


c) Gegeben sind die Punkte $A(1|4|2)$, $B(1|7|8)$ und $C(1|3|0)$.

- Zeigen Sie, dass C auf der Geraden durch A, B liegt.
- Beurteilen Sie, ob C auch auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.
- Der Punkt D ist von A doppelt so weit entfernt, wie in B . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D .

b) Berechnen Sie:

$$\sum_{k=0}^{10} 3^k, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1}$$

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{n + 3}$$

$$a_n \rightarrow 2, \quad n \rightarrow \infty$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{2n^2 - 1}{n + 3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 1 - 2n^2 - 6}{n^2 + 3} \right| = \left| \frac{-7}{n^2 + 3} \right| = \frac{7}{n^2 + 3} < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} & \updownarrow \\ & \underbrace{\sqrt{\frac{7}{\varepsilon} - 3}}_{=: n_0} < n \\ & \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

b) $\varepsilon = \frac{1}{100} \quad n_0 = \sqrt{\frac{7}{(\frac{1}{100})} - 3} = \sqrt{697} = 26,4 \Rightarrow 26 \text{ Folgglieder liegen außerhalb einer } U_{\frac{1}{100}}(2).$

c) $a_n = \frac{n+2}{n-1}, \quad n > 1$

Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)(n+1)}{n \cdot (n+2)} = \frac{n^2 + 3n - n - 3}{n^2 + 2n} = \frac{n^2 + 2n - 3}{n^2 + 2n} = 1 - \frac{3}{n^2 + 2n} < 1$$

$$a_{n+1} < a_n \quad (a_n) \downarrow$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n-1} \geq \frac{n}{n} = 1 \quad (a_n) \text{ beschränkt nach unten}$$

Also konvergent

$$A(1; 4; 2) \quad B(1; 7; 8) \quad C(1; 3; 0)$$

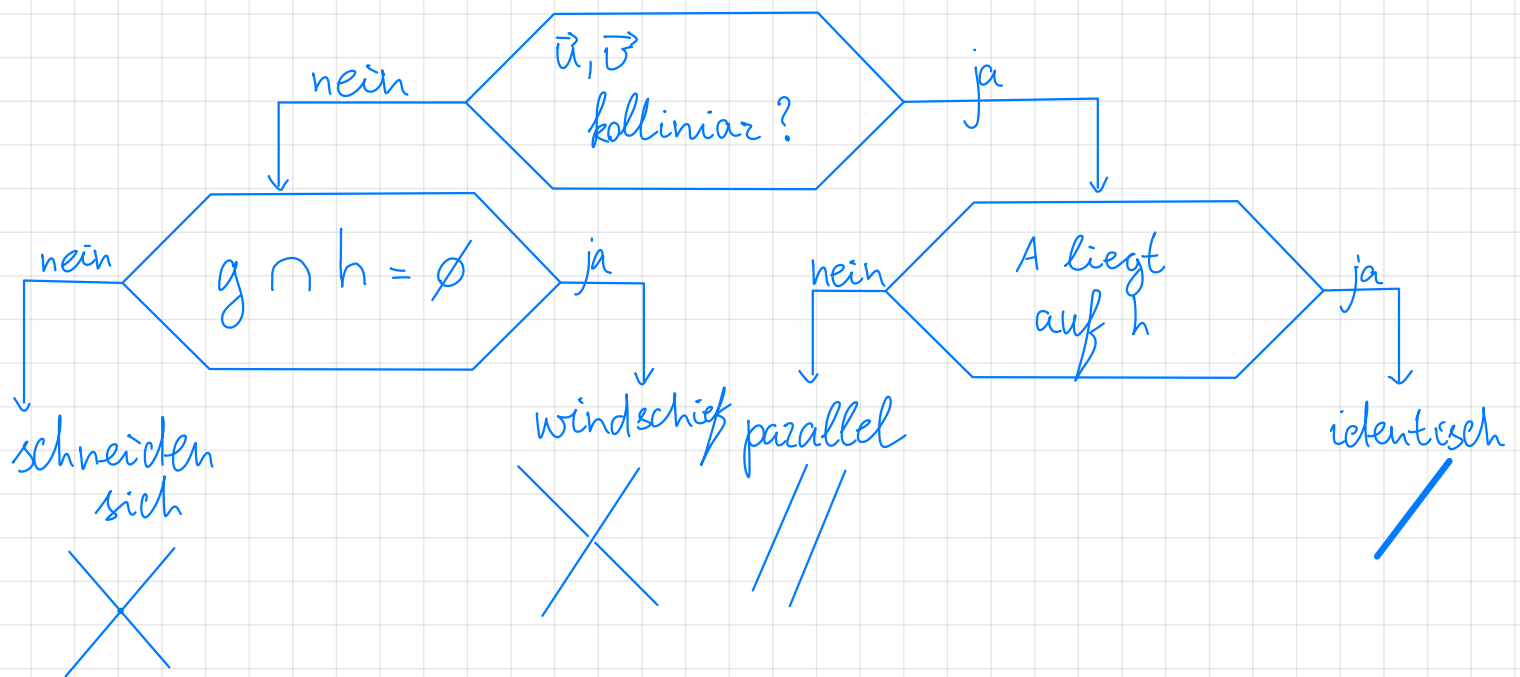
$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x}(z) = \vec{a} + z \cdot \vec{u}$$

$$h: \vec{x}(s) = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$$



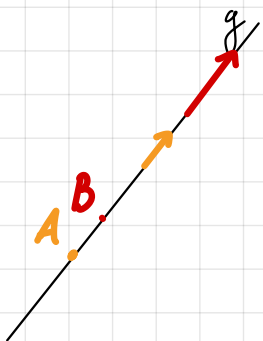
$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ sind kollinear, weil } 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$z \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 1 \Rightarrow g \text{ und } h \text{ sind identisch}$$



$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$z - 2s = -3$$

$$3z - s = -4$$

$$2z - s = -3$$

$$z - 2s = -3$$

$$5s = 5$$

$$3s = 3$$

$$\Rightarrow s = 1, z = -1$$

$$L = \{(-1; 1)\}$$

Der Schnittpunkt $S(5; -5; 1)$

$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

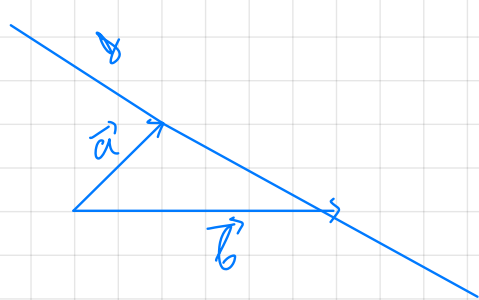
Untersuchen Sie, ob eine Seite des Dreiecks ABC mit A(3;3;6), B(2;7;6), C(4;2;5) auf der Geraden g liegt, oder zu g parallel ist.

$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x}(z) = \vec{a} + z(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{x}(2) = 2\vec{b} - \vec{a}$$

$$h: \vec{x}(s) = \vec{a} + \vec{b} + s(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b})$$



$$\vec{a} + z(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + s(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b})$$

$$z(\vec{b} - \vec{a}) - s(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{b}$$

$$z\vec{b} - z\vec{a} - s\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} = \vec{b}$$

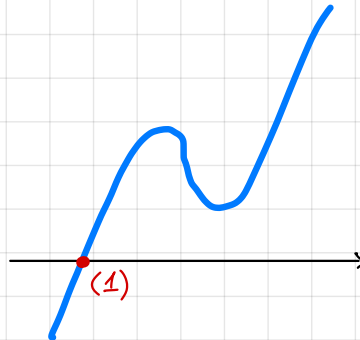
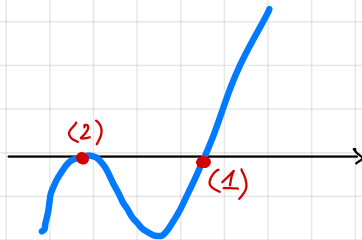
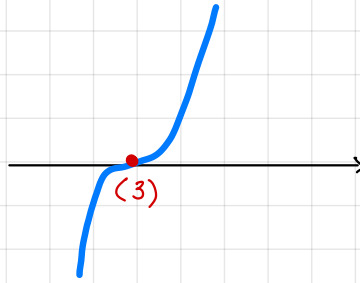
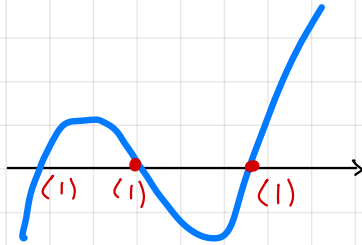
$$\vec{a} \cdot (-z - s) + \vec{b} \cdot (z + \frac{1}{2}s) = \vec{b}$$

$$z + \frac{1}{2}s = 1$$

$$-z - s = 0$$

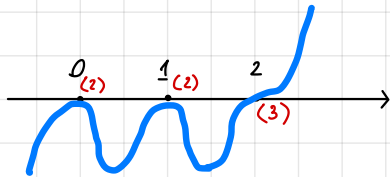
$$z = -s \quad s = -2$$

$$-0,5s = 1 \quad z = 2$$



$$p(x) = x^2 (x-1)^2 (x-2)^3$$

$$x^7 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$



$-2x$ $\nearrow$ kommt von unten

$- \quad + \quad \rightarrow \nearrow$

$- \quad - \quad || \quad + \quad + \quad \rightarrow \searrow$

 einfache Nullstelle

 dreifache Nullstelle

x_0 Nullstelle von p , $p \in \overline{\mathbb{T}}_n$

hat n Nullstellen

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x), \quad q \in \overline{\mathbb{T}}_{n-1}$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdot z(x), \quad z \in \overline{\mathbb{T}}_{n-2}$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot s(x), \quad s \in \overline{\mathbb{T}}_{n-3}$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Linearfaktorzerlegung

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 7x - 3 =$$

$$T(3) = \{1, 3\}$$

$$= (x-1)(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3) =$$

$$= (x-1)(x-1)(x^3 - 3x^2 + x - 3) =$$

$$= (x-1)^2(x-3)(x^2+1)$$

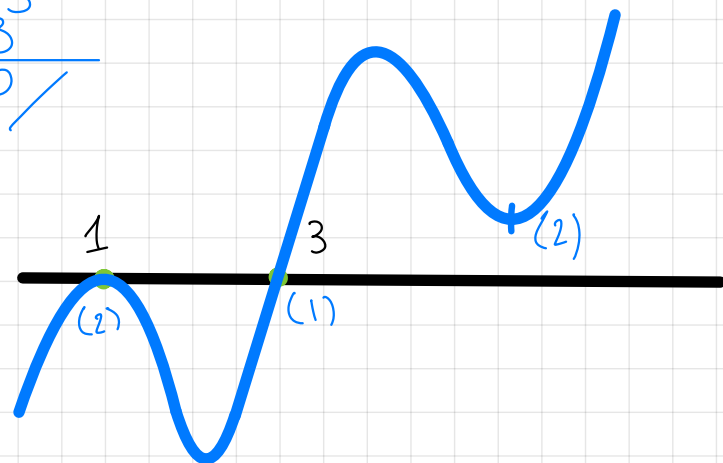
$$x^2+1$$

ist irreduzibel

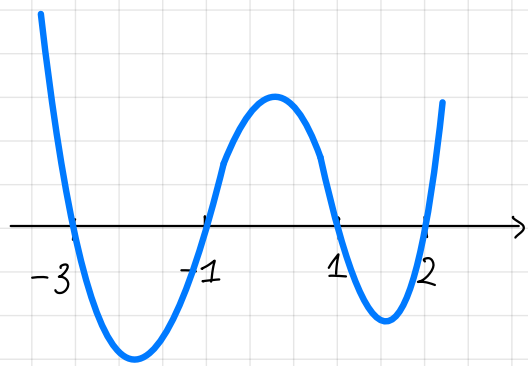
$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -5 & 8 & -8 & 7 & -3 \\ & - & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ & - & 1 & -3 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & - & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
 p(x) &= 3x^4 + 3x^3 - 21x^2 - 3x + 18 = \\
 &= 3(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) = \\
 &= 3(x-1)(x-2)(x+1)(x-3)
 \end{aligned}$$



1	1	-7	-1	6	
1	-	1	2	-5	-6
	1	2	-5	-6	0,
2	-	2	8	6	
	1	4	3	0,	
-1	-	-1	-3		
	1	3	0,		
-3	-	-3			
	1	0,			

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 \cdot x^4) = +\infty$$

$$3(x-1)(x-2)(x^2+4x+3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -3$$

Übungen zu Polynomen und dem Horner-Schema

1 Nullstellen von Polynomen

Geben Sie für die folgenden Polynome Nullstellen an und skizzieren Sie die Graphen qualitativ:

- a) $p(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ $x(x^2 - 12x + 45) = x(x+3)(x-5)$ b) $p(x) = x^3 - 9x$
○ c) $p(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$ d) $p(x) = x^{10} - x^9$

2 Wertebereich von Polynomen

Bestimmen Sie den Wertebereich für die folgenden Polynome:

- a) $p(x) = x^3 - 14x + 16$ b) $p(x) = x^4 - 18x^2 + 27$

3 Horner-Schema

Berechnen Sie mit dem Horner-Schema alle reellen Nullstellen von:

- a) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$ b) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3$
 $(x-3)(x^4 + x^2 + 1)$ $(x-3)(x^4 + x + 1)$

4 Vollständiges Horner-Schema

Wenn wir für ein Polynom vom Grad n das Horner-Schema $n+1$ -mal an einer Stelle x_0 durchführen, so sprechen wir vom vollständigen Horner-Schema. Die Zahlen A_k , die rechts in jeder Zeile des vollständigen Horner-Schemas stehen heißen Entwicklungskoeffizienten von p bei der Entwicklung um x_0 . Es gilt dann

$$p(x) = A_n(x - x_0)^n + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + A_1x + A_0$$

Entwickeln Sie das Polynom $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 5$ um $x_0 = 2$.

