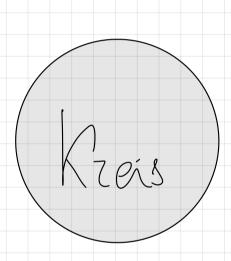


Die Bewegung einer punktförmigen Masse auf einem Kreis

punktförmig <--> ausgedehnt; Bezug: ein Körper

Bei einer Kreisbewegung eines ausgedehntes Körpers besitzt jeder Punkt des Körpers eine andere Geschwindigkeit, denn diese ist vom Abstand zu Drehpunkt abhängig. Deshalb besitzt jeder Punkt des Körpers auch eine eigene Energie und einen eigenen Impuls. Dieses physikalische Problem wird mithilfe des Trägheitsmoments beschrieben. Bei einem punktförmigen Körper tritt dieses Problem nicht auf.



Durchmesser D = 2R

R: Radius: Direkte Verbindung zum Zentrum C zu einem Punkt auf dem Kreisrand

Kreisumfang ($U = 2\pi R$)

Gradsystem (360° ist éine geometrische Einteilung des Kreises in gleichgroße Abschnitte / Sektoren) Winkelgeschwindigkeit

Radiantsystem $2\pi = 2*3.14 = 6.28$ (gibt die gleiche Information, wobei 2π entspricht 360° (^und=)) Tangente an den Kreis: Ein Grade, die den Kreis berührt und mit dem Radius an dieser Stelle einen Winkel von 90° hat.

Sekante: Sie schneidet den Kreis in zwei Punkten.

 $A = \pi R^2$

Aus der Gleichung U= $2\pi R$ folgt U/R=konst. Dieses Verhältnis gilt für alle Kreise; d.h. der vollständige Kreiswinkel für einen ganz Kreisumfang hat den Wert U/R= Δ (fi) = 2π .

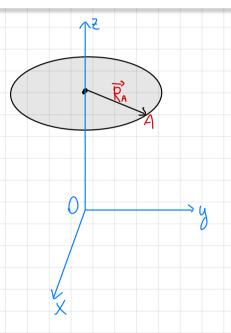
Wenn die auf dem Kreis zurückgelegte Strecke nur U/2 ist, dann gilt: U/2R = π ; das ist nur die Hälfte vom vollständigen Kreiswinkel $\Delta(fi)_{\text{voll}}$.

U/2 nennt man dann den Bogen b und aus der Gleichung U= $2\pi R$ erhält man die Gleichung b= $\Delta(fi)R$, wobei $0<=\Delta(fi)<=2\pi$

Basisgleichung; $b=\Delta(fi)R$ Hier gibt es keinen Vektor!

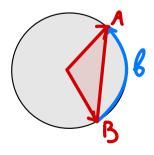
Eine direkte Verbindung vom Kreiszentrum zum Kreisrand hat eine Richtung und ist deshalb ein Vektor: R_{A} "Radiusvektor des Punktes A"

$$\overrightarrow{R}_{A} = \begin{pmatrix} R_{A}(x) \\ R_{A}(y) \\ R_{A(2)} \end{pmatrix} M$$

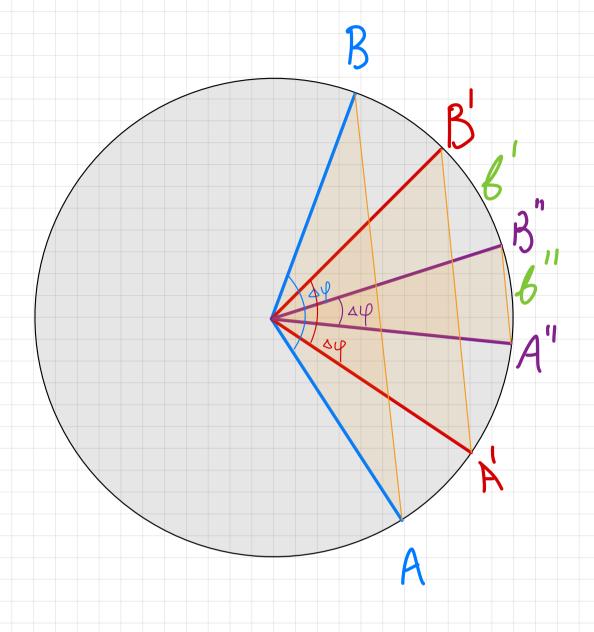


Der Radius ist eigentlich nicht nur eine Zahl, mit Einheit, sondern er hat auch eine Richtung. In der Basisgleichgung für den Kreis sieht das dann so aus:

Wenn das stimmt, dann muss b auch ein Vektor sein:



d.h. b und R sollten sie kollineare Vektoren sein.b liegt auf dem Kreisrand und R ist senkrecht zum Kreisrand; d.h. die können niemals kollinear sein! Außerdem kann b kein Vektor sein, weil es keine direkte Verbindung von den Punkten A und B ist



