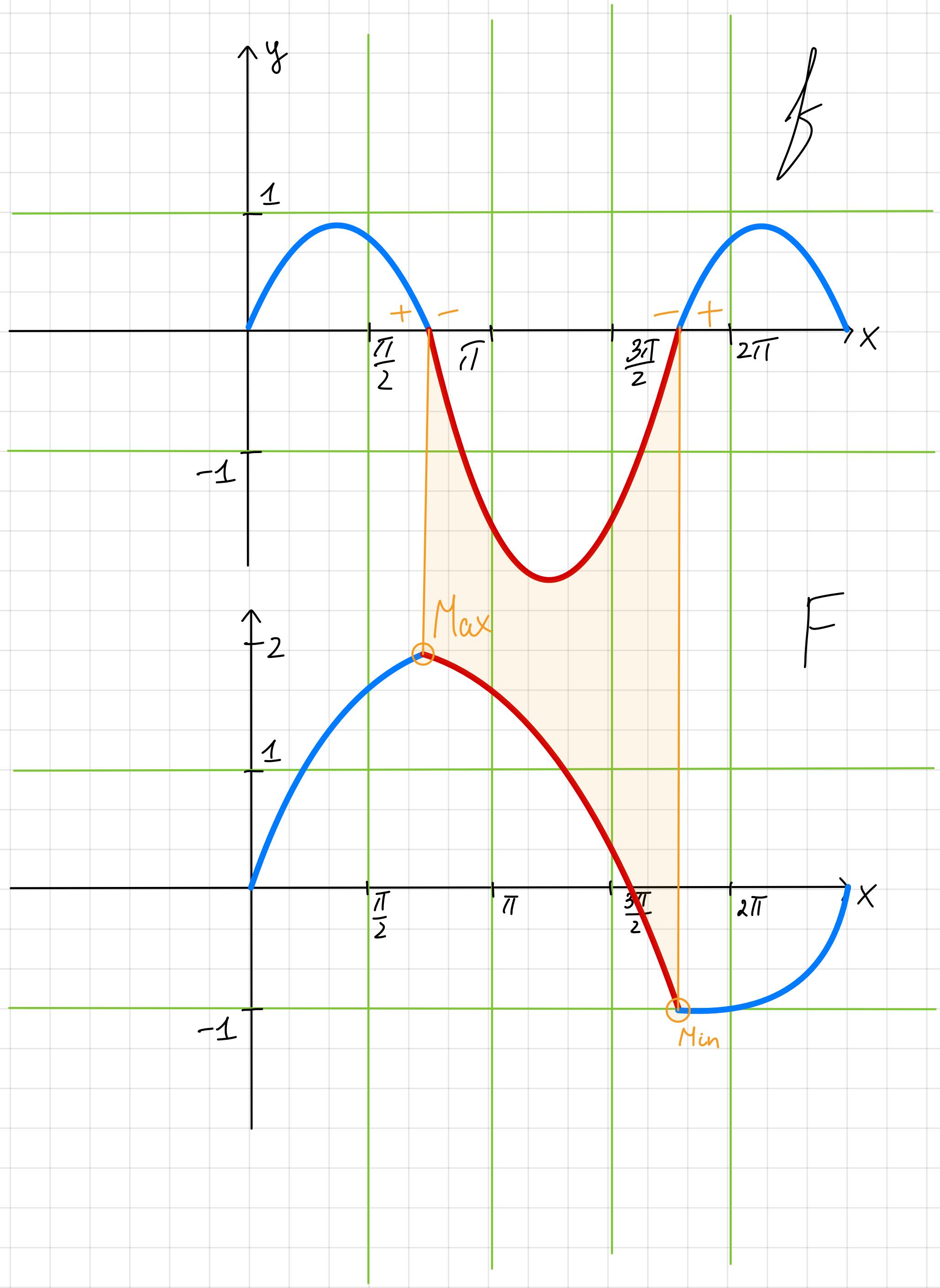
y [Wärmeenergie]
400
300
200
100
6
7
8
9
10
11
12
1
2
3
4
5
[Monate]



y
f
1
-1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x



F
2
1
-1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x



f
y
1
-1
π/2
π
3π/2
2π
x
+
−
F
2
Max
Min

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
   $n \neq -1,\ x > 0$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

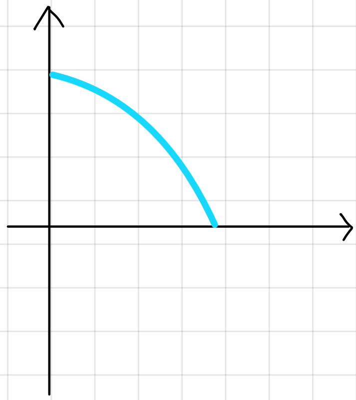
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$

13. «Высокий» логарифм:
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$

14. «Длинный» логарифм:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$F'(x) = f(x)$$



$$f(x) = \sin(x)$$
$$F(x) = -\cos(x)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) =$$
$$= -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$A = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) = 2 \cdot \left(-\cos(x)\Big|_2^{\pi}\right) = 2 \cdot \left(-\cos(\pi) - (-\cos(0))\right) =$$
$$= 2(1 + 1) = 4$$

f – die zu integrierende Funktion
F – Stammfunktion $\quad F'(x) = f(x)$
$I_a(x)$ – Integralfunktion zur unteren Grenze a.

$$I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

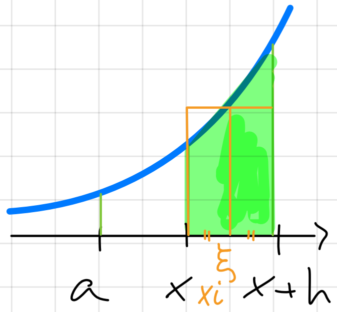
$$f(x) = \sin(x) \qquad x \in [0; 2\pi]$$

$$I_0(x) = \int_0^x \sin(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_0^x = -\cos(x) + \cos(0) =$$
$$= -\cos(x) + 1$$

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'$$

$$I_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \cdot f(\xi)}{\cancel{h}} =$$



$$= \lim_{h\to 0} f(\xi) =$$

$$= \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$

$$I_a(x) = F(x) + C$$

$$I_a(a) = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$$\Longrightarrow \quad I_a(b) = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

28.03.2025

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$$

1. $x' = 1$
2. $C' = 0$
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
4. $(u+v)' = u' + v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

   $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
13. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
18. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Zusammenfassung der wesentlichen Ableitungsregeln

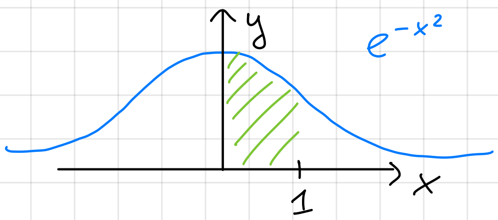
Die vorkommenden Parameter c und k stehen für reelle Zahlen.
g und h sind differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen g' und h' bekannt sind.

Funktion $F(x)$ ← $f(x)$ →	~~**Ableitung**~~ $f(x)$ $f'(x)$	**Bemerkung, Regel**
x	1	
x^2	$2x$	
x^3	$3x^2$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	
e^x	e^x	e ist die Eulersche Zahl
a^x	$\ln a \cdot a^x$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
c	0	Konstantenregel
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	Summenregel
$k \cdot g(x)$	$k \cdot g'(x)$	Faktorregel
$g(x) \cdot h(x)$	$g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$	Produktregel
$(g(x))^n$	$n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	Potenzregel
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	Quotientenregel
$h(g(x))$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

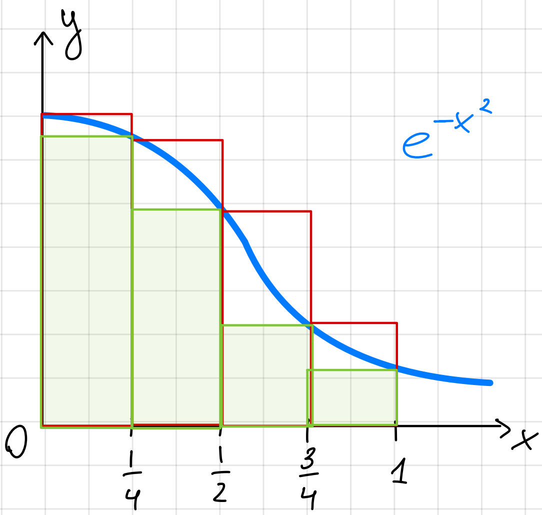
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int e^{-x^2}\,dx =$$



$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}747$$



Obersumme

$$O_4 = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-0{,}25^2} + e^{-0{,}5^2} + e^{-0{,}75^2}\right) = 0{,}822$$

Untersumme

$$U_4 = \frac{1}{4}\left(e^{-0{,}25^2} + e^{-0{,}5^2} + e^{-0{,}75^2} + e^{-1^2}\right) = 0{,}664$$

$$\to 0{,}743$$

$$0{,}664 \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 0{,}822$$

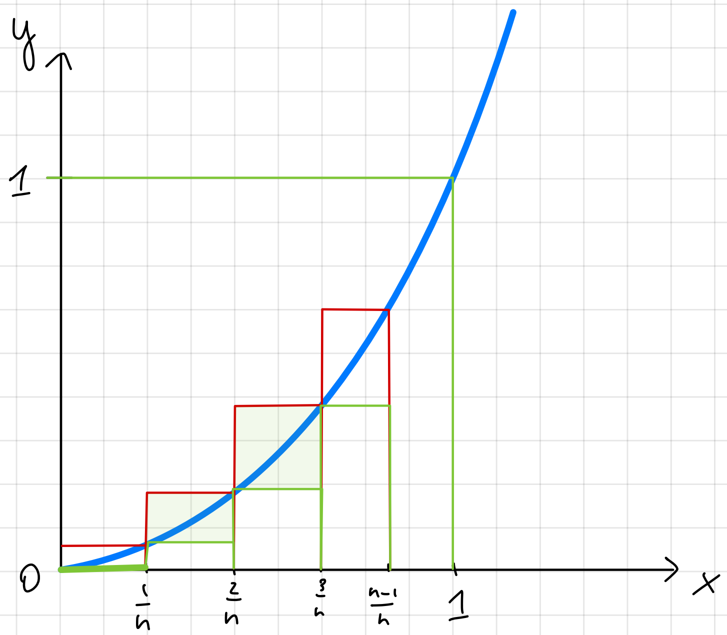
31.03.25

$f(x) = x^2 \quad , \; I = [0,1] \; , \; n \in \mathbb{N}$

$$I = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Zerlegung: $Z = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}, 1\}$