(Probe durch Ausmultiplizieren)

Hinweis

Sie können die Aufgaben "per Hand" rechnen, falls Sie im Ergebnis unsicher sind, kontrollieren Sie Ihre Rechnung mit einem CAS (z.B. MuPAD).

$$p(x) = x^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n=3: \quad x^3 - 1 = x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$$

$$p(1) \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1$$

$$p(-1) \quad 1 \quad -0 \quad 0 \quad -1$$

$$n=4: \quad x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

irreduzibel

$$p(1) \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1$$

$$p(-1) \quad 1 \quad -0 \quad 0 \quad -0 \quad -1$$

$$\quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1$$

$$\underline{1 \quad - \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}$$

$$\quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$\underline{-1 \quad - \quad -1 \quad 0 \quad -1}$$

$$\quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$\geq 1 > 0$$

$$n=6 \quad x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \\ \underline{1 \ - \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \underline{-1 \ - \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1} \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 64x + 107$$

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -7 & -1 & 6 & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{cc} -3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 7 & 1 & 6 & = 0 \end{array} \quad (-1 \text{ ist eine Nullstelle})$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -7 & -1 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{1} & - & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{1} & 2 & -5 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -1 & - & -1 & -1 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 6 & 0 & \end{array}$$

19.01.25

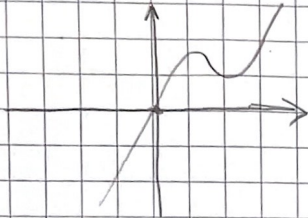
Hausaufgabe

N 1

$$a) p(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x(x^2 - 12x + 45)$$

$$\Delta = 144 - 4 \cdot 45 < 0 \Rightarrow$$

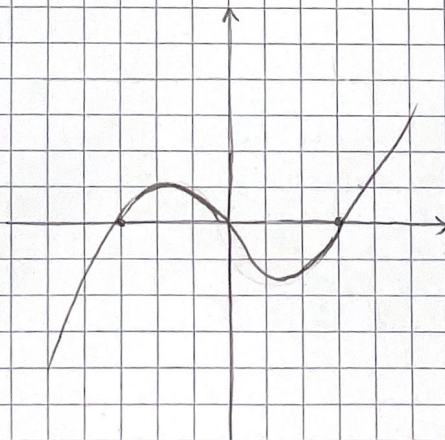
Nullstelle bei $x=0$ 

$$b) p(x) = x^3 - 9x$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x(x^2 - 9)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = x(x-3)(x+3)$$

$$\text{Nullstellen} = \{0 | 3 | -3\}$$



$$c) p(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$$

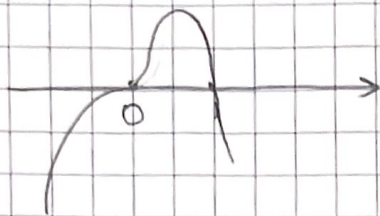
$$\Leftrightarrow p(x) = x^2(3x^2 - 16x + 24)$$

$$x_{1,2} = \frac{16}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{6}\right)^2 - \frac{24}{3}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - 8} \in \emptyset$$

Nullstelle bei $x=0$ 

$$d) p(x) = x^{10} - x^9 = x^9(x-1)$$

$$\text{Nullstellen} = \{0, 1\}$$



$$N2 a) p(x) = x^3 - 14x + 16$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$b) p(x) = x^4 - 18x^2 + 27$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$p(x) = x^4 - 18x^2 + 81 - 54$$

$$p(x) = (x^2 - 9)^2 - 54$$

$$y \in [-54, \infty[$$

$$N3 a) p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$$

	1	-3	1	-3	1	-3
3	-	3	0	-3	0	3
	1	0	1	0	1	0

$$p(x) = (x-3)(x^4 + x^2 + 1)$$

Nullstelle bei $x=3$

$$b) p(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x-3)(x^4 + x + 1)$$

Nullstelle bei $x=3$

20.01.25

$$p(x) = x^n - 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\underline{n=3}: x^3 - 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$p(-1) = -1 + 0 + 0 - 1 = -2$$

$x = -1$ Nullstelle, wenn die Summe der Koeff. gleich null ist.

$$\underline{n=4}: x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) \quad \text{irreduzibel}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -0 & 0 & -0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -1 & - & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$4(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + x - 2 + 5$$

$$4 \quad -3(x^2 - 4x + 4)$$

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$$4x^3 - 12 \cdot x^2 \cdot 2 + 12 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 \cdot 4 - 3x^2 + 12x - 12 + x + 3 =$$

$$= 4x^3 - 27x^2 + 61x + 35$$

$$p(x) = x^3 - 14x + 16, \quad W = \mathbb{R}, \text{ weil } x^3 \text{ ungerader Exponent}$$

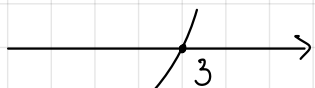
$$\begin{aligned} \text{b) } p(x) &= x^4 - 18x^2 + 27 \stackrel{x^2=u}{=} u^2 - 18u + 27 = (u^2 - 18u + 81) + 27 - 81 = \\ &= (u-9)^2 - 54 = (x^2-9)^2 - 54 \geq -54 \end{aligned}$$

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)(x^4 + x^2 + 1)$$

irreduzibel

	1	-3	1	-3	1	-3
3	—	3	0	3	0	3
	1	0	1	0	1	0

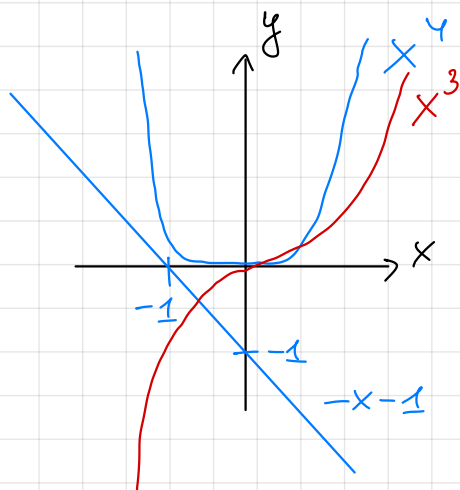
/



/

$$x^4 + x + 1 = 0$$

$$x^4 = -x - 1$$

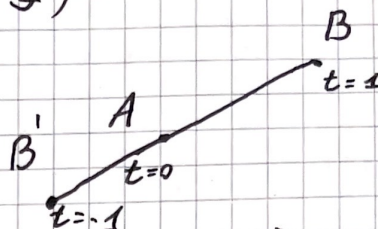


$$p(x) = x^3 + x + 1$$

$$g_1 \equiv \vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

22.01

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{t=0}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{t=1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{t=2}$$



$$A, B \in \mathbb{R}^3$$

$$s: \vec{v}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

$$0 \leq t \leq 1$$

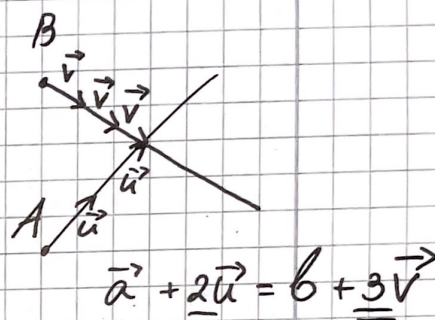
Strecke

Strahl
Halbgerade

Gerade

$$g_2 \equiv \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g_3 \equiv \vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$



$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ weil } 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$$

$$2 \neq 3$$

$$t_1 \neq t_2$$

muss nicht

nicht kollinear (linear unabhängig)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t_1 - t_2 = 1 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$-t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0$$

$$-3t_1 + t_2 = -3 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$\mathbb{L} = \{(1; 0)\}$$

$S(3; 2; -1)$ ist Schnittpunkt von g_1 und g_2

$$\vec{U}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_3(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ sind kollinear, weil

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \nearrow \vec{v}$ parallel
 $\vec{u} \nearrow \vec{v}$ identisch

g_1 und g_3 sind parallel oder identisch

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$A \notin g_3 \Rightarrow g_1$ und g_3 sind parallel

$$g_2 \equiv U_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ nicht kollinear $\Rightarrow$ Windschief oder schneidend

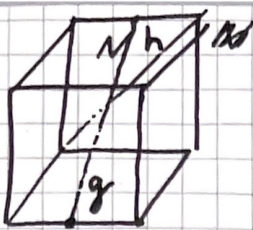
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$t_1 + 2t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = -0,5$$

$$t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = 2$$

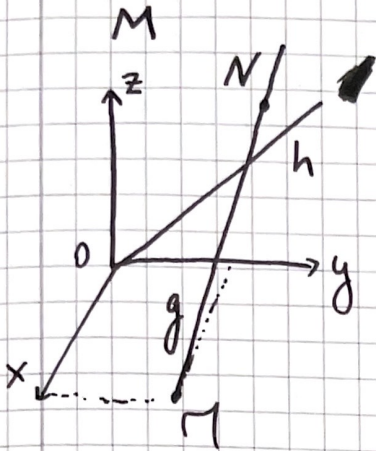
$$(f) -t_1 - 6t_2 = 5 \Rightarrow t_2 = -\frac{7}{6}$$

$\Rightarrow$ Windschief



$$M\left(\frac{1}{2}; 0,5; 1\right)$$

$$N(0; 0,5; 1)$$



$$h: \vec{U}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{U}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g = h \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t + s = 1 \Rightarrow s = 0,5$$

$$t = 0,5 \Rightarrow t = 0,5$$

$$t - s = 0 \Rightarrow s = 0,5$$

$$\mathbb{L} = \{(0,5; 0,5)\} \Rightarrow \text{hat einen Schnittpunkt}$$

$$S(0,5; 0,5; 0,5) \quad \vec{S} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

g und h schneiden sich im Schnittpunkt
 $S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$A(0|0|0) \quad B(0|8|0) \quad C(-6|8|0)$$

$$D(-6|0|0) \quad E(-3|1|5) \quad \cancel{D(-6|0|0)}$$

$$F(-3|6|5) \quad P(-3|0|0) \quad Q(-1,5|0|2,5)$$

$$R(-6|4|0)$$

$$g: \vec{U}_1(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{QR} = \vec{r} - \vec{q}$$

$$h: \vec{U}_2(x) = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$g = h \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4,5y = -3$$

$$6x - 3,5y = 4$$

$$5x - 2,5y = 0$$

$$y = \cancel{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}$$

$$x \neq \cancel{\frac{1}{3}} \neq 4$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Die Geraden sind windschief

Dezimalzahlen, $b=10$, $Z = \{0, 1, \dots, 9\}$

$$456_{10} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$$Z = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^k$$

Binärzahlen, $b=2$, $Z = \{0, 1\}$

$$1010_2 = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10_{10}$$

$$p(2) = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$p(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot 1$$

2	1	0	1	0
	—	2	4	10
	1	2	5	10

$$11100101101_2 = 1837_{10}$$

$$27_{10} = \begin{array}{c} \text{I} \text{ II} \text{ III} \text{ IV} \text{ V} \\ 11 \ 011_2 \end{array}$$

(27)	$= 13 \cdot 2 + 1$	↑ V
(13)	$= 6 \cdot 2 + 1$	IV
(6)	$= 3 \cdot 2 + 0$	III
(3)	$= 1 \cdot 2 + 1$	II
(1)	$= 0 \cdot 2 + 1$	I

2	1	1	0	1	1
	—	2	6	12	26
	(1)	(3)	(6)	(13)	(27)

Horner-Schema

euklidischer
Algorithmus

$$b = 10$$

Dezimalzahl

$$Z = \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$b = 2$$

Binärzahl

$$Z = \{0, 1\}$$

$$b = 16$$

Hexadezimalzahl

$$Z = \{0, 1, \dots, 9, a, b, c, d, e, f\}$$

$$b = 8$$

Oktaalzahl

$$Z = \{0, 1, \dots, 7\}$$

$$52_{16} = 82$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \\ 16 - 80 \\ 80 \quad 82 \end{array}$$

$$18_{10} = 12_{16}$$

$$18 = 1 \cdot 16 + 2$$

$$1 = 0 \cdot 16 + 1$$



RGB - Farbsystem

rot grün blau

$$60_{10} = 3C_{16}$$

#000000 schwarz

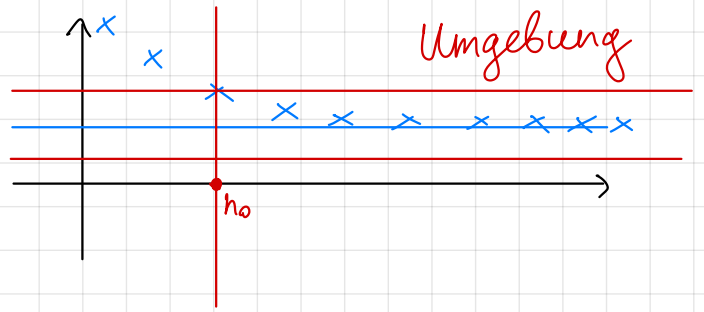
#FFFFFF weiß

$$60 = 3 \cdot 16 + 12 \text{ (C)}$$

$$3 = 0 \cdot 16 + 3$$

bisher : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

jetzt : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{0}$ existiert nicht

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots$$

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -3 & 2 & \\ 1 & - & 1 & 1 & -2 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