Die Punkte A und B kommen immer näher zusammen. Dabei wird der Winkel $\Delta(fi)$ immer kleiner. $\Delta(fi)$ --> d(fi) (unendlich klein).

$$\Delta R = AB \longrightarrow dAB = dR$$

b --> db

dAB db befinden sich an der gleichen Stelle und sind identisch --> es gibt keinen Unterschied zwischen dAB und db

Das bedeutet, dass auch db eine Vektoreigenschaft hat, d.h. es ist eine direkte Verbindung zwischen den Punkten A und B, die unendlich eng beieinander liegen: db

Wichtig: b (der Bogen) ist kein Vektor, weil er nicht die direkte Verbindung von Punkt A mit Punkt B ist.

Zusammenfassung:

$$U = (2 * \pi) * R < -- Mathe$$

^ $\Delta(fi)$; ein Winkel, der zu U gehört

$$b = \Delta(fi) * R < -- skalare Gleichung$$

R **beginnt** bei C und **endet** bei A, B, ...

* R hat eine Richtung und ist die direkte Verbindung von zwei Punkten => R ist ein Vektor

Wenn man nur einen unendlich kleinen Winkel d(fi) hat (statt $\Delta(f)$), dann gehört dazu ein unendlich kleiner Bogen db, der ein Vektor ist: $db = \Delta d(fi)*R$.

Diese Gleichung ist nur dann korrekt, wenn R und db kollineare Vektoren sind. R beginnt bei C und endet am Kreisrand. db ist identisch dR. dR entsteht aus ΔR --> dR und ist deshalb senkrecht (orthogonal) zu R

R und db sind orthogonal => db = d(fi) * R ist falsch

Das Vektorprodukt erzeigt aus den Vektor A und B einen neuen Vektor C, der senkrecht auf A und B steht.

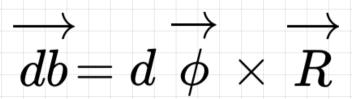
 $db = d(fi) \times R$ (alle Vektoren) ist eine Gleichung, die genau die Eigenschaften, die die Vektoren db und R haben müssen, hat: db (senkrecht) R.

Wie kann man verstehen, dass d(fi) ein Vektor ist?
(fi) ist ein Winkel. Das kann nur ein Skalar sein. (fi) ist **niemals** ein Vektor.

Wenn der Winkel $\Delta(fi)$ sehr klein wird gilt:

 $\Delta(fi) --> d(fi)$ "unendlich klein" = infinitesimal

- $--> \Delta(fi)$ (Vektor) --> d(fi) (Vektor)
- --> b --> db (Vektor) Aus dem Bogen, der ein Skalar ist, wird ein Böglein, das ein Vektor ist
- --> Aus der skalaren Gleichung $b = \Delta(fi)*R$ wird eine vektorielle Gleichung $db(Vektor) = d(fi)(Vektor) \times R(Vektor)$.



Wie kann man dieser Gleichung für Berechnungen zu Kreisbewegung nutzen?

- Welche Strecke hat eine punktförmige Masse auf einem Kreis zurückgelegt? $b = \Delta(fi) * R$
- Welche Geschwindigkeit hat die punktförmige Masse?
 Bei der Kreisbewegung gibt es zwei verschiedene Geschwindigkeiten.

1. Winkelgeschwindigkeit Radiant
$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$
 in Radiant

2. Tangenzialgeschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)

$$\overrightarrow{V}_T = rac{d \overrightarrow{bs}}{\mathrm{d}t}$$
 in $rac{m}{3}$

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung sind das Momentangeschwindigkeiten, für die gilt:

$$\Delta t --> dt$$

$$\overrightarrow{db} = \overrightarrow{d} \stackrel{
ightarrow}{\phi} imes \overrightarrow{R}$$
 1: dt

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi} \times \vec{R}}{dt}$$

$$\vec{S}_{R} = \vec{w} \times \vec{R}$$

Ubungsæufgabe:

$$x^{2} + y^{2} = R$$

$$9 + 16 = R^{2}$$

$$R = 5$$

$$C(x; y)$$

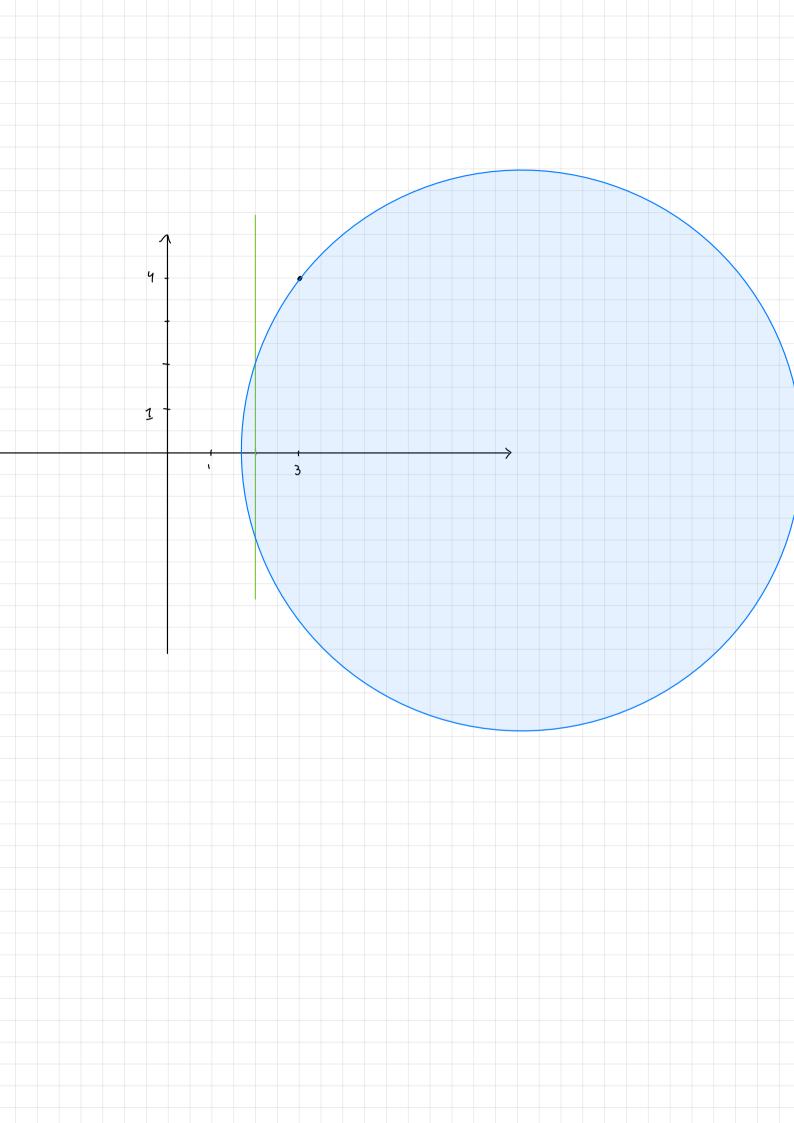
$$\sqrt{(3-x)^{2} + (y-y)^{2}} = 5$$

$$2^{2} + y_{3}^{2} = 25$$

 $y = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} =$

$$y_{B} > 0$$

$$y_{D} = -y_{B}$$

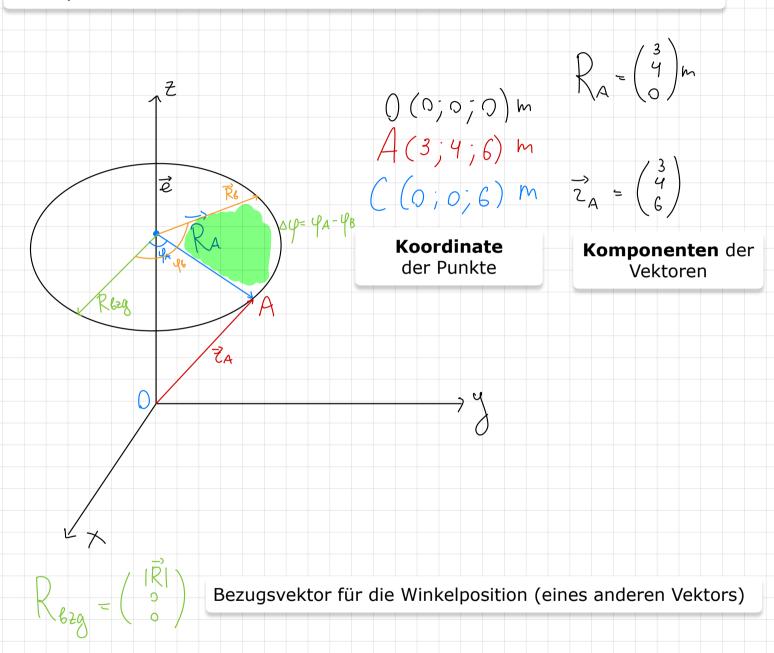


Neben den Radiusvektoren gibt es zu jedem Punkt auf dem Kreis auch noch die Ortsvektoren:

- Anfangspunkt = O = Ursprung des Koordinatensystems (KOS)
- Endpunkt = Ein Punkt am Rand des Kreises

Radiusvektor:

- Anfangspunkt = C = Mittelpunkt des Kreises
- Endpunkt = Ein Punkt am Rand des Kreises



Wenn sich eine Masse von A nach B auf dem Kreis bewegt, bleibt zwar der Betrag des Radiusvektors konstant, aber seine Richtung änder sich; das bedeutet, dass sich seine Komponenten ändern im Verlauf der Zeit ändern müssen. Für die beiden **Radiusvektoren** Ra und Rb gibt es jeweils eine eigene **Winkelposition**, mit der man den **Drehwinkel der Bewegung** berechnen kann: $\Delta(fi) = (fi)b - (fi)a$

Für jeden der beiden Radiusvektoren gibt es einen eigenen Einheitsvektor eR: $e_{R_{A}}$ und $e_{R_{B}}$.