$$x_k := \frac{1 \cdot k}{n} \quad , \quad 0 \leq k \leq n$$



$$U_n = \frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

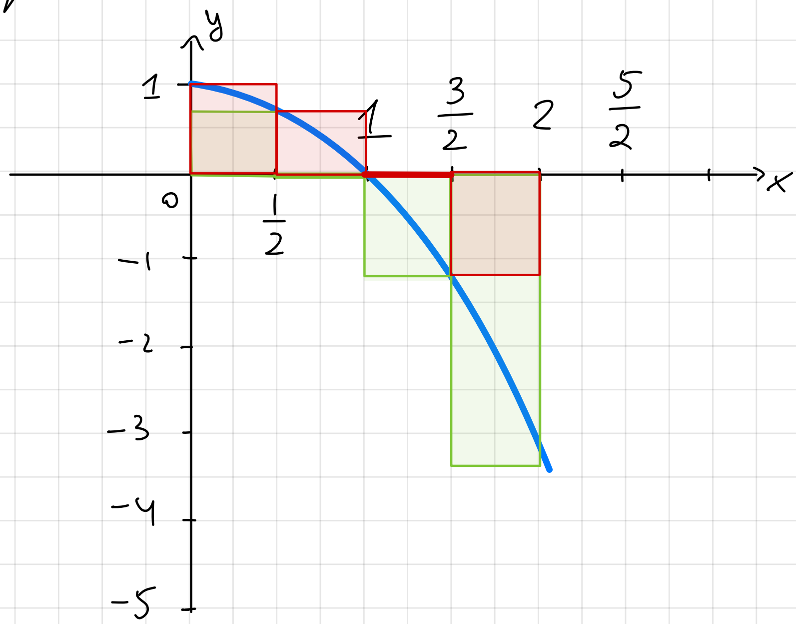
$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + \ldots}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Bernhard Riemann:

f integrierbar $:\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n =: \int_a^b f(x) \, dx$

$$f(x) = 1 - x^2 \,, \quad I = [0, 2]$$

$1 \to \frac{2}{3} \qquad 2 \to -\frac{2}{3}$

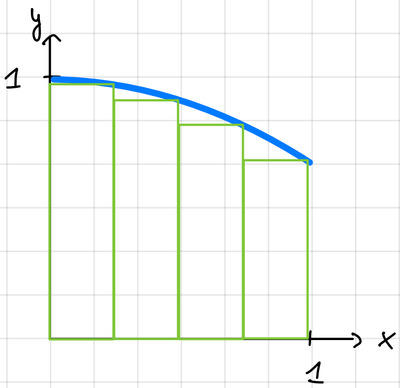


$$U_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + 0 - \frac{5}{4} - 3\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{4} = -1{,}75$$

$$\int_0^2 1 - x^2 \, dx = x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = 2 - \frac{1}{3} \cdot 8 = -\frac{2}{3}$$

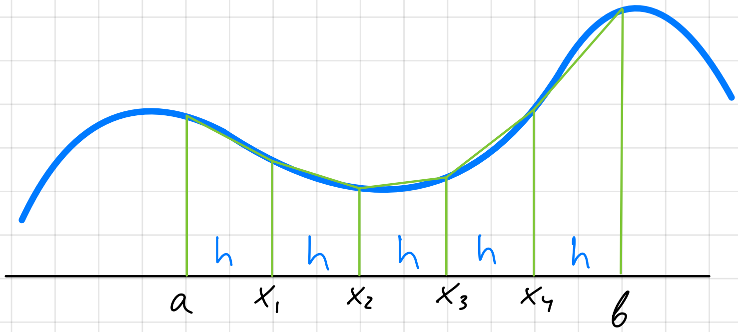
$$\int_{0{,}0001}^{1} \frac{\sin(x)}{x} \, dx \overset{T.R.}{=} 0{,}94 \qquad n = 4$$

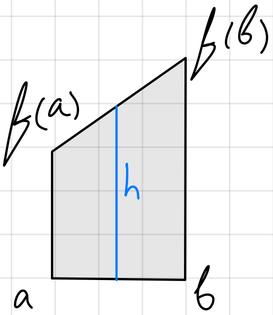
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$U = \frac{1}{4}\left(4\sin\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{2}{4}\right)}{2} + \frac{4\sin\left(\frac{3}{4}\right)}{3} + \sin(1)\right) =$$

$$= 0{,}924$$





$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

$$T_1 = \frac{f(a)+f(x_1)}{2} \cdot h$$

$$T_2 = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot h$$

$$T_3 = \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} \cdot h$$

$$\boxed{h = \frac{max - min}{n}}$$

$$\boxed{T_n = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right) =}$$

Trapezsummenformel

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \qquad n = 3 \quad h = \frac{1}{3} \quad Z = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

$$T = \frac{\frac{1}{3}}{2}\left(e^{-0} + 2e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 2e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2} + e^{-1^2}\right) = 0{,}74$$

0,739986

01.04.2025

$$\int_1^3 \sqrt{x^2+1}\,dx \quad , \quad n=2, \quad \text{Trapezsumme}$$

$$Z = \{1, 2, 3\}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(f(1) + 2\cdot f(2) + f(3)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10}\right) \approx 4{,}524$$

$$I = 4{,}504\ldots$$

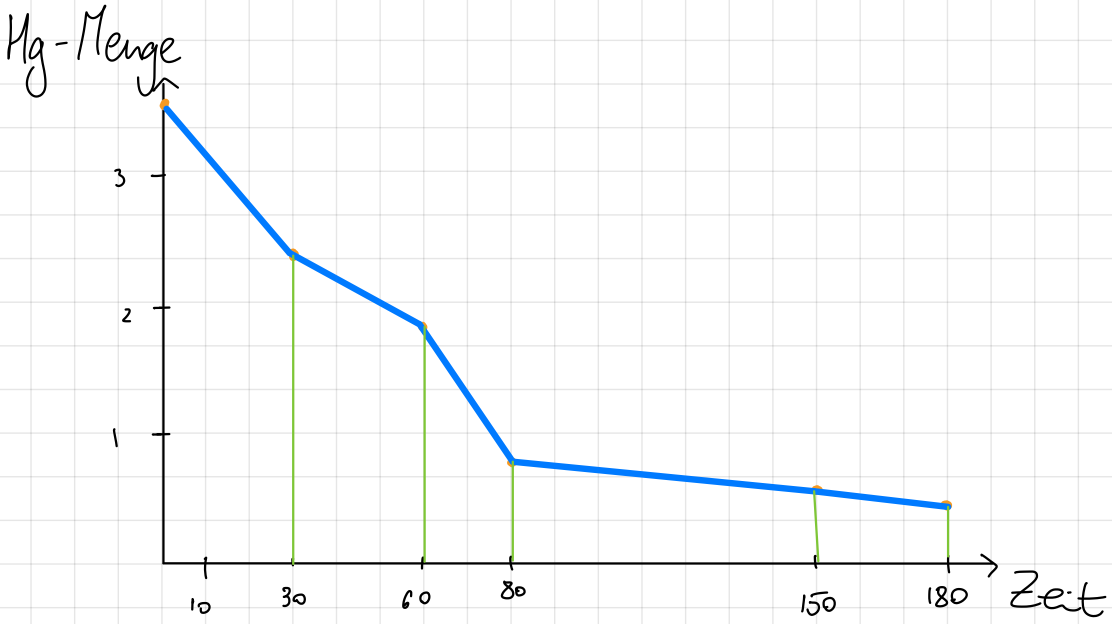
$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}\overline{6}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

$$T = \frac{1}{2}(0+2+4) = 3$$

$$T = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + 4\right) = 2{,}75$$

Zeit (in Tagen)	0	30	60	80	150	180
Hg-Menge (in $\frac{\mu g}{Tag}$)	3,5	2,4	1,8	0,8	0,5	0,4



$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{\ln 2 \cdot x}$$

$$(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x$$

$$\int 2^x \, dx = \frac{2x}{\ln(2)} + C$$

$$\int_0^{180} 3{,}552 \cdot 0{,}9876^x \, dx = 3{,}552 \cdot \int_0^{180} 0{,}9876^x \, dx$$

$$= 3{,}552 \cdot \frac{0{,}9876^x}{\ln(0{,}9876)} \Bigg|_0^{180} =$$

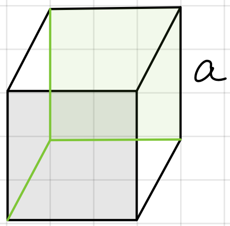
$$= \frac{3{,}552}{\ln(0{,}9876)} \left(0{,}9876^{180} - 1\right) \approx 254{,}546$$

68%.

02.04.2025

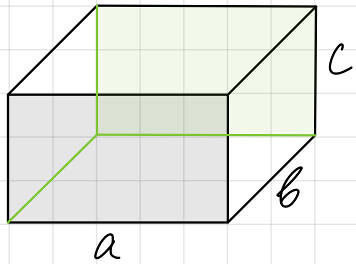
$\vec{a} \bullet \vec{b}$ Skalarprodukt

$\vec{a} \times \vec{b}$ Vektorprodukt



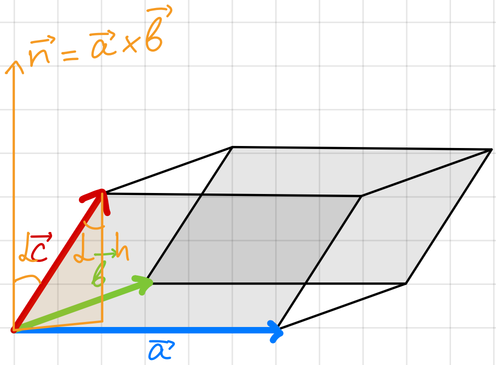
Würfel

$V = a^3$



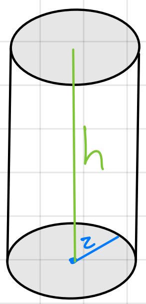
Quader

$V = a \cdot b \cdot c$



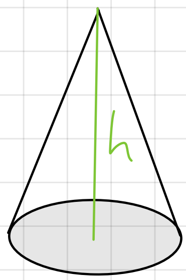
Spat

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h =$$
$$= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{c}| =$$
$$= |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$$



Zyllinder

$V = \pi r^2 \cdot h$



Kegel

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ Spatprodukt

$A(1;-2;3) \quad B(3;4;-3) \quad C(3;1;0)$

$D(2;3;-4)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

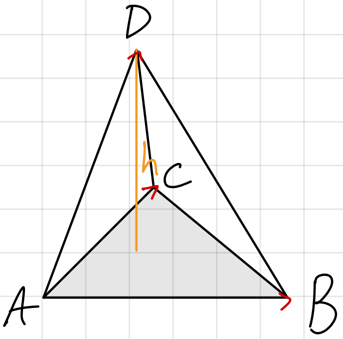
$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ -6 & -3 & -7 \end{bmatrix}\right) = 2\cdot 3\cdot(-7) - 2\cdot 5\cdot 6 - 1\cdot 6\cdot 3 + 3\cdot 6 +$$
$$+ 2\cdot 5\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 7 = 12 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = (-6)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y + z = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$E_{ABC}: y + z = 1$

$$h = d(D, E) = \frac{|3 - 4 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



$$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \cdot h = \frac{1}{6}\sqrt{72} \cdot \sqrt{2} = 2$$

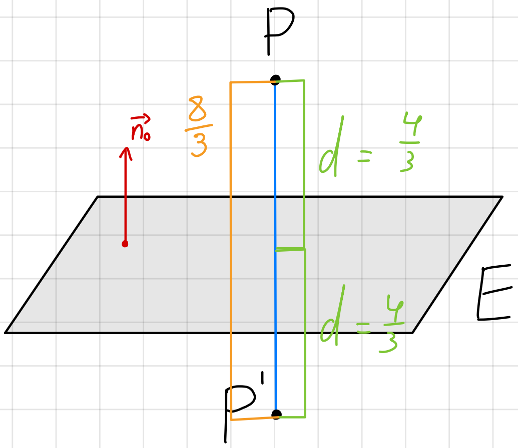
$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 12$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Spat}$$

$$E: x - 2y + 2z = 3$$

$$P(1; 1; 0)$$

$$d(E,P) = \frac{|1 - 2 - 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{4}{3}$$