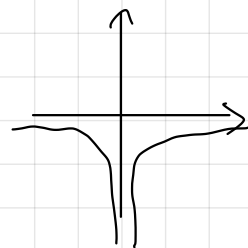
$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & \\ 1 & - & 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 0 & \\ -2 & - & -2 & \\ 1 & 0 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} f(x) = \frac{-12}{9 \cdot (0^{\pm})} = \mp \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} f(x) = \frac{-3}{(0^{\pm})^2 \cdot 3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



Rationale Funktionen

27.01.25

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

~~$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{-3}{0^\pm} = \mp \infty \quad (\text{falsch})$$~~

(Faktorisierung)

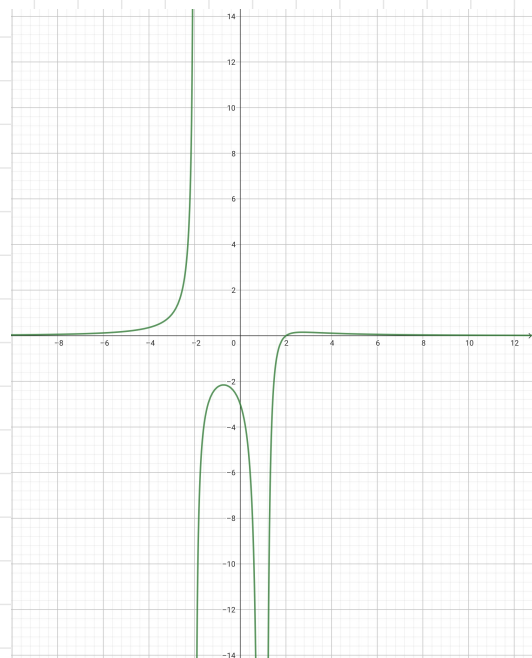
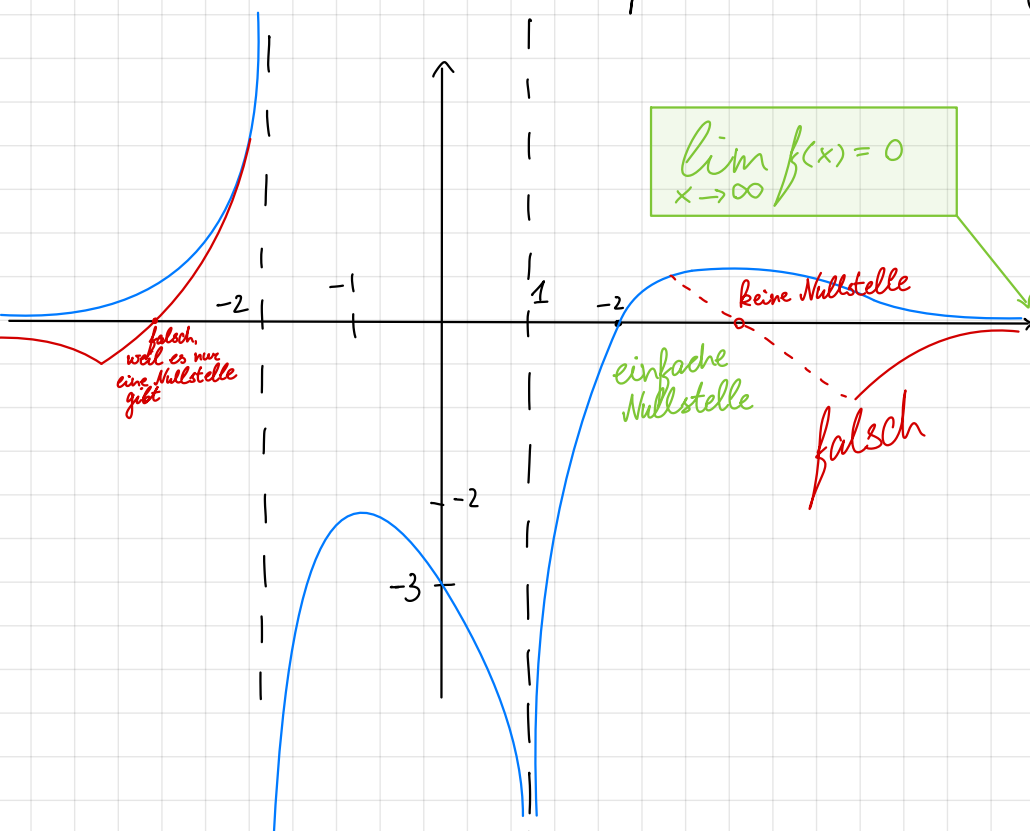
$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{3(x-2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\cancel{3} \cdot (-1)}{(0^\pm)^2 \cdot \cancel{3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{\cancel{3} \cdot (-4)}{\cancel{3} \cdot 0^\pm} = \frac{-4}{3 \cdot (0^\pm)} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0 \quad \frac{3h-6}{h^3-3h+2} \stackrel{[\infty]}{=} \frac{\frac{3}{h^2} - \frac{6}{h^3}}{1 - \frac{3}{h^2} - \frac{2}{h^3}} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \frac{0-0}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$N = \{2\}$ Nullstelle von f

$S(0; -3)$ Schnittpunkt mit y -Achse



1. Definitionsbereich ($\mathbb{D}$) (zuerst faktorisieren)
2. Verhalten an den Def. Lücken
3. Verhalten im Unendlich
4. Nullstellen
5. Schnittpunkt mit y-Achse

Übung: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-2}{x-3}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

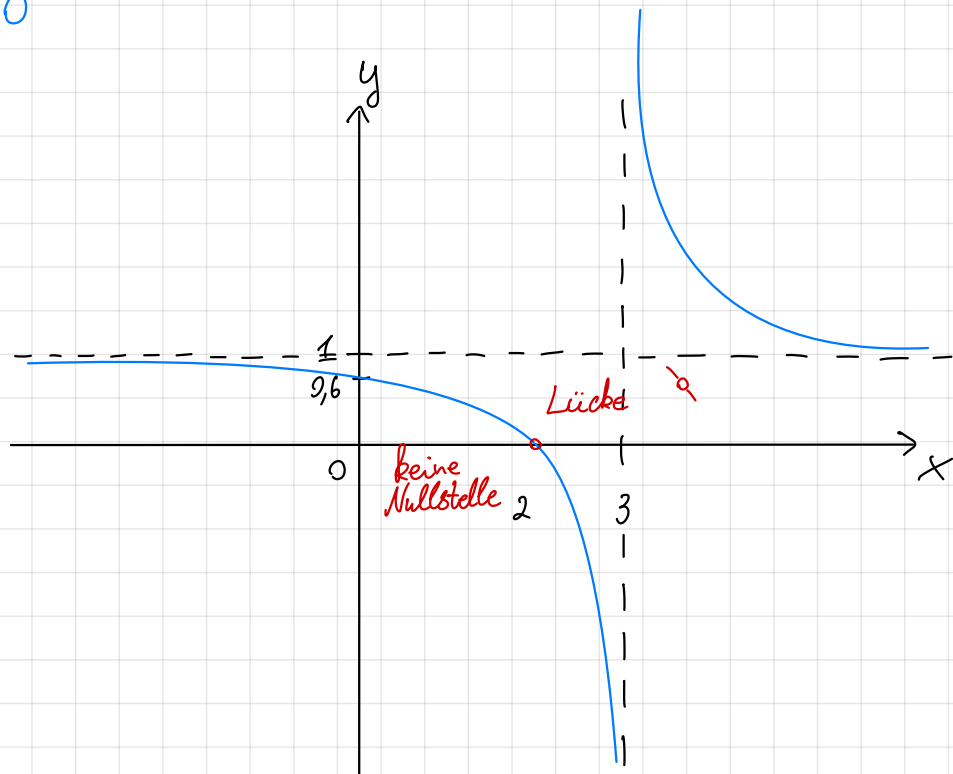
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{(0^+) \cdot 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

keine Nullstellen

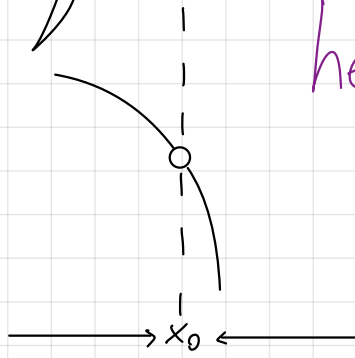
$$S(0; \frac{2}{3})$$



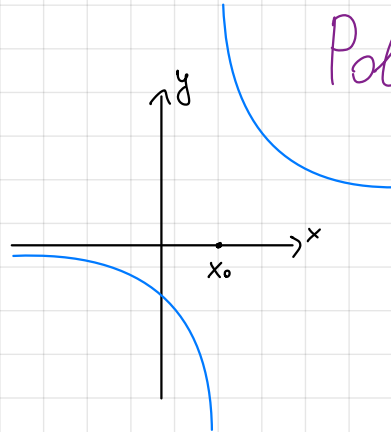
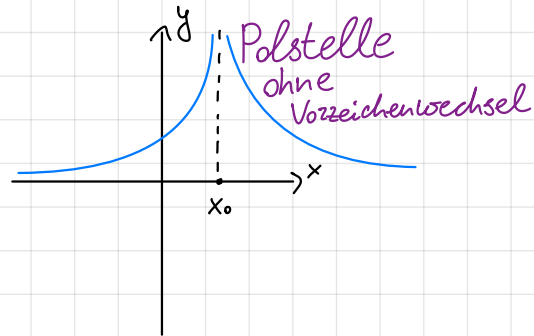
x_0 Def. lücke von f

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = a$$

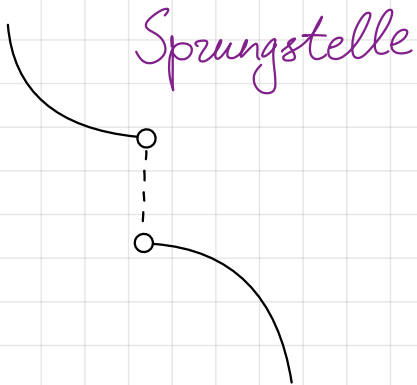
$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = \pm \infty$$



hebbare
Lücke



Polstelle
mit VZW.



Sprungstelle

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20} = \frac{\overset{\text{Nullstelle}}{(x-2)(3x+1)}}{5(x^2 - 4)} = \frac{(\cancel{x-2})(3x+1)}{5(\cancel{x-2})(x+2)} \stackrel{\text{für } x \neq 2}{=} \frac{3x+1}{5(x+2)} =: \tilde{f}(x)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} \quad \approx \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^{\pm}} f(x) = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 4} = \frac{7}{20} = \tilde{f}(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} f(x) = \frac{-5}{5 \cdot 0^{\pm}} = \frac{-1}{0^{\pm}} = \mp \infty$$

	3	-5	-2
2	-	6	2
$3x'$	1	0	/

f ist in $x=2$ durch $\frac{7}{20}$ passend ergänzbar

$x=2$ ist eine hebbare Lücke

$x=-2$ ist eine Polstelle mit VZW

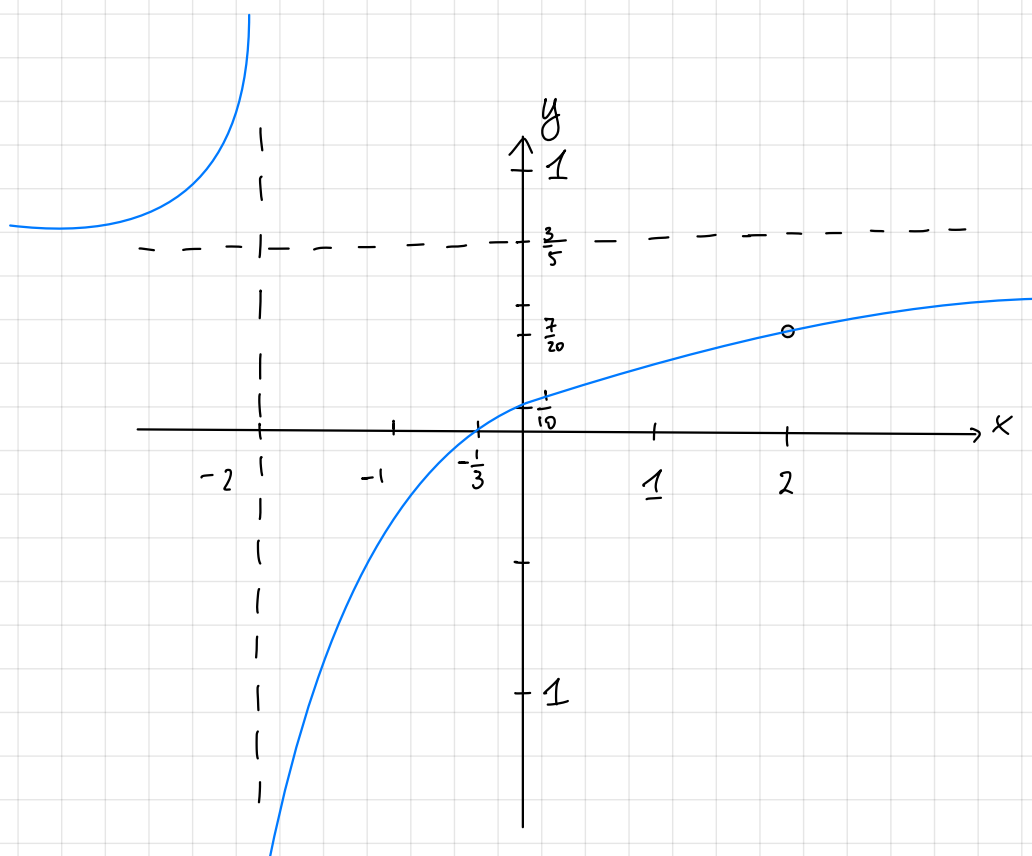
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{3}{5}$$

$$S(0; \frac{1}{10})$$

$$N(-\frac{1}{3}; 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3}{5}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20}, & x \neq \pm 2 \\ \frac{7}{20}, & x = 2 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{x^3 - 216}{72 - 2x^2} = \frac{x^3 - 216}{-2(x-6)(x+6)} = \frac{(x-6)(x^2 + 6x + 36)}{-2(x-6)(x+6)} := \tilde{f}(x)$$