Weil auch die Einheitsvektoren des Radius in der xy-Ebene liegen, ist auch bei ihnen immer e_z.

$$1 = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = |\vec{e}_R|$$

$$1 = e_x^2 + e_y^2 = |\vec{e}_R|$$

$$R_A \rightarrow \vec{e}_{RA} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix}$$

$$R_A = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{A1} & \sin \varphi_A \\ R_{A1} & \sin \varphi_A \end{pmatrix} = |\vec{R}_A| \cdot \vec{e}_{RA}$$

$$R_{Ay} \rightarrow \vec{e}_{RA} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} = |\vec{R}_A| \cdot \vec{e}_{RA}$$

$$R_{Ay} \rightarrow \vec{e}_{RA} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} = |\vec{R}_A| \cdot \vec{e}_{RA}$$

$$R_{Ay} \rightarrow \vec{e}_{RA} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} = |\vec{R}_A| \cdot \vec{e}_{RA}$$

$$R_{Ay} \rightarrow \vec{e}_{RA} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} = |\vec{R}_A| \cdot \vec{e}_{RA} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix}$$

(fi) ändert sich während der Bewegung der Masse auf dem Kreis. (fi) ist eine Funktion der Zeit: (fi) --> (fi)(t)

==> Dann ist auch:

- cos((fi)) --> cos((fi)(t))
- sin((fi)) --> sin((fi)(t))
- $-e_{R}(t) = (cos((fi)(t)); sin((fi)(t)); 0)$

Radiusvektor und Einheitsvektor von R ändern ihre Richtung, sie sind Funktionen der Zeit.

Wie berechnet man die Beschleunigung bei der Kreisbewegung?

$$\vec{\alpha} := \frac{d\vec{U}(t)}{dt}$$

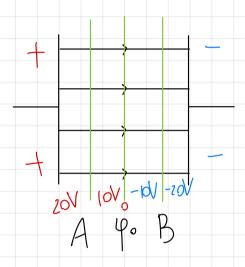
$$\vec{U}_t = \vec{w} \times \vec{R}$$

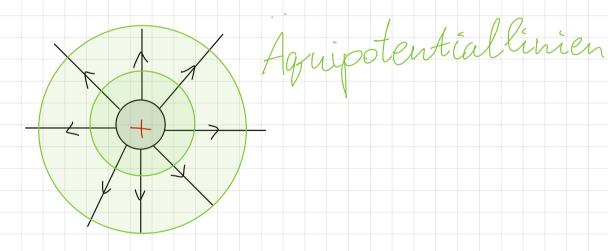
$$\vec{a}_{K2eis} = \frac{d\vec{U}(\vec{w} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{W}}{dt} \times \vec{R} + \vec{W} \times \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{a}_{+\vec{b}}, we dt \vec{b}_{+\vec{a}}$$

Die Beschleunigung bei der Kreisbewegung besteht aus zwei Teilbeschleunigungen, die addiert werden.

In homogenen Feld zwischen zwei (plan-)parallelen Platten haben alle Punkte im Abstand d zu den Platten das gleiche Potential. Die so entstandenen Mengen an Punkten werden Äquipotentiallinien/-flächen genannt.





Zwiickgelegte Strecke

Geschwindigkeit

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{R}$$

$$\vec{c} = \vec{w} \times \vec{R}$$

Bahngeschwindigkeit Tangentialgeschwindigkeit Ein Differenzialzechnung ist in der Physik immer eine Definition eine heue Größe

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{z}}{\partial k_{z}} = \frac{d \mathcal{L}_{z}}{d t} = \frac{d \mathcal{L}_{z}}{d t} \times R + \mathcal{L}_{z} \times \frac{d R}{d t}$$

Einheitsvektozen:

$$\overrightarrow{R}_{A} = |\overrightarrow{R}_{A}| \overrightarrow{e}_{R_{A}}$$

$$\overrightarrow{e}_{R_{A}} = (\cos \varphi_{A}(t))$$

$$\sin \varphi_{A}(t)$$

Beschleunigung

$$u_{Kr} = \frac{d \, \overline{v_r}}{dt}$$
; $\overline{v_r}$ ist allgensin group with homeont
= es ist eine Fruktien do Zeit
 $\overline{v_r} \mapsto \overline{v_r}(t)$.