Integrationsmethoden:

03.04.2025

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$f(x)\cdot g(x) = \int (f(x)\cdot g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

Regel der <u>partiellen</u> Integration

Beispiel:

$f'(x) = x \qquad g(x) = \sin(x)$

$f(x) = \frac{x^2}{2} \qquad g'(x) = \cos(x)$

$$\int x\cdot \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot \sin(x) - \int \frac{1}{2}x^2\cos(x)\,dx$$

$f'(x) = \sin(x) \qquad f(x) = -\cos(x)$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$$\int x\cdot \sin(x)dx = -x\cdot \cos(x) + \int +\cos(x)dx =$$

$$= -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + C$$

$$F'(x) = (-x\cdot\cos(x) + \sin(x) + C)' = -\cos(x) + x\cdot\sin(x) + \cos(x) =$$

$$= x\cdot\sin(x) = f(x)$$

$f'(x) = e^x$ $\quad f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$ $\quad f(x) = e^x$

$g(x) = x^2$ $\quad g'(x) = 2x$ $\quad g(x) = x$ $\quad g'(x) = 1$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\left(e^x \cdot x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2 e^x - 2e^x x + 2e^x + C =$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

Übung

a) $\int x \cdot \sqrt{x+1}\, dx$ $\qquad$ b) $\int_{-1}^{0} x \cdot \sqrt{x+1}\, dx$

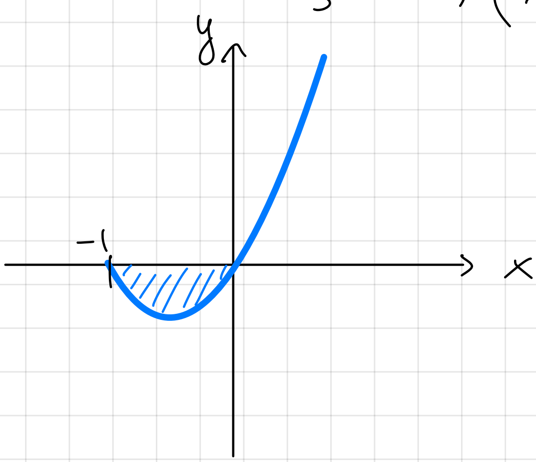
$f'(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad f(x) = \frac{2}{3} \cdot (x+1)^{1{,}5}$

$g(x) = x$ $\quad g'(x) = 1$

$$\int x \cdot \sqrt{x+1}\, dx = \frac{2}{3} x (x+1)^{1{,}5} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{1{,}5} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x (x+1)^{1{,}5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (x+1)^{2{,}5} =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)\left(x\sqrt{x+1} - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}\right)$$



$f'(x) = \cos(x) \qquad f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \sin(x) \qquad g'(x) = \cos(x)$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \ln(x)$

$g(x) = \ln(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \ln^2(x) - \int \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \ln(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$\int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$$

1. **Wegdifferenzieren** ($x \cdot \sin(x)$, $x^2 e^x$)

2. **Phoenix** ($\sin(x) \cdot \cos(x)$)

3. **Faktor 1** ($\ln(x)$, $\arctan(x)$)

Integration durch Substitution

28.04.25

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Subst. $g(x) = u$

$$g'(x) = \frac{du}{dx} \quad | \cdot dx$$

$$g'(x)\,dx = du$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

$u = \sin(x)$

$du = \cos(x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\sin(x)} + C$$

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u) + C =$$
$$= \arctan(\sin(x)) + C$$

$u = \sin(x)$

$du = \cos(x)\,dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\int (x-2)^6(2-x)^8\,dx = \int u^6 u^8\,du = \int u^{14}\,du = \frac{u^{15}}{15} + C = \frac{(x-2)^{15}}{15} + C$$

$u = x-2$

$du = dx$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \arcsin(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$u = 1 - x^2$

$du = -2x\,dx$

$$\int 1 \cdot \arcsin(x)\,dx = x \cdot \arcsin(x) - \int \frac{-2}{-2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x \cdot \arcsin(x) + \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int (\sqrt{u})'\,du = \sqrt{u}$$

$u = \arcsin(x) \Rightarrow \sin(u) = x$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int \arcsin(x)\,dx = \int u\sqrt{1-x^2}\,dx = \int u \cdot \cos(u)\,du$$

$$= u \cdot \sin(u) - \int \sin(u)\,du = u\sin(u) + \cos(u) + C =$$

$$= \arcsin(x) \cdot x + \cos(\arcsin(x)) + C =$$

$$= \arcsin(x) \cdot x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

$\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)}$

$\cos u = \sqrt{1 - x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$$

$u = 1+x^2$
$du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$\int \frac{2+3x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2}{1+x^2}\,dx + \int \frac{3x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\arctan(x) + \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + C$$

① 29.04.25

$$\int e^x \sin(e^x)\,dx = \int \sin(t)\,dt = -\cos(t) + C = -\cos(e^x) + C$$

$$t = e^x$$
$$dt = e^x dx$$

1. $x' = 1$
2. $C' = 0$
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$
4. $(u + v)' = u' + v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

   $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
13. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
18. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

②

$$\int (x^3 + 6x^2)^4 (x^2 + 4x)\,dx = \frac{1}{3}\int u^4\,du = \frac{1}{15} \cdot u^5 + C = \frac{(x^3+6x^2)^5}{15} + C$$

$$u = x^3 + 6x^2$$
$$du = 3x^2 + 12x\,dx = 3(x^2 + 4x)\,dx$$

③

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-5x^3}}\,dx = -\frac{1}{15}\int \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{z}}\,dz = -\frac{2}{15} \cdot \sqrt{z} + C = -\frac{2\sqrt{1-5x^3}}{15} + C$$

$$z = 1 - 5x^3$$
$$dz = -15x^2\,dx$$

④ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\quad t - x = \sqrt{x^2+1}$

⑤ $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\quad 1-x = t^2 \quad x = 1-t^2$

$$dx = -2t\,dt$$

$$\int -2t \cdot \frac{1-t^2}{t}\,dt = -2\int 1-t^2\,dt =$$

$$= -2\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C =$$

$$= -2\left(\sqrt{1-x} - \frac{(\sqrt{1-x})^3}{3}\right) + C$$

$$x = \sqrt{\sin(u)}$$

$$dx = \frac{\cos u}{2\sqrt{\sin(u)}}\,du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sin(u)}}{\sqrt{\underbrace{\boxed{1-\sin^2(u)}}_{\cos^2(u)}}} \cdot \frac{\cos(u)}{2\sqrt{\sin(u)}}\,du =$$

$$= \int \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

Vektorrechnung

Gegeben seien die Punkte **A**(8 |3 |1), **B**(–4 |15 | 1), **C**(2|15 | –11), **D**(–6 | 3 |–7).
(Die folgenden Fragen hängen teilweise miteinander zusammen. Überlegen Sie bitte zunächst, in welcher Reihenfolge, mit welcher Methode und mit Hilfe welcher Vektoren Sie am besten arbeiten.)

a) Beweisen Sie, dass ABCD ein Tetraeder ist.
b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders ABCD.
c) E_1 bzw. E_2 seien Ebenen, die durch den Schwerpunkt des Tetraeders gehen und zu dem Dreieck ABC bzw. BCD parallel sind. Geben Sie geeignete Ebenengleichungen an und berechnen Sie die Schnittgerade.
d) Welchen Abstand hat der Punkt **D** von der Ebene E_1?
e) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC.
f) Erklären Sie, wie man aus den Ergebnissen von b), d) und e) die Richtigkeit der Rechnung überprüfen kann.

30.04.25

$A(8|3|1)$ $B(-4|15|1)$

$C(2|15|-11)$ $D(-6|3|-7)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $V_T = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 432$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-12} & \cancel{-6} \\ 12 & 12 \\ 0 & -12 \\ -12 & -6 \\ 12 & 12 \\ \cancel{0} & \cancel{-12} \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -144 \\ -144 \\ -72 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot (-72) \cdot (-28-8) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 72 \cdot 36 =$$

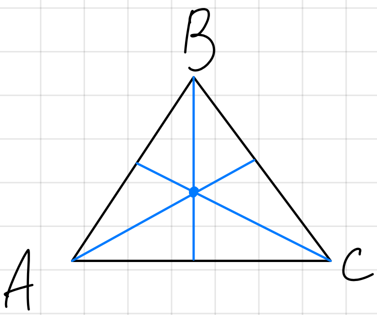
$$= 6 \cdot 72 = 432$$

a) Es handelt sich um einen Tetraeder

e) $F_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = 108$

$$\frac{1}{2} \cdot 72 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108$$

f) $DE_1 = h = \frac{3 V_T}{F_{ABC}} = 3 \cdot \frac{432}{108} = 12$



$$\vec{S_D} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$S_T = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 36 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$S(0|9|-4)$ Schwerpunkt des Tetraeders

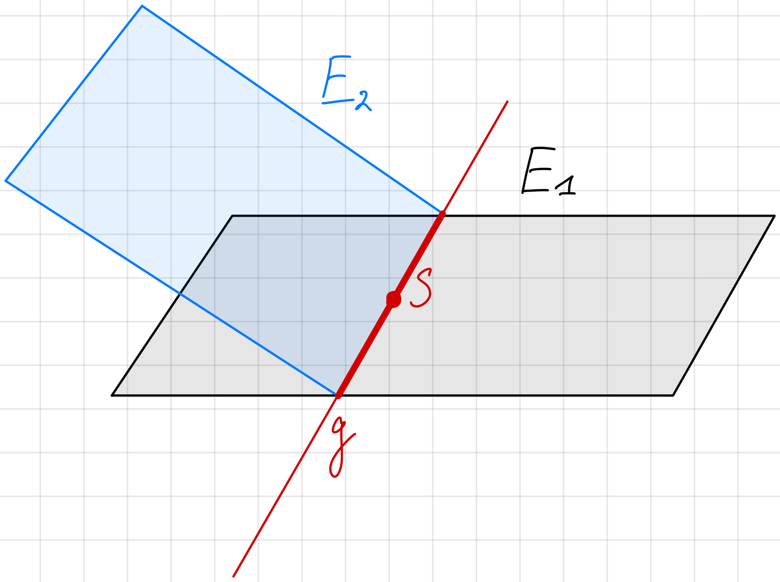
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 : 2x + 2y + z = 4$$

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 4 = 14$$

S

„nach ‚etwas' Rechnung" $E_2 : 2x - y + z = -13$



$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{u_g}$$

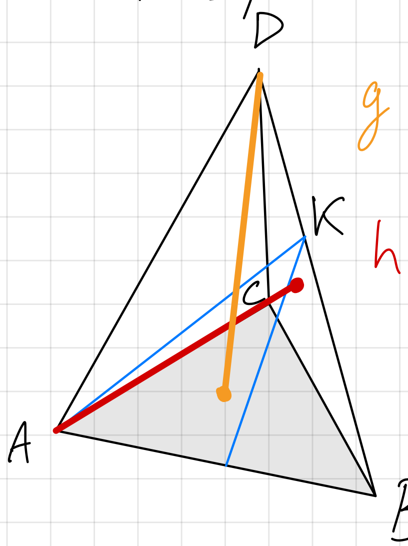
$$g : \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) $E_1: 2x + 2y + z = 4$