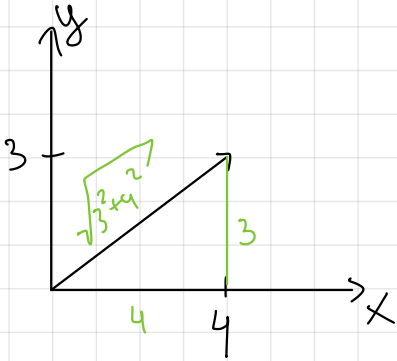
$$\lim_{x \rightarrow -6^\pm} f(x) = \frac{-2 \cdot 216}{-2 \cdot (-12) \cdot 0^\pm} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^\pm} f(x) = \frac{36 \cdot 3}{(-2) \cdot 12} = -4 \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$$

1	0	0	-216
6	-	6	36
1	6	36	0

Betrag und Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$



$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Eigenschaften des Betrages

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Vektoren

1) $|\vec{a}| \geq 0, |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

2) $|z \cdot \vec{a}| = |z| \cdot |\vec{a}|$

3) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ Dreiecksungleichung

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$P(-6|-2|3) \quad Q(9|-2|11)$$

$$\overset{\rightarrow}{|PQ|} = \sqrt{\underbrace{(9+6)^2}_{225} + \underbrace{(-2+2)^2}_{64} + (3-11)^2} = 17$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + z \cdot \vec{a}| = |(1+z) \cdot \vec{a}| = |1+z| \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}| + |z \cdot \vec{a}| = |\vec{a}| + |z| \cdot |\vec{a}| = (1+|z|) \cdot |\vec{a}|$$

$$P(5; 0; z) \quad Q(4; -2; 5) \quad |\vec{PQ}| = 3$$

$$(5-4)^2 + 2^2 + (z-5)^2 = 9$$

$$1 + 4 + z^2 - 10z + 25 - 9 = 0$$

$$z^2 - 10z + 21 = 0$$

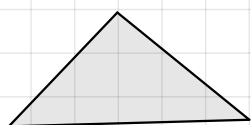
$$z_1 = 7 \quad z_2 = 3$$

$$A(7; 0; -1) \quad B(5; -3; -1) \quad C(4; 0; 1)$$

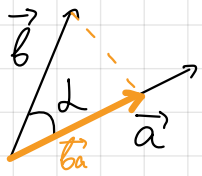
$$|\vec{AB}| = \sqrt{13}$$

$$|BC| = \sqrt{14}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{13}$$



gleichschenkliges Dreieck



Projektion des Vektors $\vec{b}$
auf den Vektor $\vec{a}$

$$\cos L = \frac{|\vec{ba}|}{|\vec{b}|}$$

$$|\vec{ba}| = \cos L \cdot |\vec{b}|$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{ba}| = \cos L \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$$

Skalarprodukt der
Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\cos L = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$L = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2$$

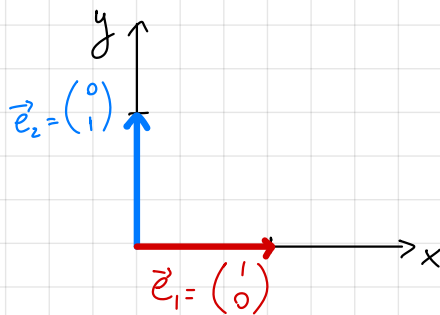
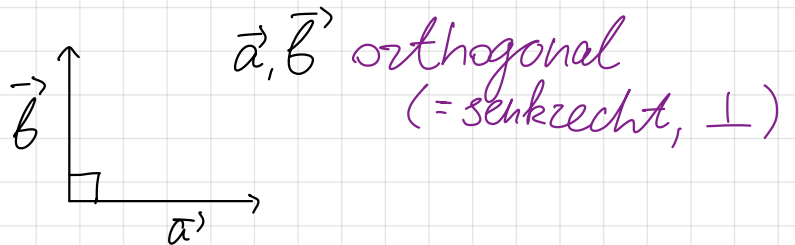
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) =$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_1 + a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_0 + a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_0 + a_2 b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_1 =$$

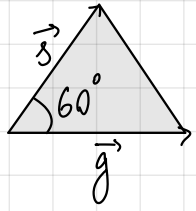
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos L$$

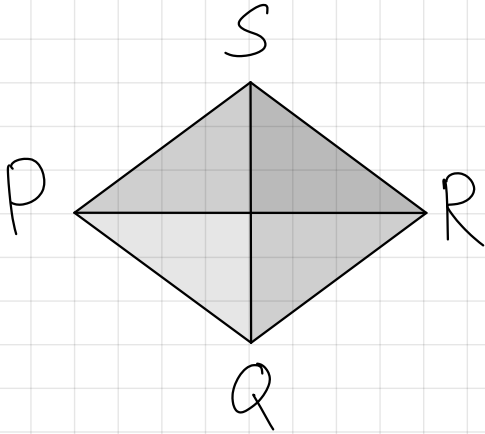
wichtig • • •



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$$



$$\vec{g} \cdot \vec{s} = |\vec{g}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18$$



Für das Skalarprodukt existiert eine **Koordinatenform**. Es gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

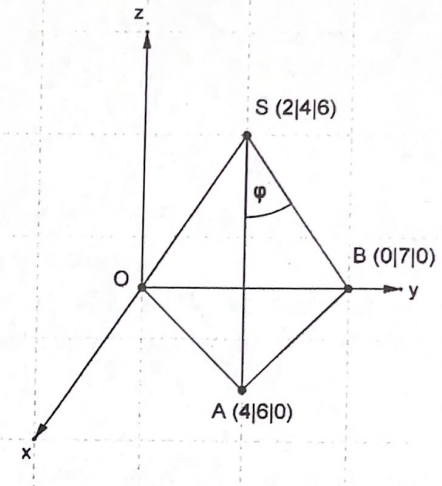
bzw. allgemein

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k.$$

Die Koordinatenform des Skalarproduktes ermöglicht es nun, die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren aus ihren Koordinaten zu berechnen.

Übungen

1. Gegeben ist der Tetraeder OABS. Berechnen Sie den Winkel φ .
2. Bestimmen Sie alle Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

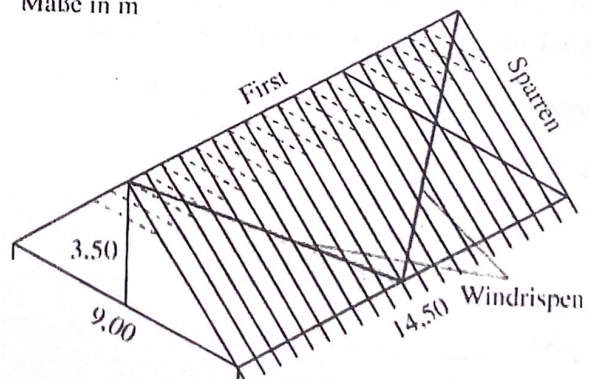


Hausaufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g durch die Punkte $A(2|-3|1)$ und $B(10|5|15)$. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte der Geraden g , die von A den Abstand 9 haben.
[zur Kontrolle: Einer der Punkte hat die Koordinaten $P(6|1|8)$].
2. Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{a} - r \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$ ist.
Interpretieren Sie die Lage der Vektoren geometrisch.
3. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Punkte $A(-4|8)$, $B(5|-4)$ und $C(7|10)$. Bestimmen Sie den **Fußpunkt** F der Höhe h_c . [Unter dem Fußpunkt versteht man den Schnittpunkt des Lotes von C auf die Strecke AB .]

Maße in m

4. Die nebenstehende Grafik zeigt die Anordnung der Balken eines Daches.
 - a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie die Lage eines Sparrens und einer Windrispe durch einen Vektor.
 - b) Berechnen Sie die Länge einer Windrispe und die Größe des Winkels zwischen Sparren und Windrispe.



Skalarprodukt

Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Länge des zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeiles. Der Betrag wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. allgemein in $\mathbb{R}^n$ gelten für den Betrag folgende Darstellungen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$. (Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras)

Für den Betrag gelten folgende Eigenschaften

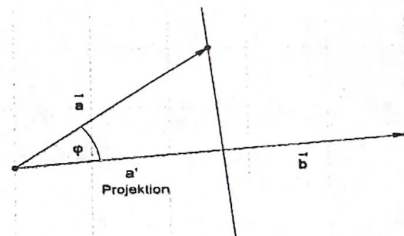
1. $|\vec{a}| \geq 0$, insbesondere $|\vec{0}| = 0$.
2. $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecks-Ungleichung, vgl. auch Analysis)

Beispiel: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$.

Übungen

1. Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P(-6|-2|3)$ und $Q(9|-2|11)$.
2. In welchen Fällen gilt für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ die Gleichung $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
3. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate p_3 so, dass $P(5|0|p_3)$ vom Punkt $Q(4|-2|5)$ den Abstand 3 hat.
4. Welche besondere Form hat das Dreieck $A(7|0|-1)$, $B(5|-3|-1)$ und $C(4|0|1)$?

Unter dem **Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$** versteht man den kleineren Winkel zwischen den Pfeilen der Vektoren. In dem folgenden Bild ist a' die **Projektion** des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$. Für die Projektion gilt im Fall $0 < \varphi < 90^\circ$: $a' \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. Das letzte Produkt wird sich für unsere Fragestellungen in diesem Kapitel als nützlich erweisen.

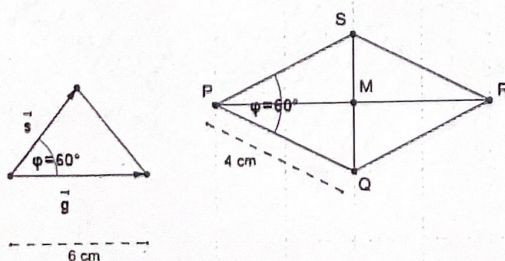


Definition und Satz

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, so heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ das **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$. (Bemerkung: Die Bezeichnung Skalarprodukt erinnert daran, dass dieses Produkt kein Vektor, sondern ein Skalar, also hier eine reelle Zahl, ist.)

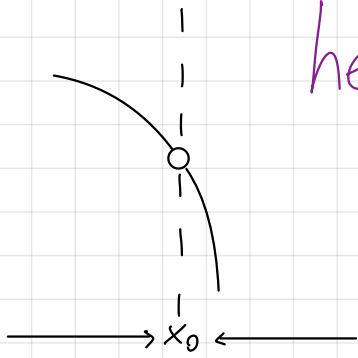
Für $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ ist das Skalarprodukt positiv, für $\varphi = 90^\circ$ ist das Skalarprodukt null und für $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ ist das Skalarprodukt negativ. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} (\neq \vec{0})$ heißen **orthogonal** (bzw. senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist, wir schreiben $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Übungen



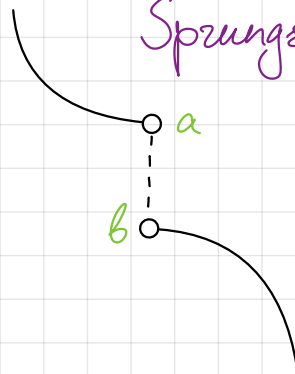
1. Bestimmen Sie $\vec{g} \cdot \vec{s}$ für das Dreieck im nebenstehenden Bild.
2. Bestimmen Sie die folgenden Skalarprodukte für die Raute im nebenstehenden Bild:
 $\vec{PM} \cdot \vec{MQ}$, $\vec{PQ} \cdot \vec{PS}$, $\vec{PQ} \cdot \vec{RS}$
3. Überlegen Sie sich für eigene Vektoren die entsprechenden Skalarprodukte.