6 0 0 D M

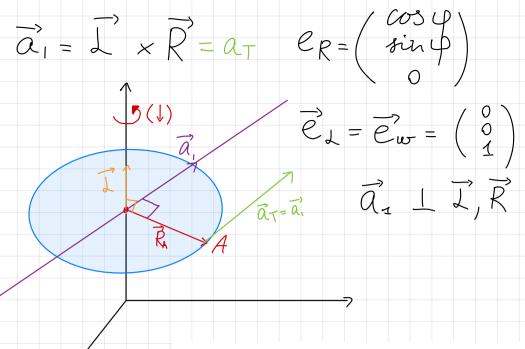
Das beschreibt die Änderungsrate der Winkelgeschwindigkeit im Laufe der Zeit. Sie gibt an, wie sich die Winkelgeschwindigkeit ändert, deswegen nennt man diese Änderungsrate eine Winkelbeschleunigung:

$$\overrightarrow{L} = \frac{d\overrightarrow{w}}{dt} ; \overrightarrow{L} = |\overrightarrow{L}| \cdot \overrightarrow{e}_{\lambda}$$

$$\alpha_{i} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{R} = \vec{J} \times \vec{R}$$

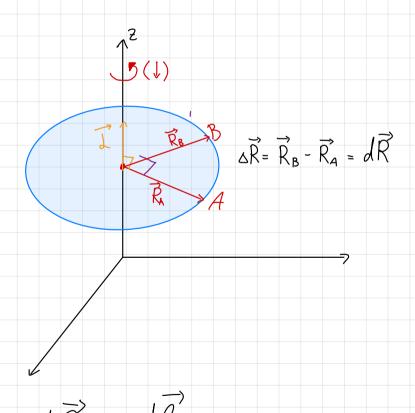
$$\vec{J} = \frac{d(\vec{w})}{dt} = \frac{d(|\vec{w}| \vec{e_w})}{dt} = \frac{d(\vec{w}| \vec{e_w})}{dt} + |\vec{w}| \frac{de_w}{dt}$$

$$\vec{J} = \vec{e_x} + |\vec{w}| \cdot \vec{o}$$



Die Beschleunigung wirkt auf die Masse m; dort soll der Anfang des Vektors der Beschleunigung sein.

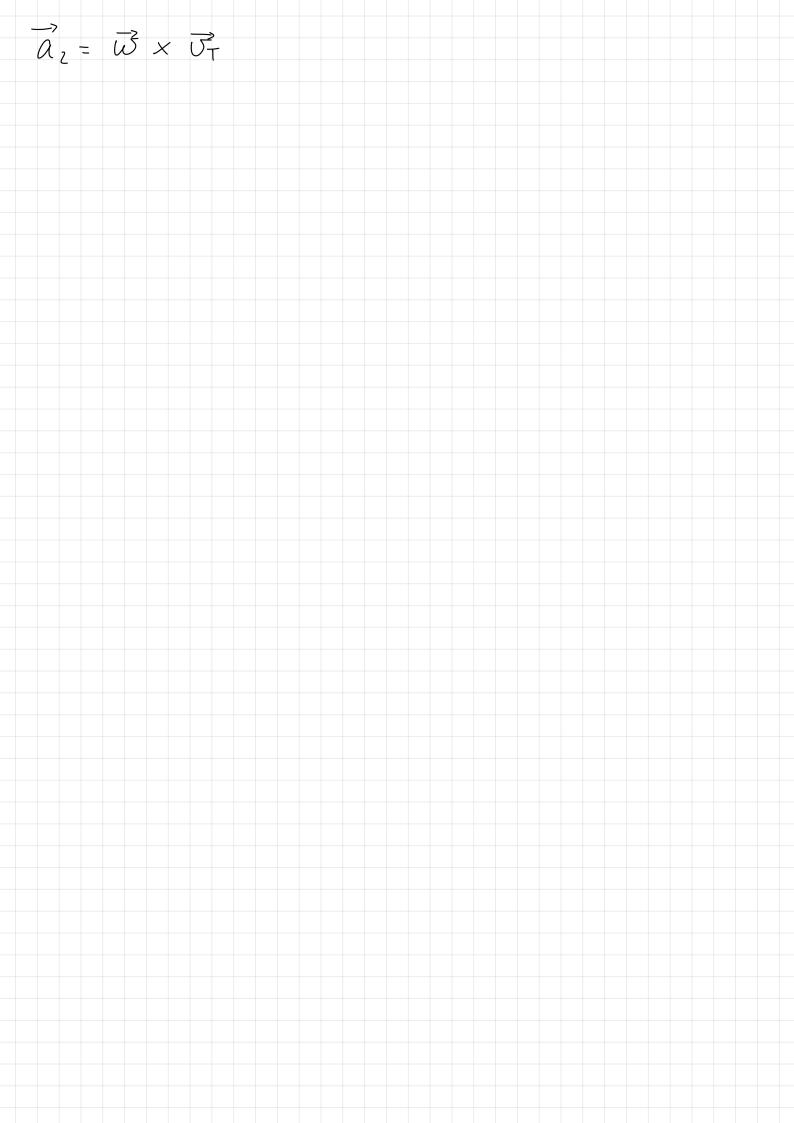
Jetzt sieht man, dass a1 eine Tangetialbeschleunigung ist at.