$D(-6|3|-7)$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AP}|}{|\vec{n}|}$$

$$d(D, E_1) = \frac{|-12+6-7-14|}{9} = \frac{27}{9} = 3$$



Schwerlinie

$g: \vec{x}(z) = \vec{d} + z\left(\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{d}\right)$

$h: \vec{x}(s) = \vec{a} + s\left(\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \vec{a}\right)$

$$\vec{d} + r\left(\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \vec{d}\right) = \vec{a} + s\left(\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) - \vec{a}\right)$$

$$r \cdot \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - r \cdot \vec{d} - s \cdot \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) + s \cdot \vec{a} = \vec{a} - \vec{d}$$

$\frac{r}{3}\vec{a} + s\vec{a} = \vec{a}$ $\qquad \frac{4}{3}r = 1 \qquad r = \frac{3}{4}$

$\frac{r}{3}\vec{b} - \frac{s}{3}\vec{b} = \vec{0}$ $\qquad r = s$

$\frac{r}{3}\vec{c} - \frac{s}{3}\vec{c} = \vec{0}$ $\qquad r = s$

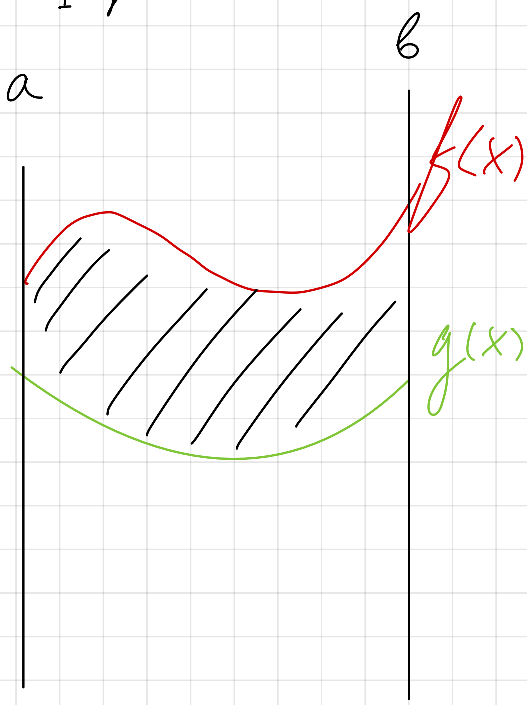
$-r\vec{d} - \frac{s}{3}\vec{d} = -\vec{d}$ $\qquad s = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ $\leftarrow$ aus g, $r = \frac{3}{4}$

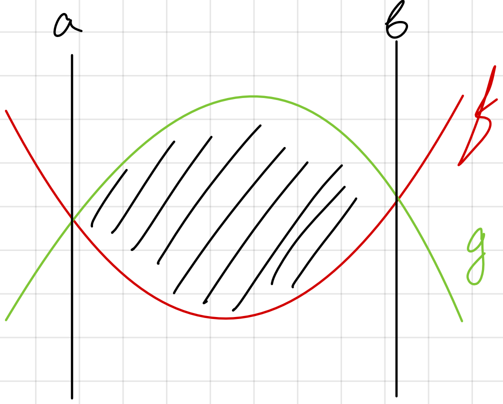
05.05.2025

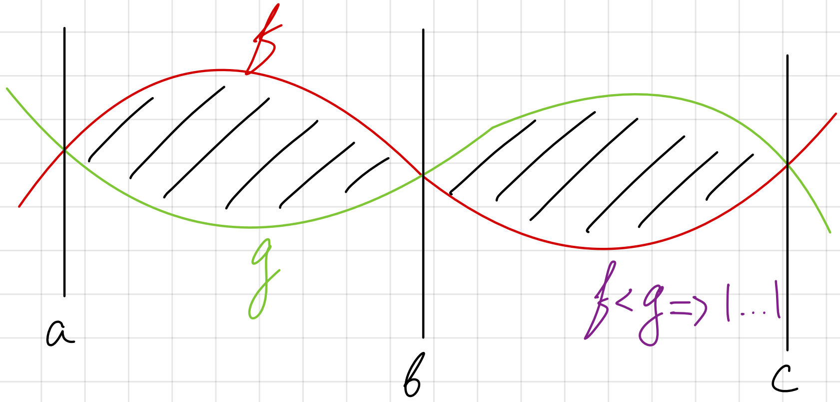
Integral und Fläche

$$A = \int_1^5 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_1^5 2 \, dx = 2x \Big|_1^5 = 2(5-1) = 8$$



$$A = \int_a^b f(x) - g(x)$$

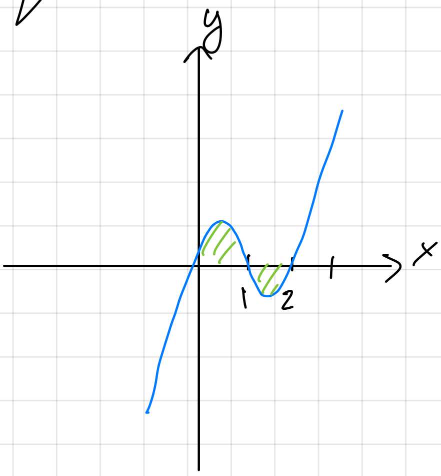




$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx + \left|\int_b^c f(x)-g(x)\,dx\right|$$

Welche Fläche schließt die Funktion f

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ mit der x-Achse?



$$\int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x\,dx + \left|\int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x\,dx\right| =$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big|_0^1 + \left|\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 + \left|4 - 8 + 4 - \frac{1}{4} + 1 - 1\right| =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 \cdot |x-3| + 2x$$

$$x^2 \cdot (3-x) + 2x$$

$$3x^2 - x^3 + 2x$$

$f(x) = 9 - x^2$

$g(x) = x^2 + 1$

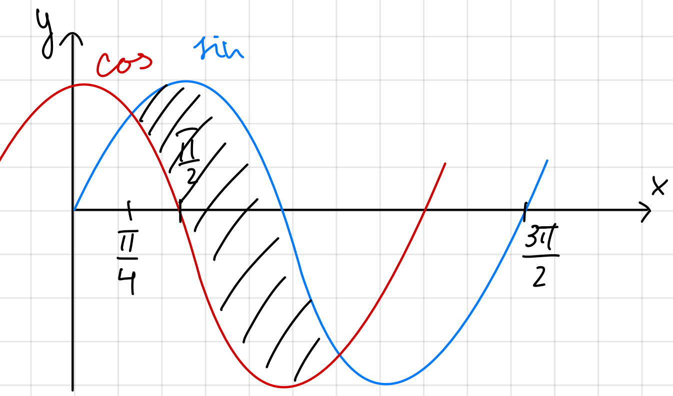
$9 - x^2 = x^2 + 1$

$2x^2 = 8$

$x = \pm 2$

$$\int_{-2}^{2} 9 - x^2 - x^2 - 1 \, dx = \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2 \, dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 2\left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(16 - \frac{16}{3}\right) = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3} = 21,\overline{3}$$



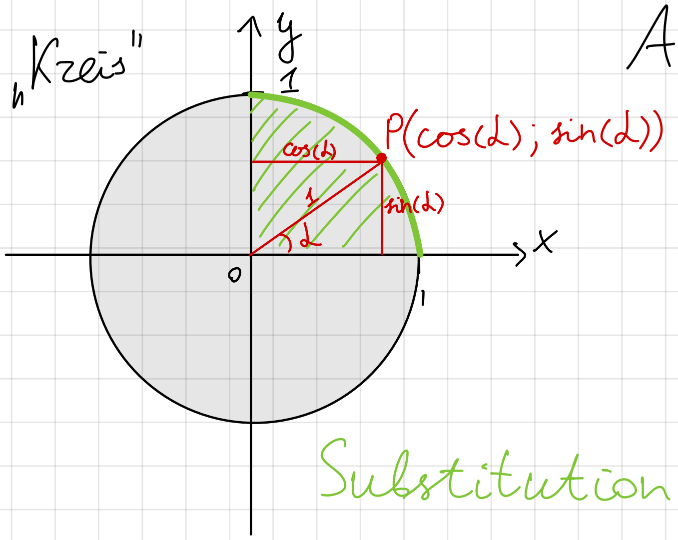
$\cos \frac{5\pi}{4} =$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x) \, dx = -\left(\cos(x) + \sin(x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= -\left(\cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}$$

„Kreis"



$$A = \pi r^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Substitution: $x = \sin(\alpha)$

$dx = \cos(\alpha)\, d\alpha$

$0 = \sin(\alpha) \Rightarrow \alpha = 0$

$1 = \sin(\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$A = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \boxed{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$f'(\alpha) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\sin(x)$$

$$= 4\left(\underbrace{\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha \, d\alpha \right) =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha \, d\alpha = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(\alpha))\, d\alpha = 4 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha}_{=2\pi} - \boxed{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\alpha}$$

$$\cancel{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$A = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

06 05 2025

$f(x) = x^2 - 4x + 1$

$g(x) = -x^2 + 6x - 7$

1. Schnittpunkt von f und g Berechnen
2. Bestimmtes Integral zu den Schnittpunkten berechnen.
3. Falls Integral negativ ist, ist die Fläche der Betrag des Integrals.

$x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 6x - 7$

$2x^2 - 10x + 8 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 1$

$$\int_1^4 2x^2 - 10x + 8 \, dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_1^4 = -9$$

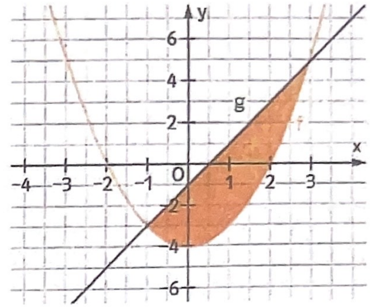
$A = 9$

$x^2 - 4 = 2x - 1$

$x^2 - 4 - 2x + 1 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$

1 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossenen wird.