hebbare
Lücke



$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = a$$

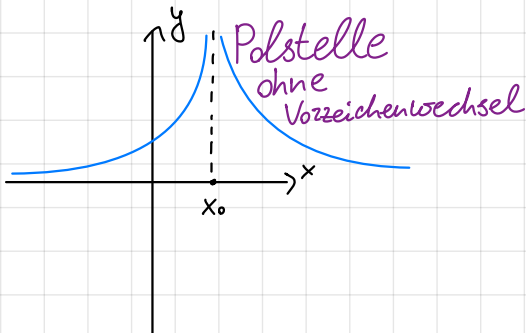
Sprungstelle



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b$$

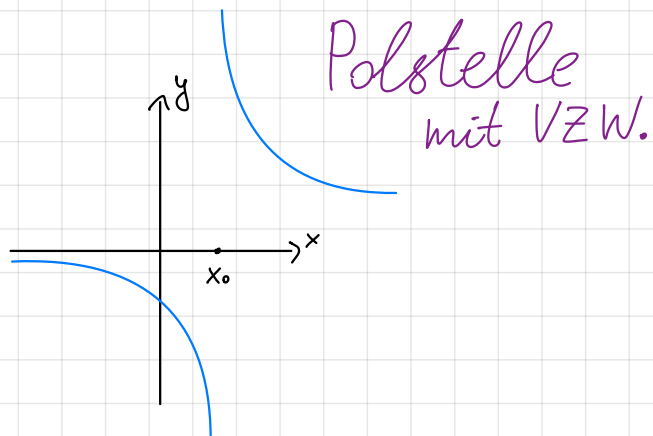
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

$$a \neq b$$



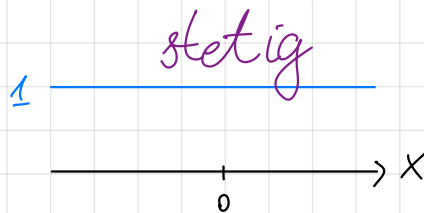
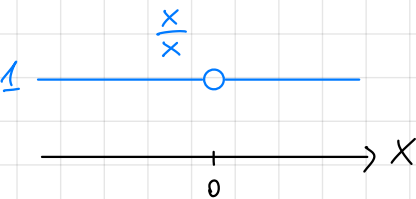
$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = \infty$$

$$(-\infty)$$

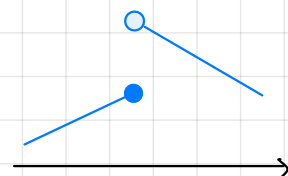
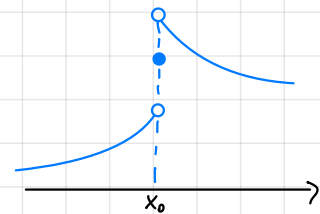


$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = \pm \infty$$

$$(\mp \infty)$$

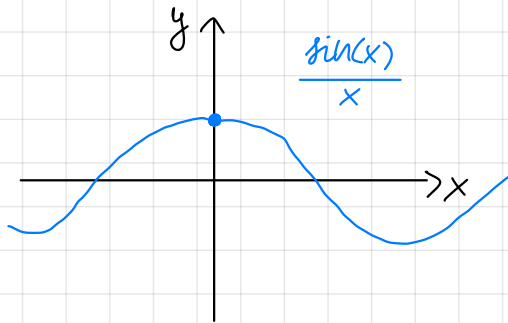


$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = 1 = 1 = f(0)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{x^3 - 216}{72 - 2x^2} = \frac{x^3 - 216}{-2(x^2 - 36)} = \frac{(x-6)(x^2+6x+36)}{(-2) \cdot (x-6)(x+6)} \stackrel{\text{für } x \neq 6}{=} \frac{x^2+6x+36}{(-2) \cdot (x+6)} =: \tilde{f}(x)$$

① $D = \mathbb{R} \setminus \{-6; 6\}$

② $\lim_{x \rightarrow -6^\pm} f(x) = \frac{-432}{(-2) \cdot (-12) \cdot 0^\pm} = \mp \infty$ (Polstelle mit VZW.)

$\lim_{x \rightarrow 6^\pm} f(x) \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 6^\pm} \tilde{f}(x) = \frac{3 \cdot 36}{(-2) \cdot 12} = -\frac{9}{2}$ (Hebbare Lücke)

③ Nullstellen: keine, $\Delta < 0$

④ Schnittpunkt $S(0; -3)$
mit der y-Achse

⑤ Verhalten im Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 216}{72 - 2x^2} = \mp \infty$$

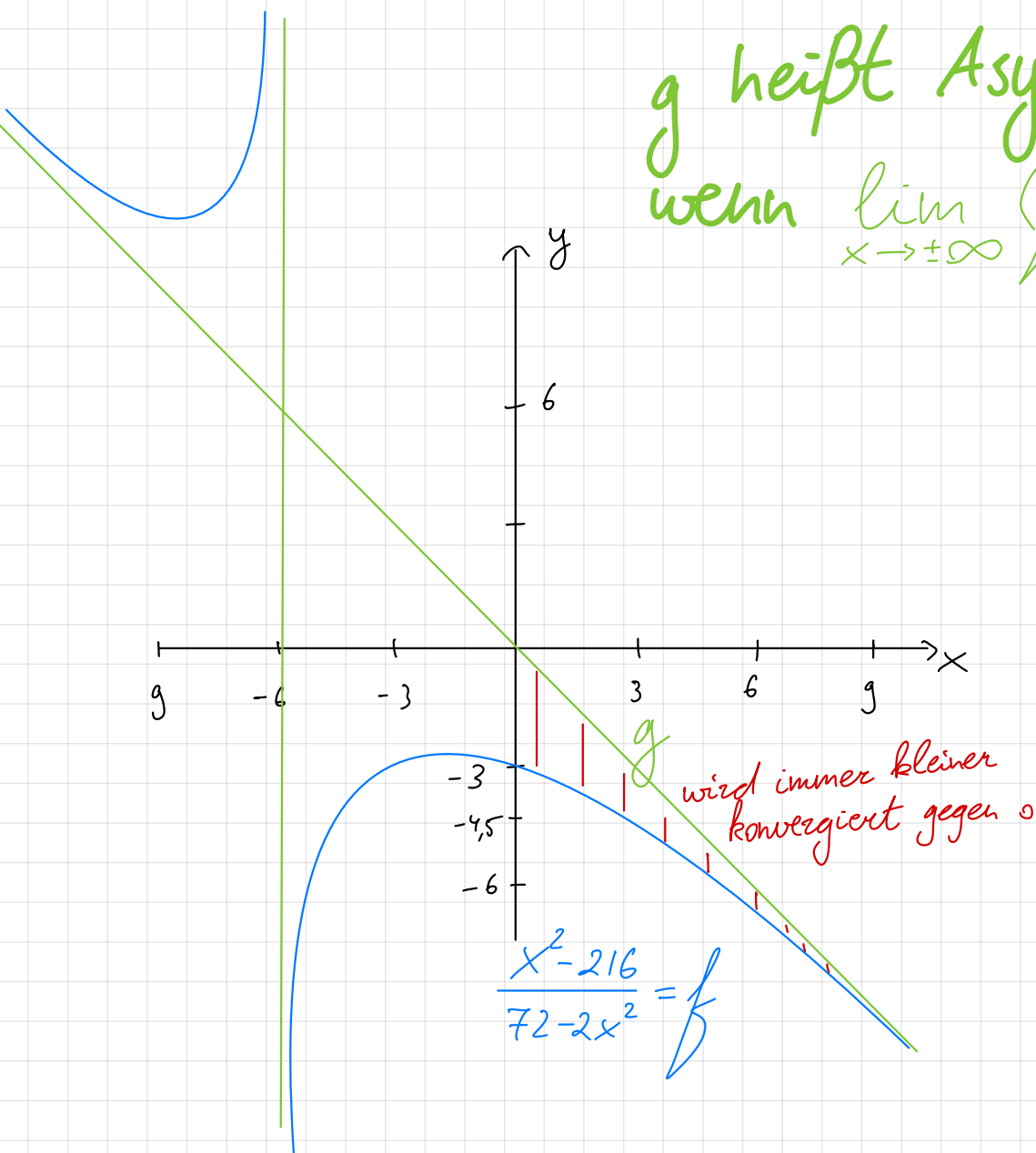
	$\frac{1}{-}$	$\frac{6}{-6}$	$\frac{36}{0}$	
	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{36}$	Rest	

Asymptote

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 6x + 36}{x+6}$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

g heißt Asymptote auf
wenn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$



$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1} = \frac{x^4}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{x^4}{x-1}}{x+1} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}}{x+1} =$$

$$= \underbrace{x^2 + 1}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{(x-1)(x+1)}}_{\text{Rest}}$$

1	0	0	0	0	
1	-	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
-1	-	-1	0	-1	1
	1	x^2	0	1	1

Rest 2: $\frac{1}{x-1}$

Rest 1: $\frac{1}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{x^4}{x^2 - 1}}_{f(x)} - \underbrace{(x^2 + 1)}_{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

1. Definitionsbereich ($\mathbb{R}$) (zuerst faktorisieren) 02.25

2. Verhalten an den Def. Lücken

3. Verhalten im Unendlich

4. Nullstellen

5. Schnittpunkt mit y-Achse

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} =$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + x + 1) = \overset{\frac{x^3}{x^2}}{x} + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$-(x^3 + x^2 + x)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} = 0$$

$y = x$ ist Asymptote an f für $x \rightarrow \pm \infty$

① $x^2 + x + 1 \neq 0$

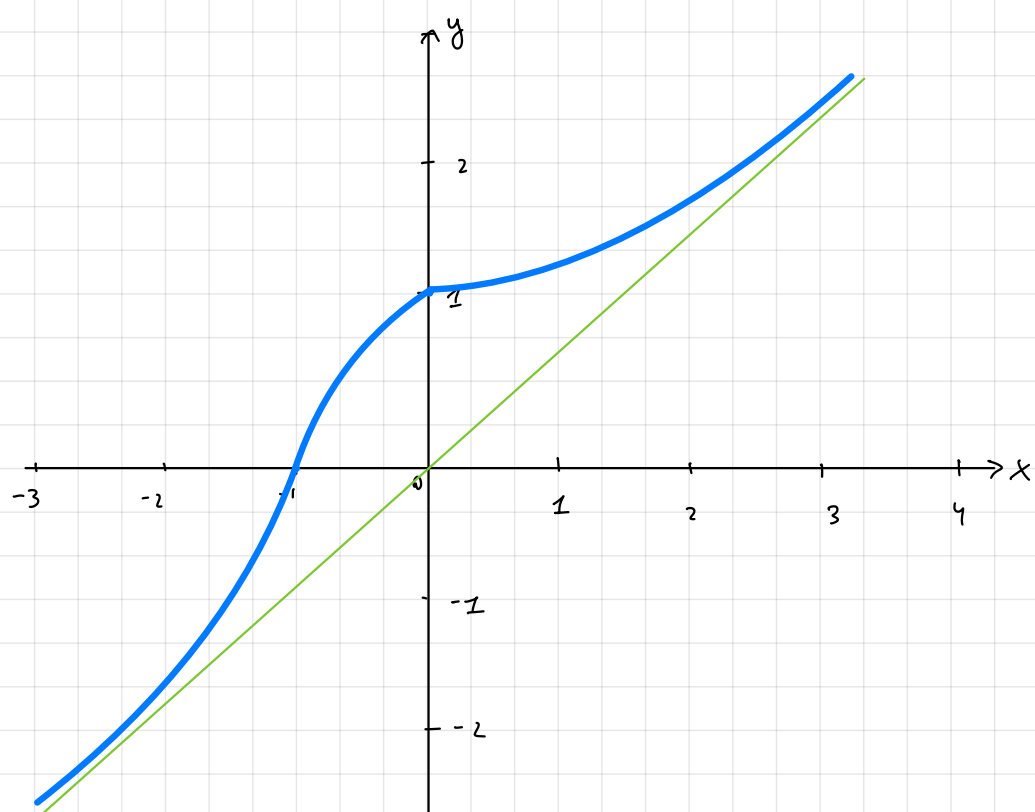
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

② —

③ $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$

④ Nullstellen: $x = -1$

⑤ $S(0; 1)$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

① $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$ $x_0=4$ ist hebbare Lücke

② $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

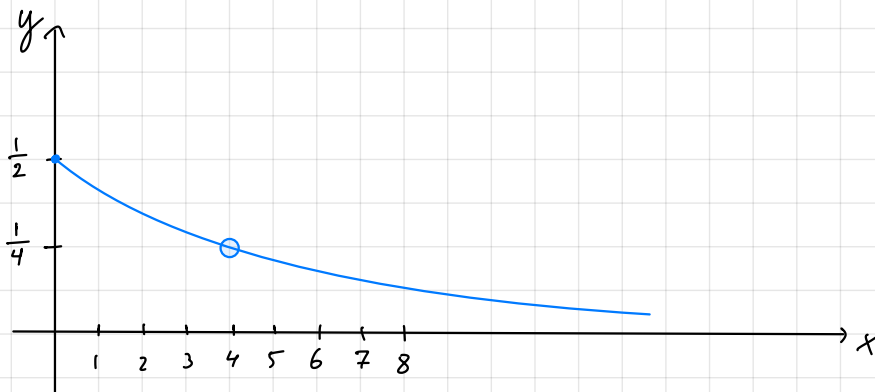
Die Funktion f an der Stelle $x_0=4$ durch $\frac{1}{4}$ passend ergänzt werden

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\infty} = 0$

Die x -Achse ($y=0$) ist Asymptote an f für $x \rightarrow \infty$

④ keine Nullstelle

⑤ $S(0; \frac{1}{2})$



$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = x-2 = \tilde{f}(x)$$

$$\textcircled{1} \quad \Omega = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