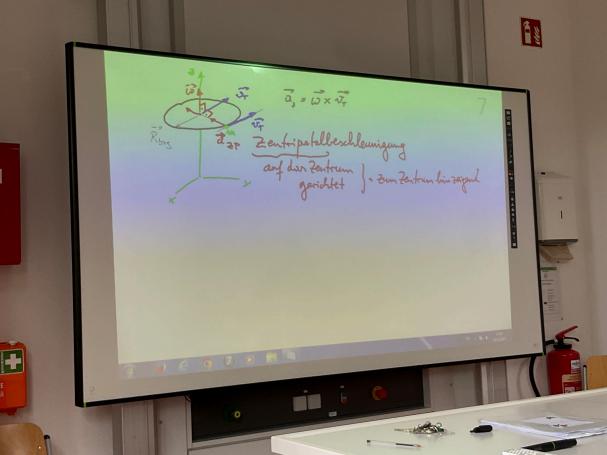


Wenn $\Delta(fi)$ unendlich klein wird, gilt $\Delta(fi)$ --> d(fi)

dann wird auch ΔR unendlich klein ΔR --> dR und man kann dR nicht von dem unendlich kleinen Bogen db unterschieden: dR = db

Tangentialgeschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit





Vektormodell zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung

gleichmäßig beschleunigt: |a| = konst ungleichmäßig beschleunigt: |a| --> |a(t)|

Winkelpositionsvektoren:

$$\overrightarrow{\varphi} = |\overrightarrow{\varphi}| \cdot \overrightarrow{e}_{\varphi} \qquad ; \qquad \overrightarrow{e}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} h$$

$$\Rightarrow |R| = 5 m$$

$$|-\rangle |R| = 5m$$

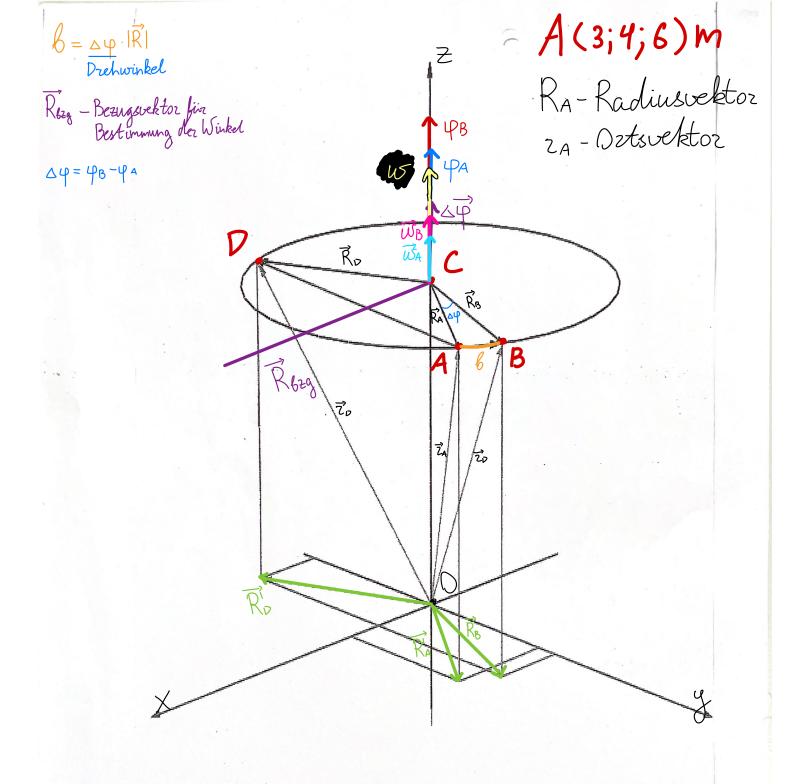
$$|-\rangle |Q| = (0)$$

$$\begin{pmatrix} |R| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 25 \,\mathrm{m}^2 \cdot \cos 4$$