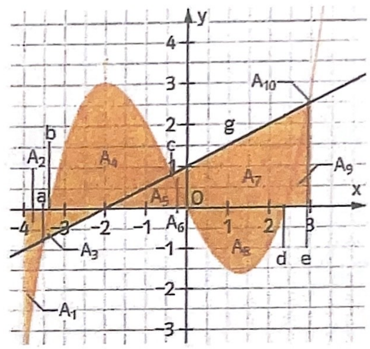


1. Funktionsterme bestimmen: $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x - 1$
2. Schnittstellen bestimmen: $(-1; -3)$ $(3; 5)$
3. Differenzfunktion integrieren:

$A = \left| \int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3\,dx \right| = \left| \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \Big|_{-1}^{3} \right| =$

$= \left| \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \right| = 10\frac{2}{3}$

2 a) Drücken Sie den Inhalt der Flächen durch ein oder mehrere Integrale aus:



$A_1 + A_2 =$ ______ [T1]

$A_6 + A_7 + A_8 =$ ______

$A_3 =$ ______

$A_4 =$ ______

b) Benennen Sie folgende Flächen:

Die von den Graphen von f und g eingeschlossene Fläche: ______

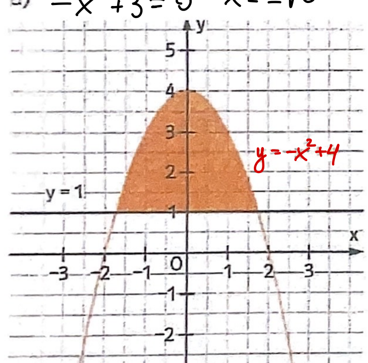
Die von den Graphen von f und g und der x-Achse eingeschlossenen Flächen: ____, ____, ____ und ____

Die von den Graphen von f und g, der x-Achse und der Geraden $x = -4$ eingeschlossene Fläche: ______

$6{,}4 \cdot 4 - \int_{1}^{4} \frac{1}{10}x^3\,dx$

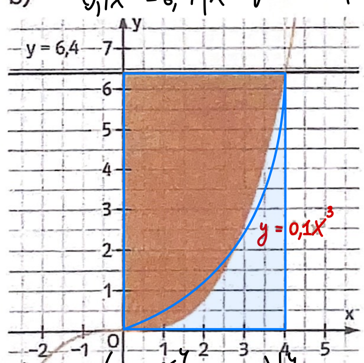
3 Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

a) $-x^2 + 3 = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$



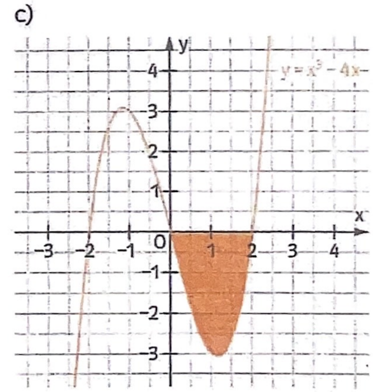
$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -x^2 + 3\,dx \approx 6{,}9$

b) $0{,}1x^3 = 6{,}4 \,|\, x = \sqrt[3]{64} = 4$

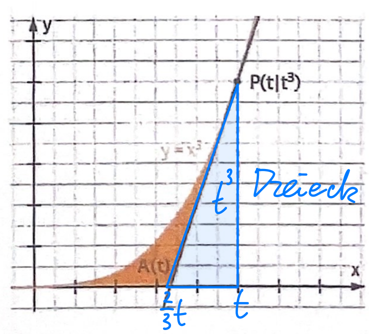


$\int_{0}^{4} 0{,}1x^3 - 6{,}4 = \left(0{,}1 \cdot \frac{x^4}{4} - 6{,}4x\right)\Big|_0^4 = -19{,}2$

c)



4 Zeigen Sie: Für den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f mit $f(x) = x^3$, der Tangente an den Graph in $P(t \mid t^3)$ und der x-Achse eingeschlossen wird, gilt: $A(t) = \frac{1}{12}t^4$, $(t > 0)$.



Tangentengleichung: ______

______

Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse:

______

Flächeninhalt: ______

[T1] Beachten Sie, dass Integrale auch negative Werte annehmen können, Flächeninhalte aber stets positiv sind.

$$T(x) = mx + b = 3t^2x + b = 3t^2x - 2t^3$$

$$m = f'(x) = 3t^2$$

$$3t^3 + b = t^3$$

$$b = -2t^3$$

$A_{Dreieck}$

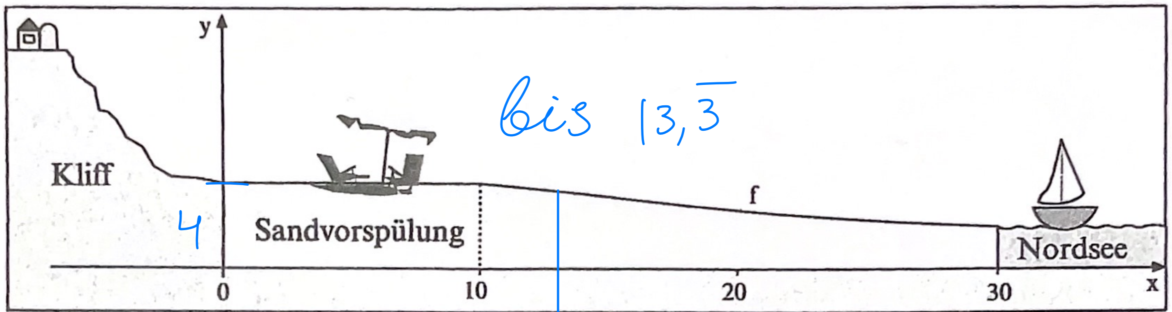
$$\left(\int_0^t x^3\right) - \boxed{\frac{1}{2} \cdot t^3 \cdot \left(t - \frac{2}{3}t\right)} = \frac{t^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^4 =$$

$$= \frac{3t^4 - 4t^4}{12} =$$

$$= -\frac{1}{12}t^4$$

Wir betrachten nun ein modellhaftes Anwendungsproblem mit einer gebrochen-rationalen Funktion als Integrand.

bis $13,\overline{3}$



Beispiel: Sandvorspülung
Die Steilküste einer Nordseeinsel bricht durcht die Gewalt der herbstlichen See immer wieder ab. Daher wird sie durch regelmäßige Sandvorspülungen geschützt. In einem 500 m breiten Küstenabschnitt besteht die Vorspülung aus einem 10 m breiten ebenen Strandstreifen und einem 20 m breiten Abhang, der durch die Profilkurve $f(x) = \frac{400}{x^2}$ angenähert beschrieben werden kann.
Es soll ermittelt werden, ob die zur Verfügung stehenden 25 000m³ Sand ausreichen.

zeicht nicht aus

$f(10) = \frac{400}{10^2} = 4$

$A = 4 \cdot 10 + \int_{10}^{30} 400 \cdot x^{-2} = 40 + 400 \int_{10}^{30} x^{-2} = 40 + 400 \cdot \left(\frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{10}^{30} \right) =$

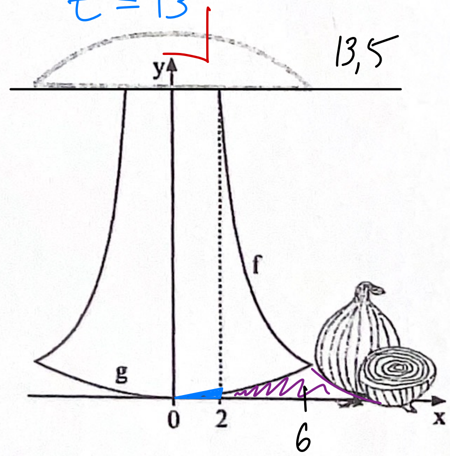
$= 40 + 400 \left(-\frac{1}{x} \Big|_{10}^{30} \right) = 40 + 400 \left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{10} \right) = 66\frac{2}{3}$

$V = 500 \cdot A = 33\,333,\overline{3}\ m^3$

$A = 50$

$40 + 10, \quad -\frac{1}{x}\Big|_{10}^{t} = 0,025 \quad -\frac{1}{t} + \frac{1}{10} = 0,025 \quad t = 13$

Übung 4
Ein Messer zum Zerteilen von Zwiebeln hat angenähert die abgebildete Form mit den Profilkurven $f(x) = \frac{54}{x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{24}x^2$. Wie groß ist die Querschnittsfläche des Messers? Wie schwer ist die im Durchschnitt 3 mm dicke Stahlklinge?
(Dichte von Stahl: $\rho = 7{,}87\ \frac{g}{cm^3}$).



$\frac{x^2}{24} = \frac{54}{x^2} \qquad x = \pm 6$

08.05.2025

$f(2) = \frac{54}{4} = 13{,}5$

$$\left(13{,}5 \cdot 2 - \frac{1}{24}\int_0^2 x^2 dx + 54\int_2^6 \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{24}\int_2^6 x^2 dx\right) \cdot 2 =$$

$$= 2\left(27 - \frac{1}{24}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) + 54\left(-\frac{1}{x}\Big|_2^6\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_2^6\right)\right)$$

$$= 84 \leftarrow A$$

$$V = 84 \cdot 0{,}3 = 25{,}2\ cm^3$$

$$m = \rho \cdot V = 7{,}87\ g/cm^3 \cdot 25{,}2\ cm^3 = 198{,}3\ g$$

Analysis:
1. Differenzialrechnung (+ in einem Sachkontext) 30P
2. Integralrechnung 20P
3. Geometrisches Wachstum (Folge) 10P

Lineare Algebra:
1. Vektorrechnung (+ in einem Sachkontext) 30P
2. Basis, Dimension, lineare Unabhängigkeit 10P

12.05.2025

$$f(x) = \frac{1}{300}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{13}{50}x$$

$f'(3)$ – Momentane Änderung der Regenmenge

b) $\dfrac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = 0{,}07\overline{3}$

c) $T(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$

$T(12) = \dfrac{26}{75} + \dfrac{1}{10} \cdot 10 = 1{,}34\overline{6}$

Wenn die Regenintensität so geblieben wäre wie in der 2. Stunde, dann hätten wir nach
wir nach 12 Stunden eine Regenmenge von 1.35l

d) Es gab keinen Zeitpunkt an dem es nicht geregnet hat, es hat immer geregnet.

Regenmenge f(x) streng monoton wachsend. f'(x) > 0 (Änderung der Regenmenge positiv)

$$f(x) = \frac{1}{300}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{13}{50}x$$

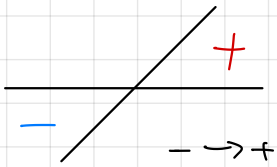
$$f'(x) = 0{,}01x^2 - 0{,}1x + 0{,}26 = 0{,}01(x^2 - 10x + 26) =$$

$$= 0{,}01(x^2 - 10x + 25 + 1) =$$

$$= 0{,}01(\underbrace{(x-5)^2}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0}) > 0$$

$f''(x) = 0{,}02x - 0{,}1 = 0$ Wendestelle

$x_0 = 5$ – Notwendige Bedingung



Hinreichende Bedingung

− → + : Minimum

$f'(5) = \frac{1}{100} \frac{\ell}{h}$

$f'(x) = 0$

$f''(x) \neq 0$

$f(x) = 2x \cdot \sin(x) - (x^2-3) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = (2x)' \cdot \sin(x) + 2x \cdot (\sin(x))' - (x^2-3)' \cos(x) - (x^2-3)(\cos(x))' =$