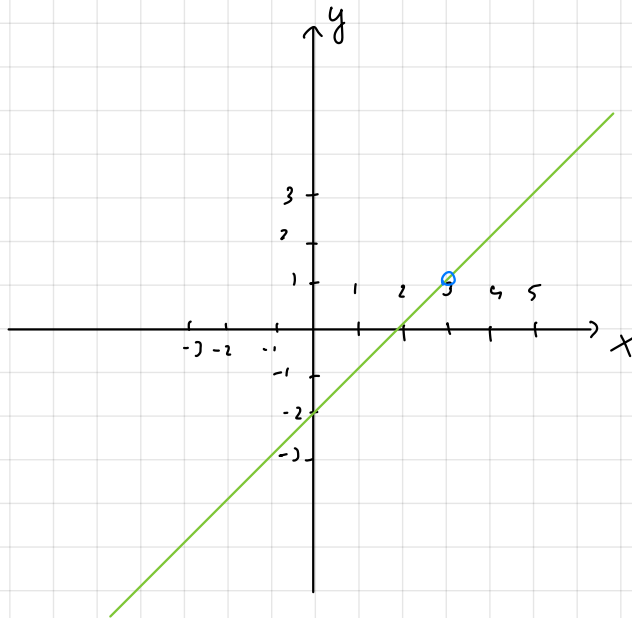
$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \textcircled{3\pm}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3\pm} \tilde{f}(x) = \underline{1}$$

Hebbare Lücke *Ergänzung*

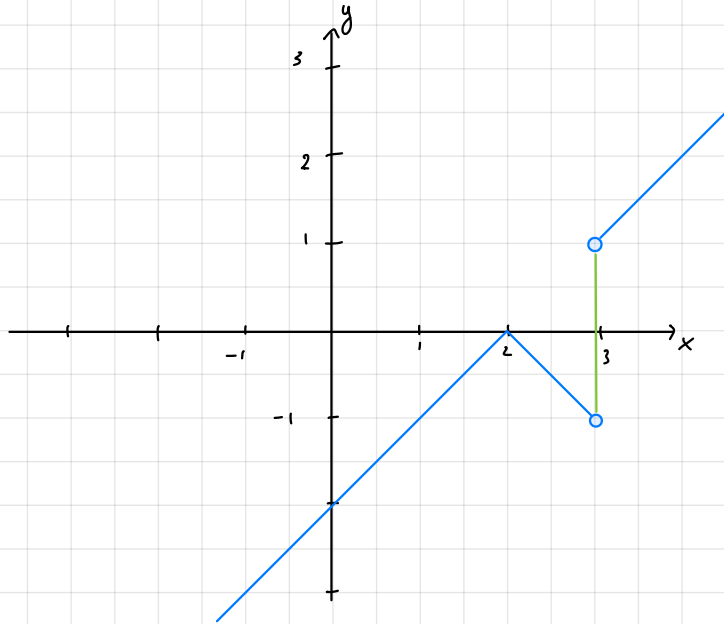
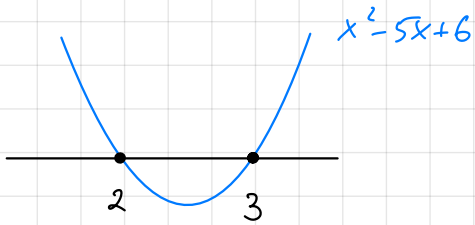
$$\textcircled{3} \quad S(0; 2)$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Nullstelle} \quad x_0 = 2$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Asymptote} \quad y = x - 2$$



$$f(x) = \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 3} = \begin{cases} x - 2, & \text{für } x \leq 2, x > 3 \\ 2 - x, & \text{für } 2 < x < 3 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2 - x) = -1$$

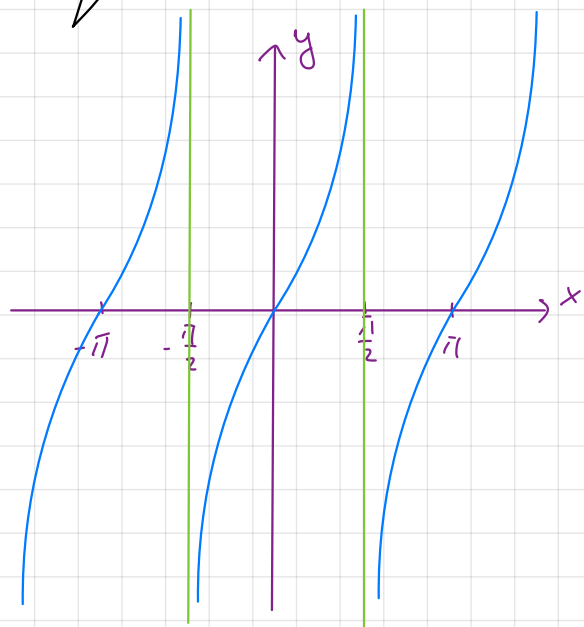
$x_0 = 3$ ist eine Sprungstelle

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$\arctan$ ist eine Umkehrfunktion zu $\tan$

$$\tan(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

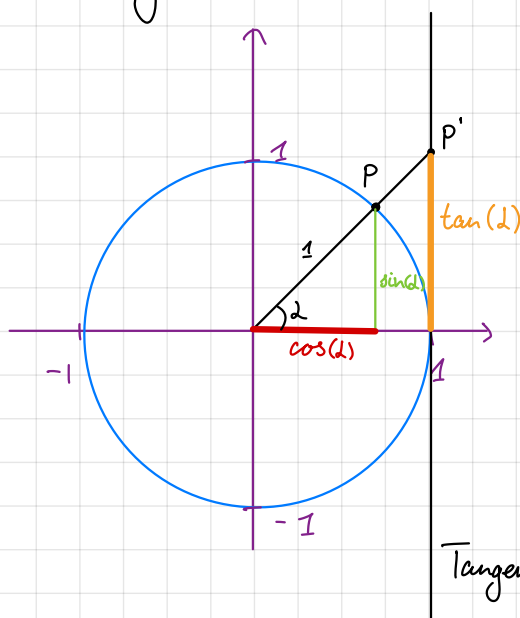
$$\text{Def.-Lücke im } \tan(x) \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$$



$$\sin \angle = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \angle = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

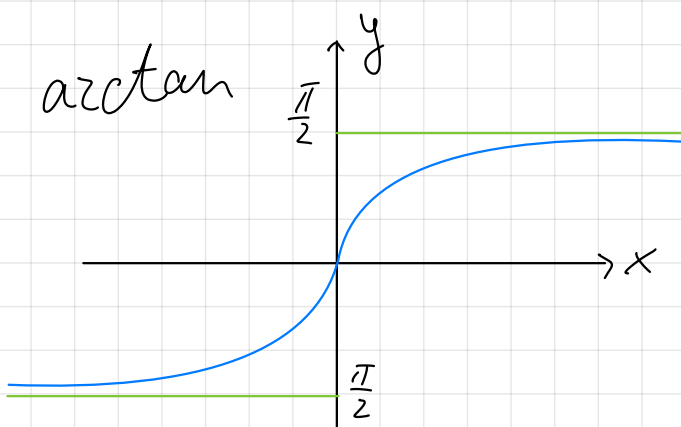
$$\tan \angle = \frac{\sin \angle}{\cos \angle}$$



$$\frac{\sin(\angle)}{\cos(\angle)} = \frac{\tan(\angle)}{1}$$

$$\tan: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \nearrow$$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\nearrow$$



$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$x=1$ ist eine
Sprungstelle
(mit der Höhe π)

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

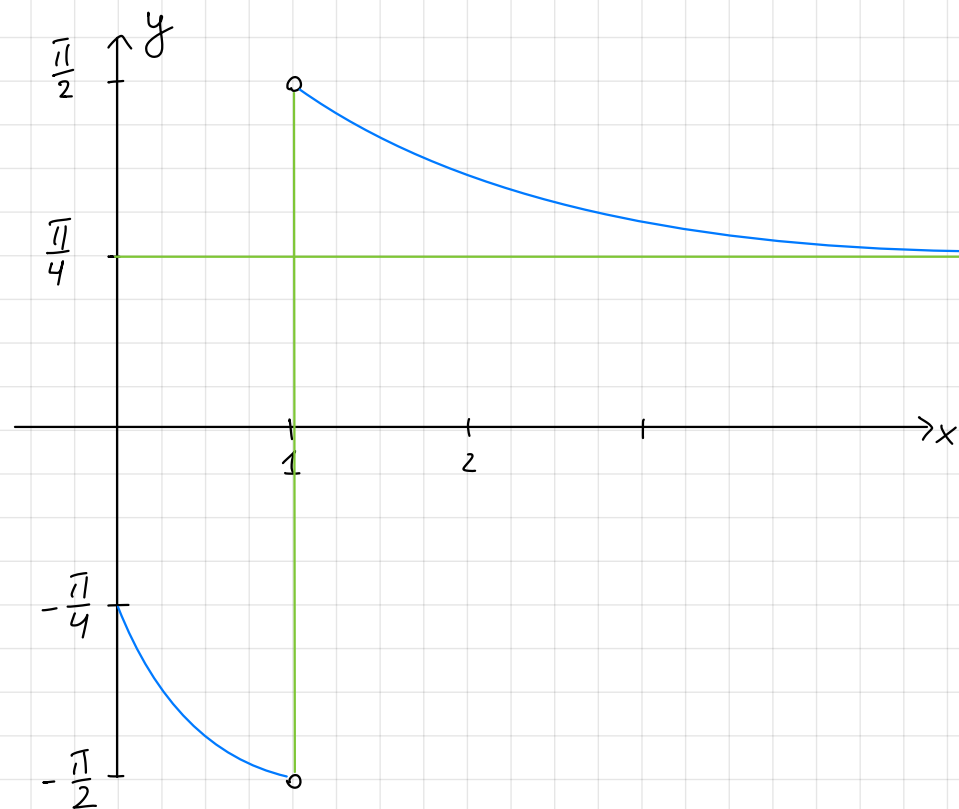
$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \arctan\left(\frac{2}{0^\pm}\right) = \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad S(0; -\frac{\pi}{4})$$

$\textcircled{4}$ Nullstellen: $x_0 = 0$ einzige Nullstelle

$\textcircled{5}$ Asymptote: $y = \frac{\pi}{4}$ für $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \arctan\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}\right) = \\ &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



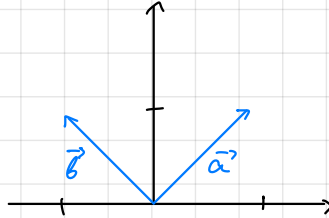
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \angle = 90^\circ, \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\angle = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

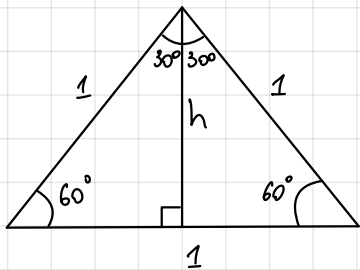
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 1 = 0 \rightarrow \angle = 90^\circ$$

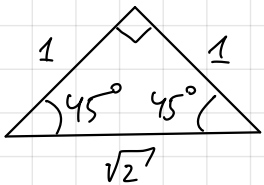
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\angle = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 45^\circ$$



$$\sin(60^\circ) = h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$



$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\angle = \arccos\left(\frac{1+0+4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}\right) = 24,09^\circ$$

$\angle ASB - ?$

$$A(4;6;0) \quad S(2;4;6) \quad B(0;7;0)$$

$$\vec{SA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{SB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\angle = \arccos\left(\frac{2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}\right) = 35,08^\circ$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -4t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad 2 \quad 4 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad -4 \quad 0$$

$$y = 4z$$

$$3x + 8z + 4z = 0$$

$$x = \frac{-12z}{3} = -4z$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4k \\ 4k \\ k \end{pmatrix}$$

Für das Skalarprodukt existiert eine **Koordinatenform**. Es gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

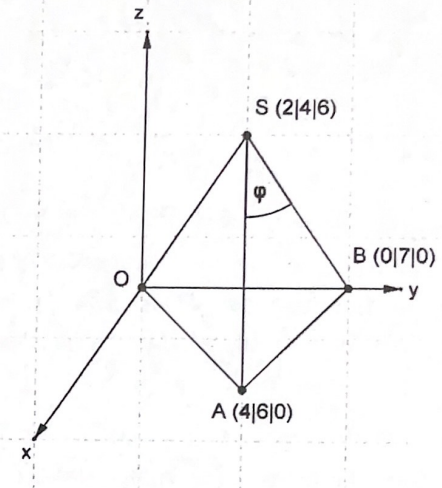
bzw. allgemein

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k.$$

Die Koordinatenform des Skalarproduktes ermöglicht es nun, die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren aus ihren Koordinaten zu berechnen.

Übungen

1. Gegeben ist der Tetraeder OABS. Berechnen Sie den Winkel φ .
2. Bestimmen Sie alle Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

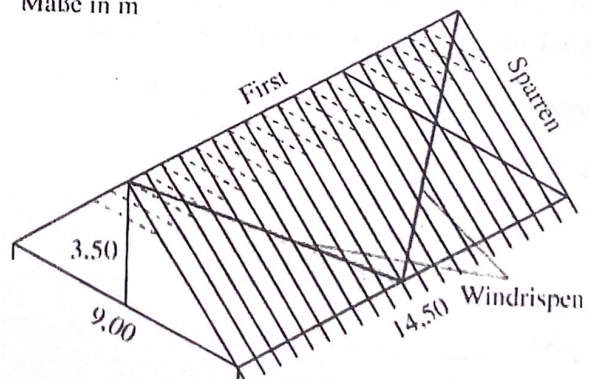


Hausaufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g durch die Punkte $A(2|-3|1)$ und $B(10|5|15)$. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte der Geraden g , die von A den Abstand 9 haben.
[zur Kontrolle: Einer der Punkte hat die Koordinaten $P(6|1|8)$].
2. Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{a} - r \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$ ist.
Interpretieren Sie die Lage der Vektoren geometrisch.
3. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Punkte $A(-4|8)$, $B(5|-4)$ und $C(7|10)$. Bestimmen Sie den **Fußpunkt** F der Höhe h_c . [Unter dem Fußpunkt versteht man den Schnittpunkt des Lotes von C auf die Strecke AB .]