$$15m^2 = 25m^2 \cdot \cos \varphi_A$$

$$15 \text{ m}^2 = 25 \text{ m}^2 \cdot \cos \varphi_A$$

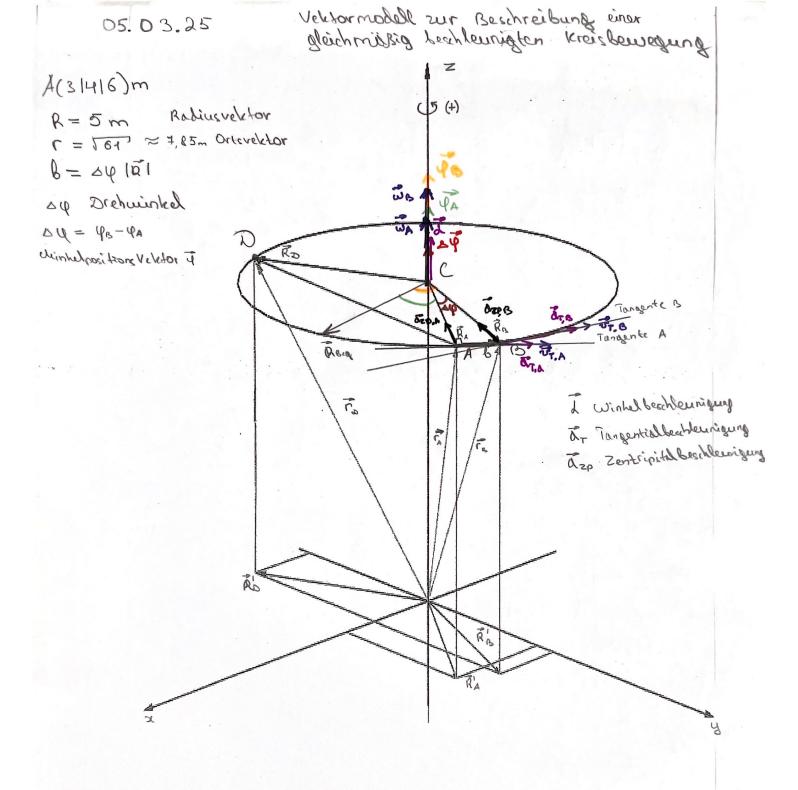
$$\varphi_A = \arccos \frac{15 \text{ m}^2}{25 \text{ m}^2} = \arccos \varphi_6 = 0,927_{29} = 53,13^\circ$$



Dinkelbeschl.

at Tangentialbeschl.

azp Zentripetalbeschl.



Rese Bosugeveldor ist immer porable zu den x-Achee (für die Bestimmung des würde)

Winkelgeschwindigkeit w

Wenn 1121 = konst, d.h. gleichförmige Kreisbewegung,

dann:
$$|\vec{w}| = \frac{\Delta \varphi}{\Delta E}$$
 $\vec{w} = \frac{\delta \vec{\varphi}}{\Delta E}$

sonst:
$$|\vec{w}(t)| = \frac{d|\vec{\varphi}(t)|}{dt}$$

Winkelbeschleunigung
$$|\vec{I}| = kons4 = \frac{\Delta |\vec{W}|}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\cos(\varphi(t))}{\sin(\varphi(t))} \right)$$

Daraus ergibt sich das Problem, wie man (fi)(t) berechnen kann. Erklärung mithilfe eines Vergleichs: Bei einer gleichmäßig beschleunigten Translationsbewegung gibt es ebenfalls eine Funktion zur Berechnung der Strecke, die eine Masse im Laufe der Zeit zurücklegt.

$$S(t) = \frac{1}{2} \overrightarrow{a} t^{2} + \overrightarrow{S}_{0} t^{4} + \overrightarrow{S}_{0} t^{4}$$

$$\overrightarrow{U}(t) = \frac{d \overrightarrow{S}(t)}{dt} = at + V_{0}t^{4} + \underbrace{O \cdot S_{0} \cdot t^{4}}_{0}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d \overrightarrow{U}(t)}{dt} = \overrightarrow{a}$$

$$S_{0} = \underbrace{V_{0} \cdot V_{0}}_{0}$$

$$\overrightarrow{\psi}(t) = \overrightarrow{L} = konst$$

$$\overrightarrow{\psi}(t) = \overrightarrow{L}t + w_0$$

$$\overrightarrow{\psi}(t) = \overrightarrow{L} + w_0 + \psi_0$$

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\xi) - \vec{\varphi}_0 = \vec{z} \vec{J} t^2 + \omega_0 t$$

$$\omega(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{J}t + \vec{w}$$

$$\partial \vec{w} = \vec{w}(t) - \vec{w}_s = \vec{L}t \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{v}$$

$$e_{t} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Diese beide Deuten auszeichend genug überein, um von einer gleichformigen Bewegung zu sprechen

Wie Cautet die Funk. φ(t) fûz dieses Beispiel?

p(+1 = \frac{1}{2} \lambda t^2 + Wot + 40

R (303) -?