$= 2\sin(x) + \cancel{2x\cos(x)} - \cancel{2x\cos(x)} + (x^2-3)\sin(x) =$

$= \sin(x)(2 + x^2 - 3) = \sin(x)(x-1)(x+1)$

globales
lokales Extremum

13.05.2025

$$f(x) = 2x \cdot \sin(x) - (x^2-3)\cdot\cos(x)$$

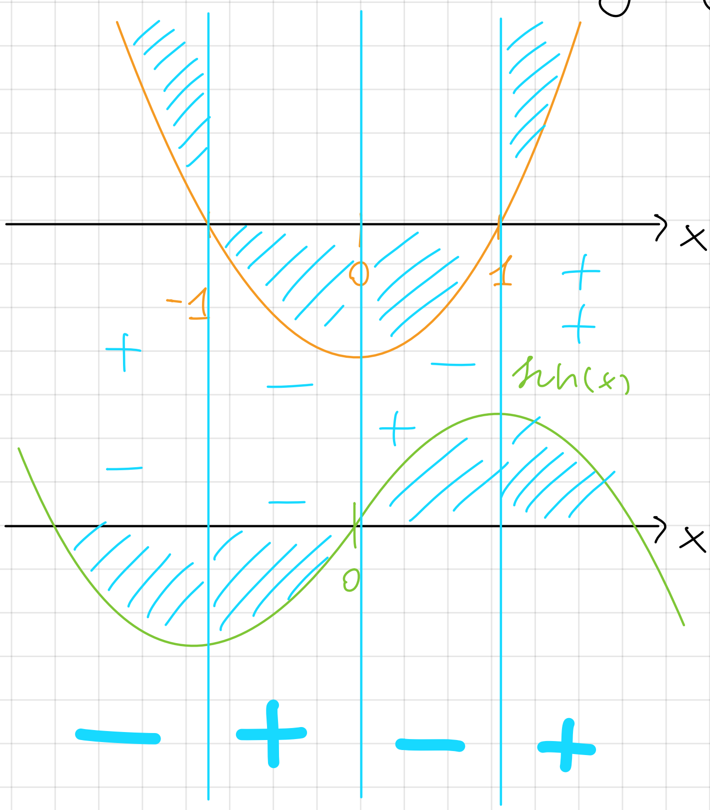
$$f'(x) = (2x)' \cdot \sin(x) + 2x\cdot(\sin(x))' - (x^2-3)'\cos(x) - (x^2-3)(\cos(x))' =$$
$$= 2\sin(x) + 2x\cancel{\cos(x)} - 2x\cancel{\cos(x)} + (x^2-3)\sin(x) =$$
$$= \sin(x)(2+x^2-3) = \sin(x)(x-1)(x+1)$$

Notwendige Bedingung $f'(x) = 0 \iff x_1 = -1$

$x_2 = 0 \quad (x_{2k} = k\pi)$

$x_3 = 1$

Hinreichende Bedingung: bei $x = \pm 1$ hat f' einen $(-|+)$ VZW, d.h. lokale Minima; bei $x=0$ hat f' einen $(+|-)$ VZW, d.h. lokales Maximum



$+ \to -$ Max

$- \to +$ Min

b) g differenzierbar

Suche $\left(\frac{1}{g}\right)'$ mit h-Methode

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} = -g'(x)\cdot \frac{1}{g(x)^2} =$$

$$= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

c) $f(x) = tx^3 - 3x^2 + 9x$

$f'(x) = 3tx^2 - 6x + 9$

$f''(x) = 6tx - 6$

$0 = 6t\cdot 3 - 6$

$t = \frac{1}{3}$

$x = 3$ Wendestelle

$f''(3) = 0$

Studienkolleg des Ökumenischen Studienwerks e.V. für ausländische Studierende in Bochum
staatlich genehmigt, Girondelle 80, 44799 Bochum

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschulreife

Mathematik - Teil Analysis

Arbeitszeit: 105 Minuten | Hilfsmittel: Wissenschaftlicher Taschenrechner

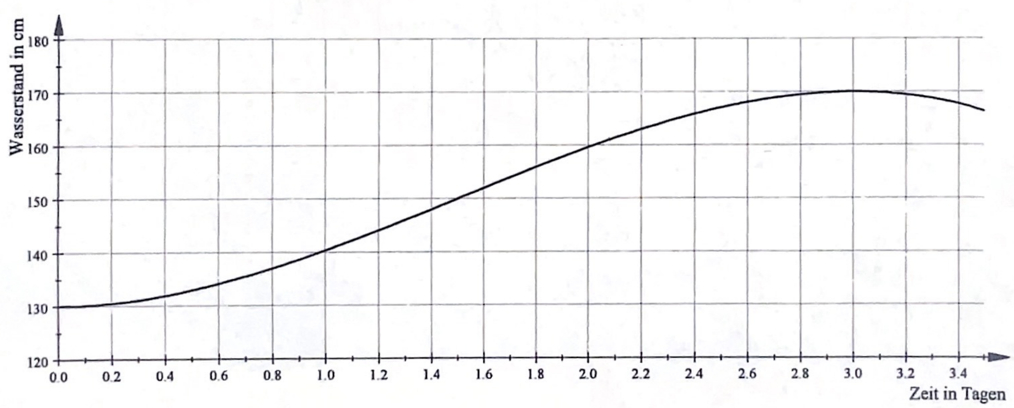
Familienname: | Vorname:

1. Differenzialrechnung im Sachkontext (30 Punkte):

Aufgrund starker Regenfälle wurde im Oktober 2016 ein Ansteigen des Wassers am Rhein beobachtet. An einer Messstelle in Bonn wurde am 20. Oktober um 0:00 Uhr ein Wasserstand von 130 cm gemessen. Für die Höhe des Wasserspiegels kann die folgende Funktion verwendet werden.

$$h(t) = -\frac{80}{27}t^3 + \frac{40}{3}t^2 + 130, \quad 0 \leq t \leq 3.5$$

Dabei entspricht $t = 0$ der Zeit 0:00 am 20. Oktober, $t = 1$ der Zeit 0:00 Uhr am 21. Oktober und $t = 3.5$ der Zeit 12:00 Uhr am 23. Oktober. Der Graph von h ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



a) Berechnen Sie den Wasserstand am 21. Oktober 2016 um 12.00 Uhr.

b) Berechnen Sie $\frac{h(3) - h(1)}{2}$. Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachkontext.

c) Ermitteln Sie rechnerisch den minimalen und maximalen Wert im betrachteten Zeitraum.

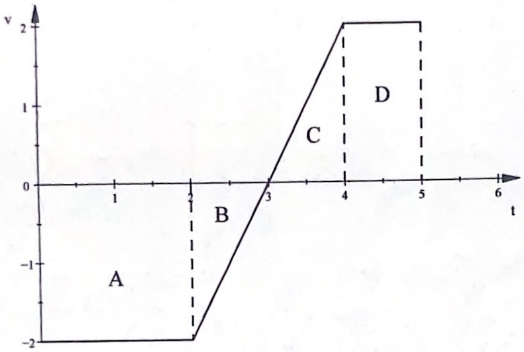
d) Zu welchem Zeitpunkt steigt das Wasser am schnellsten? Geben Sie die zugehörige Zunahme an.

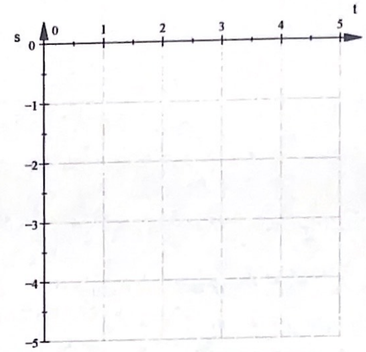
e) Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Wahl!

- h' ist in $]0, 3[$ positiv
- h'' ist in $]0, 3[$ negativ
- Es gilt $h''(1) < h''(2)$
- Der Graph von h ist in $[\frac{3}{2}, 3]$ eine Rechtskurve

2. Integralrechnung (20 Punkte):

a) Bei einem Experiment wurde die Geschwindigkeit v (in $\frac{cm}{s}$) einer Kugel in Abhängigkeit der Zeit t (in s) aufgezeichnet. Bei der Bewegung der Kugel nach rechts wird die Geschwindigkeit mit einem positiven Vorzeichen versehen, bei der Bewegung nach links mit einem negativen.





Bestimmen Sie mithilfe des orientierten Flächeninhalts zwischen Graph und der Zeitachse, wo sich die Kugel nach 5 Sekunden befindet. Skizzieren Sie den Graph der Stammfunktion und bestätigen Sie das Ergebnis.

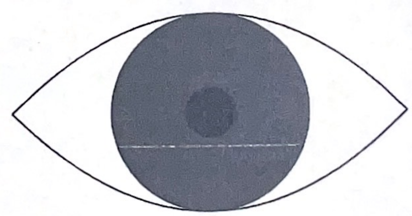
b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\, dx, \qquad \int e^{x} \cdot \sin(x)\, dx$$

c) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{8}x\cdot(x-8),\ g(x) = \frac{1}{8}x\cdot(x-8),\ 0 \leq x \leq 8$$

sowie die Kreise mit Mittelpunkt $M(4|0)$ und den Radien $r = 2, r = 0.5$. Berechnen Sie den Inhalt der weißen Fläche des "Auges". Überlegen Sie zunächst, wie Sie den Inhalt einfach darstellen können.



3. Das Horner-Schema (10 Punkte):

a) Schreiben Sie das Polynom p

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

in Horner-Darstellung. Welche ursprüngliche Idee verfolgte Horner?

b) Lösen Sie die polynomiale Ungleichung graphisch. Faktorisieren Sie zuerst die linke Seite der Ungleichung mithilfe des Horner-Schemas

$$x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 \leq 0$$

VIEL ERFOLG :-)

Name: Kurs: A ☐ B ☐

Kurse A/B, SS 2025	**3. Math.-Ausgleichsklausur / LINA**	**im April 2025**

4. Vektorrechnung (30 Punkte):

Eine Lampe im Punkt $L(15|8|0)$ strahlt einen Punkt $P(10|10|1)$ an.

a) Stellen Sie den Lichtstrahl als Gerade dar.

b) Wie weit sind die Punkte L und P voneinander entfernt?

c) Wo trifft der Lichtstrahl durch P auf die Wand, die in der y-z-Ebene liegt?

d) In welchem Winkel trifft der Lichtstrahl auf die Wand?

e) Ohne Sachkontext: Berechne den Abstand, den der Punkt $P(1|2|0)$ von der Ebene

$$E: 2x + y + 2z = 1$$

hat.

- Benutzen Sie das Lotfußpunktverfahren
- Benutzen Sie die Abstandsformel

5. Das Vektorprodukt (10 Punkte):

a) Berechne -falls möglich- die Vektorprodukte:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1}, \qquad \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix},$$

b) Gegeben sind der Punkt $P(1|c|1)$ mit $c \in \mathbb{R}$ und die Gerade g mit

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Berechne $c \in \mathbb{R}$ so, dass der Abstand von P zur Geraden g den Wert $\sqrt{5}$ hat.
Tipp: Benutzen Sie die Abstandsformel.