Maße in m

4. Die nebenstehende Grafik zeigt die Anordnung der Balken eines Daches.
 - a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie die Lage eines Sparrens und einer Windrispe durch einen Vektor.
 - b) Berechnen Sie die Länge einer Windrispe und die Größe des Winkels zwischen Sparren und Windrispe.



$$A(2; -3; 1) \quad B(10; 5; 15)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{A} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = g$$

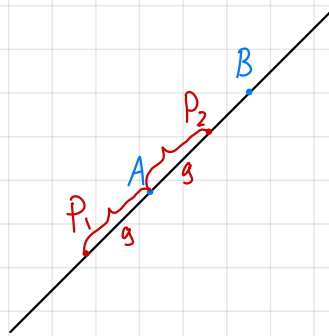
$$\sqrt{z^2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = g$$

$$g\sqrt{z^2} = g$$

$$z = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - z \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$(a_1 - z b_1) \cdot b_1 + (a_2 - z b_2) \cdot b_2 + (a_3 - z b_3) \cdot b_3 = 0$$

$$a_1 b_1 - z b_1^2 + a_2 b_2 - z b_2^2 + a_3 b_3 - z b_3^2 = 0$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = z b_1^2 + z b_2^2 + z b_3^2$$

$$z = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = 2$$

Name: _____

Klasse: _____ Datum: _____

Arbeitsblatt Mathematik

Ableitung und lokale Änderungsrate

Von mittleren zu lokalen Änderungen

Auftrag Noch einmal winken

Jessika hat ihren Freund zur Regionalbahn gebracht. Der Zug setzt sich in Bewegung und Jessica steigt auf ihren Roller. „Ob ich ihm an der Schranke noch zuwinken kann?“

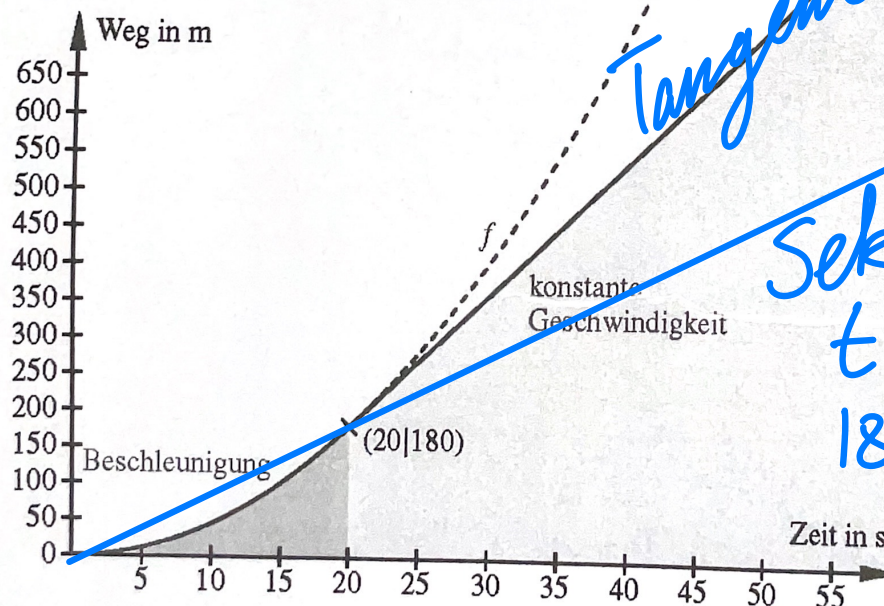
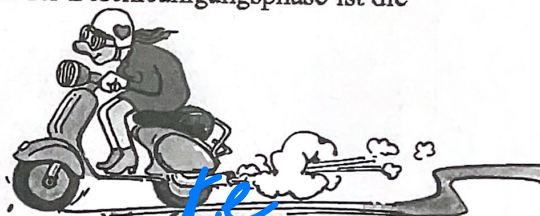
Schätzen Sie anhand der folgenden Angaben, ob Jessica eine Chance hat:

Sie braucht in der Regel ca. 4 Minuten bis zur Schranke. Der Zug hat eine Beschleunigungsphase von 20 Sekunden. Danach fährt er mit gleichmäßiger Geschwindigkeit weiter. Bis zur Schranke sind es auf der Bahnstrecke etwa 4 km. Während der Beschleunigungsphase ist die Zeit-Weg-Funktion des Zuges gegeben durch:

$$f(x) = 0,45 \cdot x^2.$$

x : Zeit in Sekunden

$f(x)$: Weg in Metern



$$t(x) = 18x + b$$

$$180 = 18 \cdot 20 + b$$

$$b = -180$$

Viola: „In 20 Sekunden legt der Zug 180 m zurück, dann fährt er also mit einer Geschwindigkeit von $9 \frac{m}{s}$. Das entspricht ca. $32 \frac{km}{h}$. Er erreicht die Schranke folglich nach ca. $\frac{4}{32}$ Stunden. Das sind ca. 7 Minuten. Voilà, das schafft sie locker!“

Begründen Sie, warum diese Schätzung sehr ungenau ist und sich Jessica darauf lieber nicht verlassen sollte.

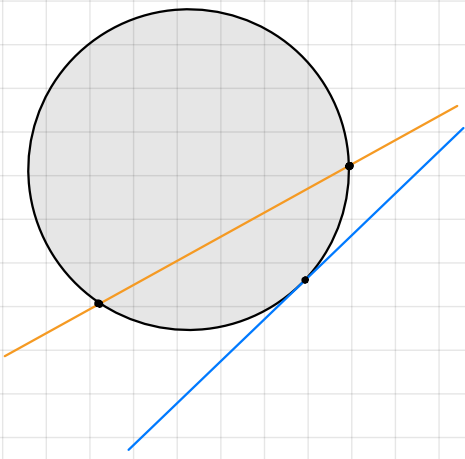
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die der Zug nach 20 Sekunden erreicht, genauer und lösen Sie Jessikas Problem.

TIPP: Um die Durchschnittsgeschwindigkeit zu bestimmen, berechnet Viola den Differenzenquotienten:

$$\frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}}$$

06.02.25

Tangente - Momentangeschwindigkeit
 Sekante - Durchschnittlich
 sch



$$f(x) = 0,45x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 20} \frac{0,45x^2 - 180}{x - 20} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 20} (0,45x + 9) = 18$$

$$\frac{f(x) - f(20)}{x - 20} \quad \text{Differenzenquotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow 20} \frac{f(x) - f(20)}{x - 20} \quad \text{Ableitung / Differenzialquotient}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \frac{df}{dx} \quad df, dx \text{ sind Differenziale}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,45(20+h)^2 - 0,45 \cdot 20^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,45(400 + 40h + h^2 - 400)}{h} = 0,45 \cdot (40 + 0) = 18$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2) = 3x_0^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \dots = \cos(x)$$

10.02.2025

10:20 Uhr 18°C Minute 0

10:30 Uhr 20°C Minute 10

$$\frac{20-18}{10-0} = \frac{2}{10} = 0,2 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$$

Differenzenquotient

Zwischen 10:20 Uhr und 10:30 Uhr ändert sich die Temperatur um $0,2^{\circ}\text{C}$ pro Minute.

10:35 Uhr 21°C

10:00 Uhr 14°C

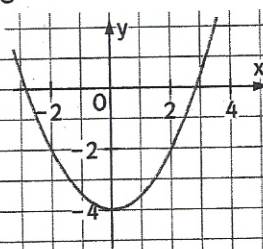
$$f = \frac{1}{2}x^2 - 4$$

$$s(t) = m \cdot t + b$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1,9) - f(-2)}{-1,9 - (-2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-1,9)^2 - 4 - (\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4)}{0,1} = -\frac{39}{20} = -1,95$$

1 Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ rechnerisch, in Teilaufgabe a) auch grafisch

a) im Intervall $[0; 2]$



b) im Intervall $[-1; 1]$

c) im Intervall $[-2; -1,9]$

Ergebnis: _____

Ergebnis: _____

Ergebnis: -1,95

2 Grüner Tee wird mit 70°C heißem Wasser aufgebraut. Beim Abkühlen wurde die Temperatur gemessen.

Zeit t (in min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Temperatur T (in $^\circ\text{C}$)	70,0	60,6	52,8	46,7	41,5	37,3	34,0	31,3	29,3	27,5

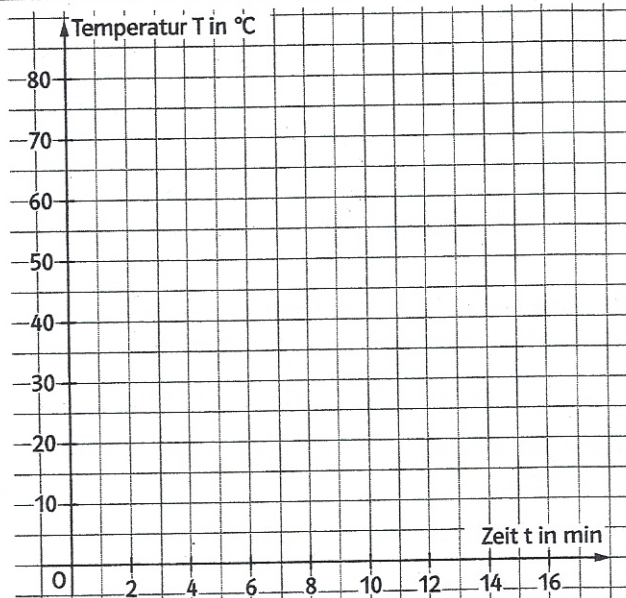
a) Zeichnen Sie den Graphen.

b) Die mittlere Änderungsrate der Funktion Zeit $t \rightarrow$ Temperatur T für den gesamten Messzeit-

raum beträgt _____ $\approx$ _____ (in $\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$).

c) Die mittlere Änderungsrate ist negativ, weil _____.

d) Bestimmen Sie die mittleren Änderungsraten für die ersten und letzten zwei Minuten rechnerisch und mithilfe des Graphen.

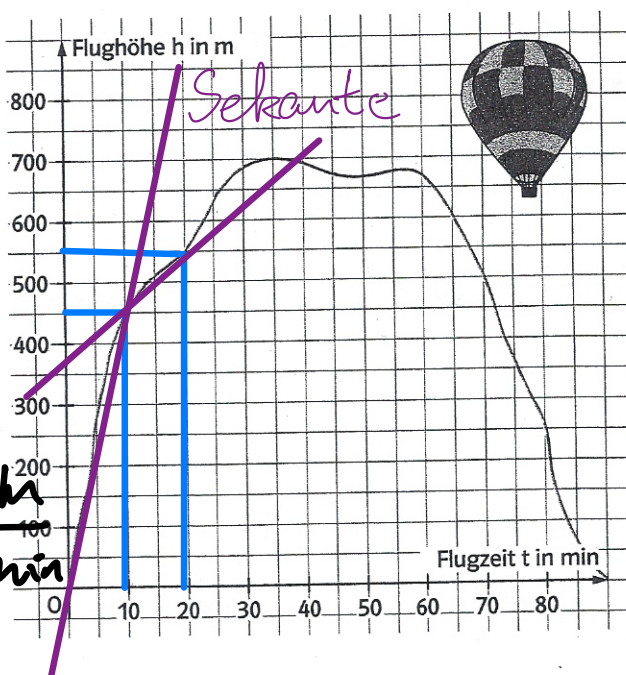


3 Bei der Fahrt mit einem Heißluftballon wird die aktuelle Höhe aufgezeichnet.

a) Die mittlere Steiggeschwindigkeit in den ersten 10 Minuten beträgt $45 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Zwischen Minute 10 und Minute 20 beträgt die mittlere Steiggeschwindigkeit $10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Der Ballon steigt also in dieser zweiten Zeitspanne _____.

b) Berechnen Sie die durchschnittlichen Sinkgeschwindigkeiten von Minute 65 bis Minute 70 und von Minute 70 bis Minute 90.

$$\frac{0 - 500}{90 - 70} = \frac{-500}{20} = -25 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$



$$S(10; 450) \quad P(20; 550)$$

$$s(t) = m \cdot t + b = 10t + b = 10t + 350$$

$$m = \frac{550 - 450}{20 - 10} = \frac{100}{10} = 10$$

$$450 = 10 \cdot 10 + b$$

$$b = 350$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - (2+h)}{h(2+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2} = f'(2)$$

Die Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnen

1 Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

a) $f(x) = 4x^2$; $x_0 = -1$

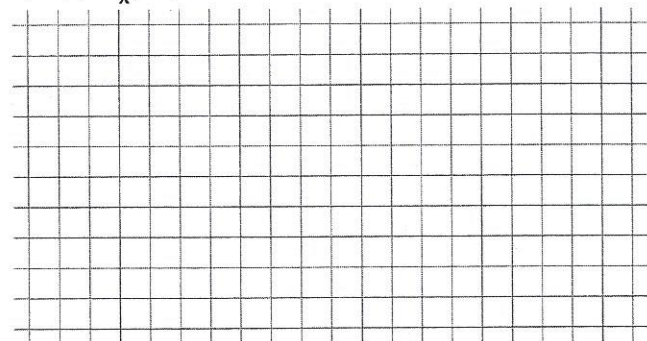
1. Schritt: Differenzenquotient aufstellen

2. Schritt: Differenzenquotient umformen

3. Schritt: Grenzwert für $h \rightarrow 0$ bestimmen

Man erhält für die Ableitung $f'(\text{---}) = \text{---}$.