 $\overline{U}_{T}(303) - 7$

2p (303) - ?

Definieren Sie den Fachbegriff "Winkelbeschleunigung"

$$\overrightarrow{J} = \frac{d\overrightarrow{w}(t)}{dt}$$
Vektoz, Kreisbewegung

à //-, gleiche Richtung 1. Micht gleiche Orientierung

Orientierung: (alpha)

- gleichorientiert wie (omega): die Bewegung wird schneller
- entgegengesetzt orientiert wie (omega): die Bewegung wird langsamer

Betrag

Richtung

Die Winkelbeschleunigung ist ein Vektor, der die Veränderung der Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, der Zum Thema Kreisbewegung gehört.

Der Winkelbeschleunigungsvektor hat einen Betrag, eine Richtung um eine Orientierung. In Bezug zur Winkelgeschwindigkeit gilt: Bei gleicher Orientierung wird die Bewegung schneller, bei entgegengesetzter Orientierung wird sie langsamer.

Wenn man w(t) ableitet, sollte allgemein eine neue Funktion (alpha)(t) in diesem Fall hat die Funktion (alpha)(t) einen konstanten Wert: (alpha)

Vereinfachte Bewegungsgleichungen, weil es bei (fi)(t), w(t), (alpha) immer nur eine z-Komponente gibt, wenn die Kreisbewegung komplanar zur xy-Ebene ist.

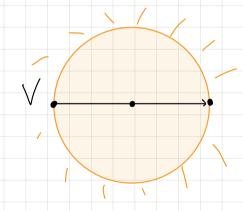
$$\frac{2\pi}{1u^21} = T$$

weil

Der Winkel, der in einer bestimmter Zeit zurückgelegt wird.

$$|\vec{w}| = \frac{\delta \phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{t} = 2\pi f$$

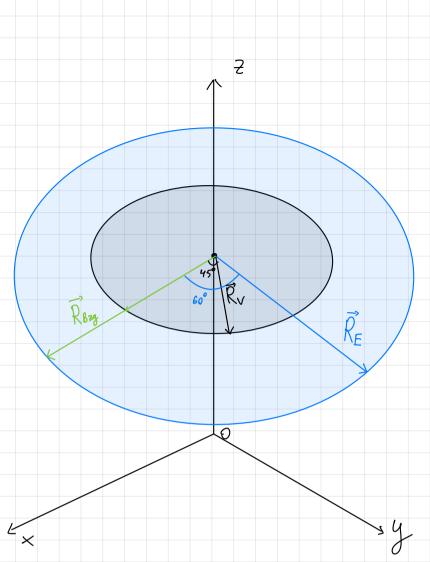
Venustransit



Ein Beobachter befindet sich außerhalb das Sonnensystems und beobachtet den Venustransit. Dabei gelten die folgenden Bedingungen:

$$|\vec{R}_{E}| = 148, 6 \cdot 10^{6} \text{ km}$$
, $T_{E} = 365,256 \text{ d}$
 $|\vec{R}_{V}| = 108, 2 \cdot 10^{6} \text{ km}$, $T_{V} = 224,701 \text{ d}$
 $|\vec{P}_{V}| = 45^{\circ}$
 $|\vec{P}_{E}| = 148, 6 \cdot 10^{6} \text{ km}$, $T_{V} = 224,701 \text{ d}$

Zu der Zeit, da Venus die Erde überholt, kann man den Venustransit beobachten. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. Fertigen Sie dazu eine Skizze zur der Perspektive des Beobachters an.



$$\varphi_{E,o} = \frac{1}{3} \frac{7}{17} \text{ ad}$$

$$\varphi_{V,0} = \frac{1}{4} \frac{7}{17} \text{ ad}$$

$$t = \frac{\varphi_{0v} - \varphi_{0,E}}{W_{0,E} - V_{0,v}} = 2, |Q_2| \cdot |D_3|$$

$$\overrightarrow{a}_{2p} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}_{T}$$
 $|\overrightarrow{a}_{2p}| = |\overrightarrow{w}| \cdot |\overrightarrow{v}_{T}| \cdot nn go^{\circ}$
 $= 1$

$$\overrightarrow{U_T} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{R}$$

$$|\overrightarrow{U_7}| = |\overrightarrow{w}| \cdot |\overrightarrow{R}| \cdot |\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{g}| \cdot |\overrightarrow{g}|$$

a)
$$|\vec{a}_{2p}| = |\vec{w}|^2 |\vec{R}|$$

b) $|\vec{a}_{2p}| = \frac{|\vec{v}_{T}|^2}{|\vec{R}|}$

$$\frac{1}{1} = \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{2}{3}w = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3$$