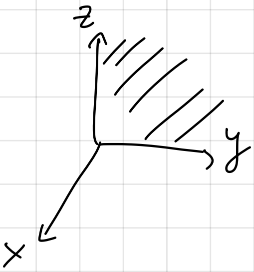
Viel Erfolg :)

(4)

a) $g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $d = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

c)



$\vec{E}: \vec{x}(\tau, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$0 = 15 - 5t$

$\tau = 8 + 2t$

$s = t$

$t = 3$

$\tau = 8 + 2 \cdot 3 = 14$

$s = 3$

$$\vec{x}(3) = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$D(0|14|3)$

Gegeben sind der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

Formel zur Berechnung des Abstandes:

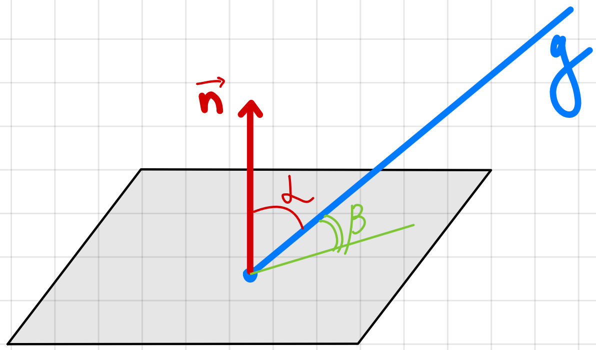
$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Ebene in Koordinatenform

$E: \quad x = 0$

$15 - 5z = 0 \qquad z = 3$

c)



$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = |\vec{n}|\,|\vec{u}| \cos\alpha$

$-5 = \sqrt{30} \cos\alpha$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{30}}\right) = 155{,}9°$

$\beta = \alpha - 90° = 65{,}9°$

e) $E: \quad 2x + 1y + 2z = 1$

Abstandsformel:

$$d(P,E) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

Lotfußpunktverfahren:

$$g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ ← Lotgerade aufstellen

Lotfuß berechnen: $(g \cap E)$

$$\begin{pmatrix} 1+2\tau \\ 2+\tau \\ 2\tau \end{pmatrix}$$ in E einsetzen

$$2(1+2\tau) + 2+\tau + 2\cdot 2\tau = 1$$

$$2 + 4\tau + 2 + \tau + 4\tau = 1$$

$$9\tau = -3$$

$$\tau = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{x}\left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad F\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{5}{3} \middle| -\frac{2}{3}\right)$$ Lotfußpunkt

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$d(P,E) = d(P,F) = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+3\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -e_3$

$$\begin{array}{cc} \cancel{0} & \cancel{1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{array} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

b) $P(1|c|1)$ $\quad d(g,P) = \sqrt{5}$ $\quad c - ?$

$g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \tau \boxed{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}} \vec{u}$ Abstandsformel

$$d(g,P) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix}2c\\0\\-c\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \sqrt{5c^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}|c| = \sqrt{5}$$

$|c| = 3 \qquad c = \pm 3$

Studienkolleg des Ökumenischen Studienwerks e.V. für ausländische Studierende in Bochum
staatlich genehmigt, Girondelle 80, 44799 Bochum

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschulreife

Mathematik – Teil Vektorrechnung

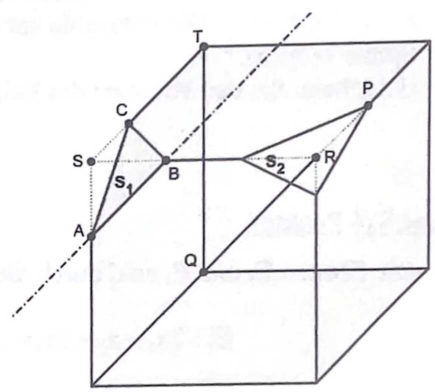
Arbeitszeit: 75 Minuten Hilfsmittel: Wissenschaftlicher Taschenrechner

Familienname: ______________________ Vorname: ______________

<u>Aufgabe 4 (32 Punkte)</u>

Von einem Würfel aus Stahl wurden die Ecken R(6|6|6) und S(6|0|6) abgeschnitten. (Siehe Abbildung.)

(Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter. Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.)



a) Die Punkte A(6|0|3) und B(6|3|6) liegen auf einer Kante des bearbeiteten Würfels.

(i) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g an, die die Punkte A und B enthält.

(ii) Prüfen Sie, ob der Punkt Z(6| -6| 0) auf der Geraden g aus Teilaufgabe a) (i) liegt.

b) Die Schnittfläche S_1 liegt in der Ebene E_1, die durch die folgende Gleichung gegeben ist

$$E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

(i) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E_1. Zeigen Sie, dass der Punkt C(3|0|6) in E_1 liegt.

(ii) Geben Sie eine Koordinatengleichung einer Ebene an, die zu E_1 echt parallel ist. *(Angabe der Gleichung **ohne Rechenweg oder Begründung** reicht.)*

(iii) Geben Sie die Parametergleichung einer Geraden an, die zu E_1 orthogonal ist. *(Angabe der Gleichung **ohne Rechenweg oder Begründung** reicht.)*

(iv) Die Schnittfläche S_2 liegt in der Ebene E_2. E_2 ist orthogonal zur Strecke $\overline{QR}$ mit Q(0|0|0) und R(6|6|6) und enthält den Punkt P(4|6|6). Geben Sie eine Normalengleichung von E_2 an. *(Angabe der Gleichung **ohne Rechenweg oder Begründung** reicht.)*

Blatt bitte wenden!

a) $g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$, weil $-3 \neq 0 \cdot \tau$

b) $E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 =$$

$$= -3 + 3 = 0 = 0$$

$E_1: x + 2y + 3z = 4$

$E_2: 2x + 4y + 6z = 8$ $\qquad E_1 \parallel E_3$, $E_1 \neq E_3$

$E_3: x + 2y + 3z = 5$ $\qquad E_1 = E_2$

iii) $g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iv) $E_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 16$

Fortführung von Aufgabe 4

c) Mit einem Laser wird ein Bohrkanal vom Punkt B(6|3|6) zum Punkt D gebohrt. Der Bohrkanal verläuft orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_2 = 0$, in der auch der Punkt D liegt.

(i) Bestimmen Sie die Koordinaten von D. *(Zur Kontrolle: D(4,5|4,5|6).)*

(ii) Berechnen Sie die Länge des Bohrkanals $\overline{BD}$.

(iii) Ermitteln Sie die Größe des Winkels zwischen dem Bohrkanal $\overline{BD}$ und der Kante $\overline{AB}$ des bearbeiteten Stahlwürfels. *(Zur Erinnerung: A(6|0|3).)*

(iv) Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Eckpunkt A und der Ebene $E: x_1 - x_2 = 0$.

d) Nun wird ein Eckstück des Stahlwürfels abgeschnitten, das die Form einer dreiseitigen Pyramide besitzt. Die Pyramide hat die Eckpunkte L(2|0|6), M(0|0|4), N(0|2|6) und die Spitze T(0|0|6).
Berechnen Sie das Volumen des Eckstücks mithilfe des Spatprodukts.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Die Ebenen E_1 und E_2 sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad \text{und} \quad E_2: 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -2\,.$$

Bestimmen Sie die Koordinatengleichungen aller Ebenen F, für die Folgendes gilt:
Jeder Punkt P von F hat denselben Abstand zu E_1 wie zu E_2, d.h. $d(P; E_1) = d(P; E_2)$.

Viel Erfolg! ☺

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$ (richtog)

Kreuzprodukt – $\boxed{\text{richtig nur für } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0}$!

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sin\alpha$$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$ (falsch)

$$g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix}9\\-8\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

H – Hilfsebene

$H: \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$ Parameterform

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$H: 2x + 2y + z = \boxed{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ von g $\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{n}}$

$$d(g,h) = d(h,H) = d\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}9\\-8\\6\end{pmatrix}}_{P \text{ von } h \text{ (Gerade)}}, H\Big)$$

Fortführung von Aufgabe 4

c) Mit einem Laser wird ein Bohrkanal vom Punkt B(6|3|6) zum Punkt D gebohrt. Der Bohrkanal verläuft orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_2 = 0$, in der auch der Punkt D liegt.

(i) Bestimmen Sie die Koordinaten von D. *(Zur Kontrolle: D(4,5|4,5|6).)*

(ii) Berechnen Sie die Länge des Bohrkanals $\overline{BD}$.

(iii) Ermitteln Sie die Größe des Winkels zwischen dem Bohrkanal $\overline{BD}$ und der Kante $\overline{AB}$ des bearbeiteten Stahlwürfels. *(Zur Erinnerung: A(6|0|3).)*

(iv) Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Eckpunkt A und der Ebene $E: x_1 - x_2 = 0$.

d) Nun wird ein Eckstück des Stahlwürfels abgeschnitten, das die Form einer dreiseitigen Pyramide besitzt. Die Pyramide hat die Eckpunkte L(2|0|6), M(0|0|4), N(0|2|6) und die Spitze T(0|0|6).
Berechnen Sie das Volumen des Eckstücks mithilfe des Spatprodukts.

<u>Aufgabe 5 (8 Punkte)</u>

Die Ebenen E_1 und E_2 sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad \text{und} \quad E_2: 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -2\,.$$

Bestimmen Sie die Koordinatengleichungen aller Ebenen F, für die Folgendes gilt:
Jeder Punkt P von F hat denselben Abstand zu E_1 wie zu E_2, d.h. $d(P; E_1) = d(P; E_2)$.

Viel Erfolg! ☺

Übungen zum Geometrischen Wachstum

1. Geometrische Reihe

Berechnen Sie die folgenden geometrischen Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^{2n}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{3^k}$$

2. Geometrische Folge

Es ist die geometrische Folge $(b_n) = (3, 6, 12, 24, \cdots)$ gegeben.

a) Geben Sie ein rekursives und explizites Bildungsgesetz an.

b) Berechnen Sie den Wert b_{10}.

c) Das wievielte Folgeglied ist $b_n = 1572864$?

d) Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Folgeglieder.

3. Geometrische Folge im Sachkontext

Mäuse vermehren sich unter bestimmten Bedingungen sehr schnell. Die Anzahl der Jungtiere, die in einer Generation geboren werden, kann durch das nachstehende rekursive Bildungsgesetz beschrieben werden.

$$a_n = a_{n-1} \cdot 5, \qquad a_1 = 20$$

a) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (a_n).

b) Berechnen Sie, in der wievielten Generation erstmals 500 Jungtiere geboren wurden.

4. Gemischte Folge im Sachkontext

72 Ein Studierender des Studienkollegs Bochum lernt jeden Tag drei Seiten auswendig, über Nacht vergisst er 4% seines Wissens. Stellen Sie das Wissen des Studierenden als rekursive Folge (w_n) mit $w_0 = 0$ auf und berechnen Sie sein Wissen für $n \to \infty$.

$$w_n = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{96}{100}\right)^k = 3 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{96}{100}\right)^{n+1}}{1 - \frac{96}{100}} - 1 \right)$$

$$w_0 = 0$$

$$w_1 = 0{,}96(w_0 + 3) = 3 \cdot \frac{96}{100}$$

$$w_2 = 0{,}96(w_1 + 3) = 3 \cdot \left(\frac{96}{100}\right)^2 + 3 \cdot \frac{96}{100} + 3 \cdot \left(\frac{96}{100}\right)^0$$

$$w_{n+1} = (w_n + 3) \cdot \frac{96}{100}$$

$$g = (g + 3) \cdot \frac{96}{100}$$

$$\frac{4}{100} g = 3 \cdot \frac{96}{100} \Rightarrow g = 72$$

$$w_0 = 3$$

c) Ein Turm aus Würfeln soll gebaut werden. Jeder nachfolgende Würfel hat nur noch neun Zehntel der Höhe des vorhergehenden Würfels. Wie hoch ist der Turm aus 20 Würfeln, wenn der erste Würfel eine Kantenlänge von 10 cm hat? Wie hoch wird der Turm, wenn man den Prozess unendlich fortsetzt?

$h_0 = 10 \qquad k = 0{,}9$

$h_1 = h_0 + k h_0 = h_0(1+k)$

$h_2 = h_1 + k h_1 = h_1(1+k) =$

$= h_0 (1+k)^2$

$h_n = h_0 \cdot 1{,}9^{n-1}$

$h_{20} = 10 \cdot 1{,}9^{19}$

$h_n = 10 \cdot 0{,}9^{n-1}$

$$10 \sum_{k=0}^{19} 0{,}9^k = 10 \cdot \frac{1-0{,}9^{20}}{1-0{,}9} = 87{,}843 \quad \to n = 20$$

$$10 \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}9^k = 10 \cdot \frac{1}{1-0{,}9} = 100 \quad \to n = \infty$$

19.05.2025

geometrische Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_0 \cdot q^n$

explizite Bildungsgesetz

$a_{n+1} = a_n \cdot q$

rekursives Bildungsgesetz

geometrische Summe $a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$

geometrische Folge $a_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = a_0 \dfrac{1}{1-q}$, $|q|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^{2n}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k - 1}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} - \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + 1 =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$(a_n) = (3 \xrightarrow{\cdot 2} 6 \xrightarrow{\cdot 2} 12 \xrightarrow{\cdot 2} 24, \dots)$$

rekursives $a_{n+1} = 2a_n$, $a_0 = 3$

explizites $a_n = \overset{a_1}{\boxed{3}} \cdot 2^{n-1}$, $a_1 = 3$ $n \in \mathbb{N}$

$a_n = \underset{a_0}{\boxed{3}} \cdot 2^n$, $a_0 = 3$ $n \in \mathbb{N}_0$

$a_{10} = 3 \cdot 2^{10} = 3 \cdot 1024 = 3072$

$$a_n = 1\ 572\ 864$$
$$n = \log_2 (1\ 572\ 864 : 3) = 19$$

$$3 \sum_{k=0}^{9} 2^k = 3 \quad \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3069$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot 5 \qquad a_1 = 20$$

$$a_n = 20 \cdot 5^{n-1}$$

$$20 \cdot 5^{n-1} \geq 500$$
$$n-1 \geq \log_5 (500 : 20) = 2$$
$$n \geq 3$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx \qquad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \cos(bx) \qquad f(x) = \sin(bx) : b$$
$$g(x) = \sin(ax) \qquad g'(x) = \cos(ax) \cdot a$$

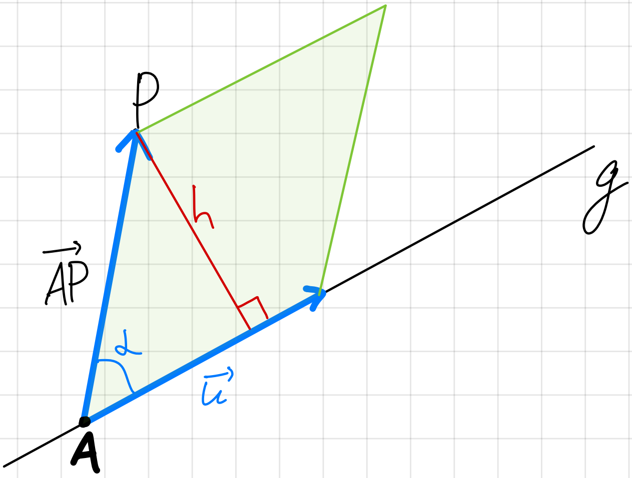
$$\boxed{\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx} = \frac{\sin(bx)\,\sin(ax)}{b} - \frac{a}{b}\boxed{\int \sin(bx)\cos(ax)\,dx}$$
$$\boxed{\int \sin(bx)\cos(bx)\,dx} = \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{a} - \frac{b}{a}\boxed{\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx}$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx =$$

$$= \frac{\sin(bx)\,\sin(ax)}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{a} - \frac{b}{a}\int \sin(ax)\cos(bx)\right)$$

$$=$$

20.05.2025



$$|\vec{AP} \times \vec{u}| = |\vec{AP}| \cdot |\vec{u}| \cdot \sin\alpha = |\vec{u}| \cdot h$$

$$\sin\alpha = h : |\vec{AP}|$$

$$\boxed{h = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}}$$

d(Punkt, Gerade)

$\vec{u}$ - Richtungsvektor der Gerade

h - Abstand vom Punkt zur Gerade

$$\frac{|\vec{AP} \bullet \vec{n}|}{|\vec{n}|} = d$$

d(Punkt, Ebene)

$\vec{n}$ - Normalenvektor der Ebene

$$g: \vec{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(-4 \mid -1 \mid 3)$$

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12$$

$$-2x - 4y = 12$$

$$x + 2y = 12$$

$$6 - 2\tau + 2(4 + 4\tau) = 12$$

$$\tau = 2$$

$$|\vec{SP}| = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{SP}| = 7$$

$$d(P, g) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5}} = 7$$

$A(0|0|2)$ $B(4{,}5|0|1)$ $C(6|1|0)$

$D(3|2|0)$ $E(0|1{,}5|1)$

a)

$E_1 : 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 18$ $\qquad B \in E_1$

$2 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 0 + 9 = 9 + 9 = 18 = 18$

$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 18 \qquad \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{a}) \bullet \vec{n} = 0$

$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

b) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{BC}) - ?$ $\qquad \overset{A}{\overrightarrow{BA}} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overset{B}{\overrightarrow{BC}} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\alpha$

$\alpha = \arccos\left(\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} : (|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|)\right) = 144{,}64^\circ$

21.05.2025

$$r_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

$$2r_1 + r_2 = 0$$

$$2r_3 = 0$$

$$r_1 + 2r_2 + r_3 = 0$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} : a = -b \,,\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Basis enthält 3 Vektoren

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{l.u.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$r + s + t = 1 \quad \Rightarrow r = -1$

$s = 1$

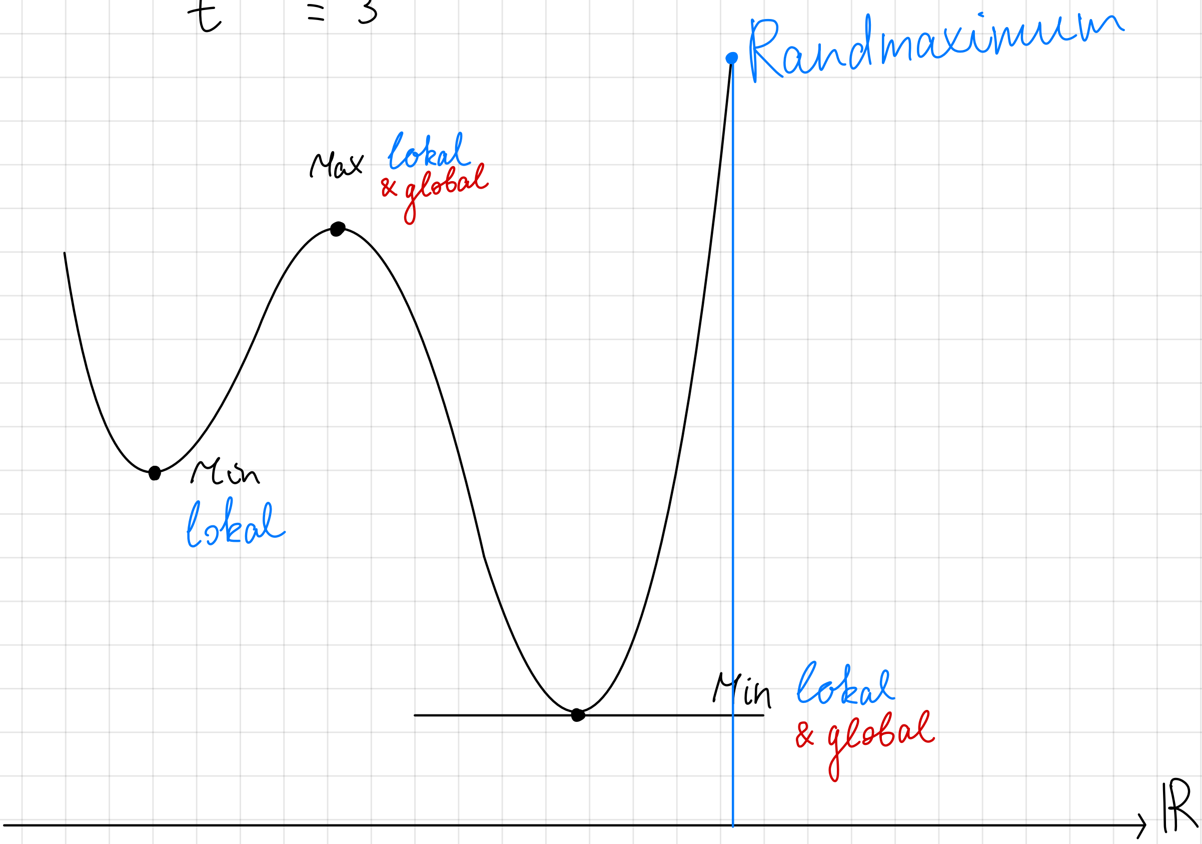
$t = 1$

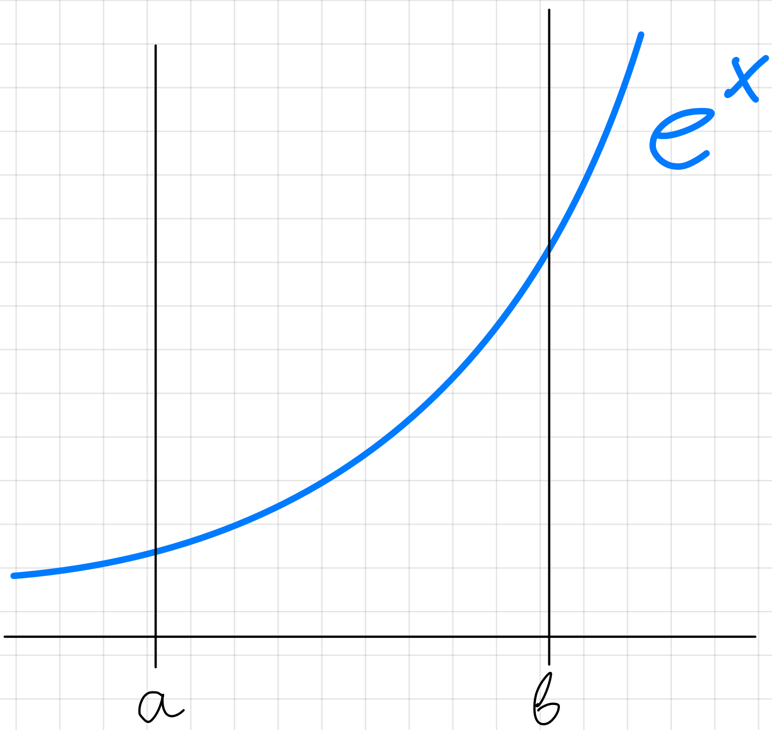
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Basis}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r + s + t &= 7 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \\ s &= 2 \\ t &= 3 \end{aligned}$$





Fliege $h: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$

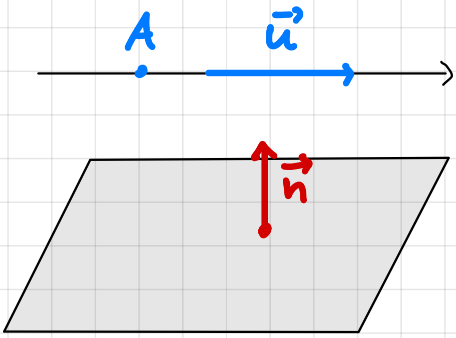
a) $H(-1 | 4 | 2)$

b) $E_s: 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 18$

$2(-1+3z) + 6(4+5z) + 9(2-4z) \neq 18$

$-2 + 6z + 24 + 30z + 18 - 36z \neq 18$

$40 \neq 18$



$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 6 + 30 - 36 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$

Lotgerade $g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt $g \cap E_s = \{F\}$ $\qquad z = -\frac{2}{11}$

$F\left(-\frac{15}{11} \middle| \frac{32}{11} \middle| \frac{4}{11}\right)$

$|\overrightarrow{HF}| = 2$