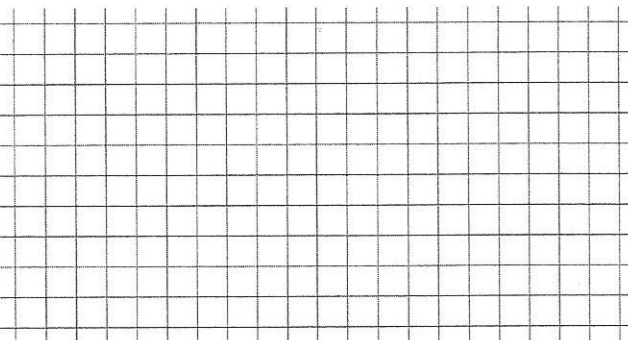
b) $f(x) = \frac{2}{x}$; $x_0 = 2$



Man erhält für die Ableitung $f'(\text{---}) = \text{---}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(\text{---} + h) - f(\text{---})}{h} &= \frac{4 \cdot (\text{---} + h)^2 - 4 \cdot (\text{---})^2}{h} \\ &= \frac{\text{---}}{h} = \frac{\text{---}}{h} \\ &= \frac{\text{---}}{h} = \frac{\text{---}}{h} \\ &= \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

c) $f(x) = -x^2 - 2$; $x_0 = -2$

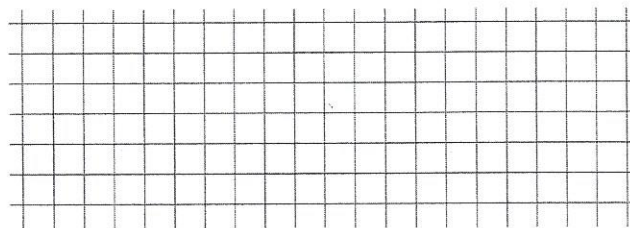


Man erhält für die Ableitung $f'(\text{---}) = \text{---}$.

2 Wird eine Feuerwerksrakete senkrecht gestartet, so gilt für ihre Höhe a (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) näherungsweise: $a(t) = -5t^2 + 40t$. $-5(t^2 - 8t + 16) + 80 = -5(t-4)^2 + 80$

a) Die mittlere Änderungsrate von $a(t)$ im Zeitintervall $[0; 2]$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit der Rakete. Die lokale Änderungsrate $a'(t)$ der Flughöhe entspricht der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t .

b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Rakete beträgt in den ersten 2 Sekunden _____ und in den nächsten 2 Sekunden _____.



c) Die Momentangeschwindigkeit der Rakete nach 2 Sekunden beträgt _____.

3 Ordnen Sie jedem Graphen die passende Funktionsgleichung zu. An welchen Stellen sind diese Funktionen nicht differenzierbar?

Schaubild	Funktion	Nicht differenzierbar in
A	$ x-2 -1$	$x_0 = 2$
B	$ x+1 -1$	$x_0 = -1$
C	$\sqrt{x+2}$	$x_0 = -2$

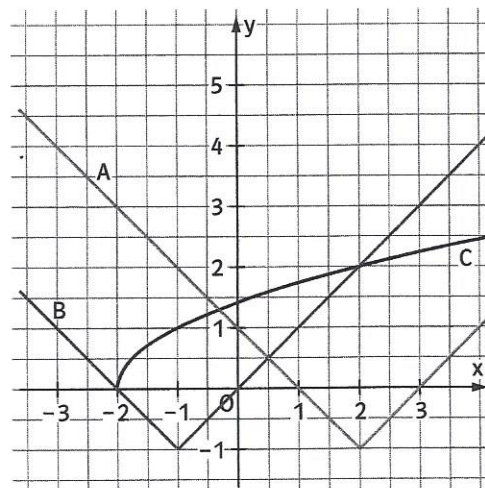
$f(x) = |x+2| - 1$

$g(x) = |x-2| - 1$

$h(x) = \sqrt{x-2}$

$i(x) = \sqrt{x+2}$

$k(x) = |x+1| - 1$



$x^{0,5} = 0,5 x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{a(2) - a(0)}{2 - 0} = \frac{60 - 0}{2 - 0} = 30$$

$$\bar{I} = [2; 4]$$

$$\frac{a(4) - a(2)}{4 - 2} = \frac{80 - 60}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

f ist in $\mathbb{R}^+$ differenzierbar

$$f(x) = |x|$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \text{ existiert nicht, weil:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1$$

$$f'(0+) = 1$$

$$f'(0-) = -1$$

$f'(0)$ nicht definiert

Skalarprodukt

Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Länge des zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeiles. Der Betrag wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. allgemein in $\mathbb{R}^n$ gelten für den Betrag folgende Darstellungen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$. (Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras)

Für den Betrag gelten folgende Eigenschaften

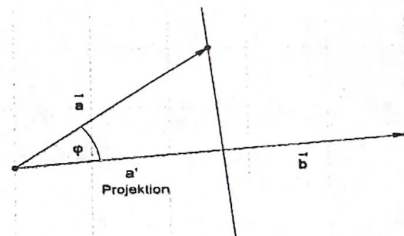
1. $|\vec{a}| \geq 0$, insbesondere $|\vec{0}| = 0$.
2. $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecks-Ungleichung, vgl. auch Analysis)

Beispiel: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$.

Übungen

1. Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P(-6|-2|3)$ und $Q(9|-2|11)$.
2. In welchen Fällen gilt für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ die Gleichung $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
3. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate p_3 so, dass $P(5|0|p_3)$ vom Punkt $Q(4|-2|5)$ den Abstand 3 hat.
4. Welche besondere Form hat das Dreieck $A(7|0|-1)$, $B(5|-3|-1)$ und $C(4|0|1)$?

Unter dem **Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$** versteht man den kleineren Winkel zwischen den Pfeilen der Vektoren. In dem folgenden Bild ist a' die **Projektion** des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$. Für die Projektion gilt im Fall $0 < \varphi < 90^\circ$: $a' \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. Das letzte Produkt wird sich für unsere Fragestellungen in diesem Kapitel als nützlich erweisen.

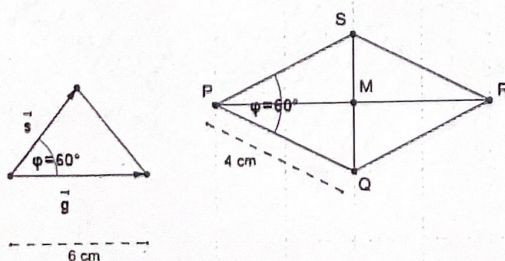


Definition und Satz

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, so heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ das **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$. (Bemerkung: Die Bezeichnung Skalarprodukt erinnert daran, dass dieses Produkt kein Vektor, sondern ein Skalar, also hier eine reelle Zahl, ist.)

Für $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ ist das Skalarprodukt positiv, für $\varphi = 90^\circ$ ist das Skalarprodukt null und für $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ ist das Skalarprodukt negativ. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} (\neq \vec{0})$ heißen orthogonal (bzw. senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist, wir schreiben $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Übungen



1. Bestimmen Sie $\vec{g} \cdot \vec{s}$ für das Dreieck im nebenstehenden Bild.
2. Bestimmen Sie die folgenden Skalarprodukte für die Raute im nebenstehenden Bild:
 $\vec{PM} \cdot \vec{MQ}$, $\vec{PQ} \cdot \vec{PS}$, $\vec{PQ} \cdot \vec{RS}$
3. Überlegen Sie sich für eigene Vektoren die entsprechenden Skalarprodukte.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Suche $z \in \mathbb{R}$

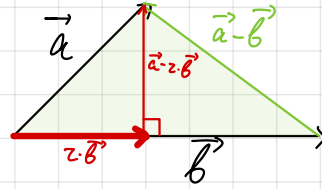
$$\vec{a} - z \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$(\vec{a} - z \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

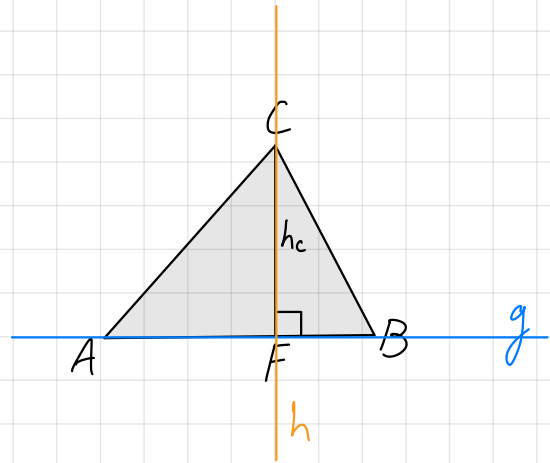
$$\vec{a} \cdot \vec{b} - z \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$60 - z \cdot 30 = 0$$

$$z = 2$$



$$A(-4; 8) \quad B(5; -4) \quad C(7; 10)$$



$$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$s \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 9z - 12s & = & 11 \\ -12z - 9s & = & 2 \end{array}$$

$$9z - 12s = 11$$

$$-75s = 50$$

④

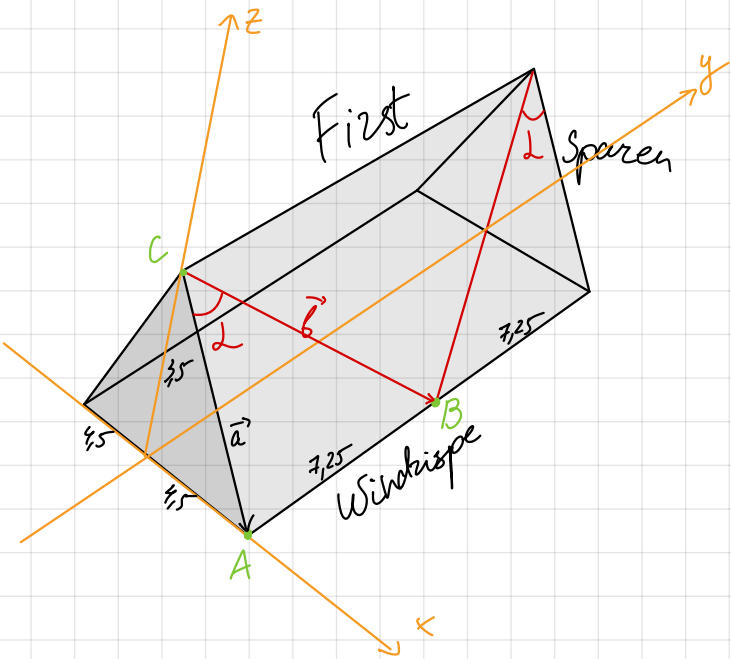
③

$$z = \frac{1}{3}$$

$$s = -\frac{2}{3}$$

$$\vec{x}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad F(-1; 4)$$

$$h = |\vec{FC}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 10$$



$$A = (4,5; 0; 0) \quad B = (4,5; 7,25; 0) \quad C = (0; 0; 3,5)$$

$$\vec{a} = \vec{CA} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 7,25 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos L$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 20,25 + 0 + 12,25 = 32,5$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{20,25 + 0 + 12,25} = 5,7$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{20,25 + 52,5625 + 12,25} = 9,22$$

$$L = \arccos\left(\frac{32,5}{5,7 + 9,22}\right) = 51,8^\circ$$

Gerade: $g: \vec{x}(z) = \vec{a} + z \cdot \vec{u}$
 $ax + by = c$

Parameterform
 Koordinatenform

Ebene: $E: \vec{x}(z,s) = \vec{a} + z \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
 $ax + by + cz = d$

Parameterform
 Koordinatenform

①

$A(1; -1; 1) \quad B(1,5; 1; 0) \quad C(0; 1; 1)$

$E: \vec{x}(z,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

② $E: \vec{x}(z,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A(7; 5; -3) \notin E$

$B(7; 1; 8) \in E$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcl} z + 2s & = & 5 \\ 3z - s & = & 5 \\ 5z + s & = & -4 \end{array}$$

$z + 2s = 5$

$-7s = -10$

$-9s = -29$

$\parallel = \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} z + 2s & = & 5 \\ 3z - s & = & 1 \\ 5z + s & = & 7 \end{array}$$

$$z + 2s = 5$$

$$-7s = -14$$

$$-9s = -18$$

$$z = 1$$

$$s = 2$$

$$\mathbb{L} = \{(1, 2)\}$$

$$\boxed{E} : \vec{x}(z, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 + 2z + 3s$$

$$y = 1 + z$$

$$\Rightarrow z = y - 1$$

$$z = 1 + \frac{1}{2}s$$

$$\Rightarrow s = 2z - 2$$

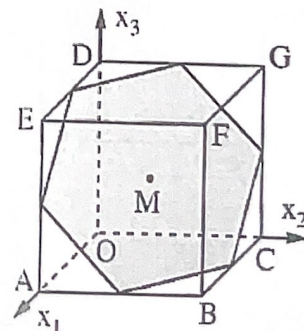
$$x = 1 + 2(y-1) + 6z - 6 = 2y + 6z - 7$$

$$x - 2y - 6z = -7$$

Übungen zu Ebenengleichungen

- Gegeben ist die Ebene $E \equiv \vec{x}(r,s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Liegen die Punkte $A(8|3|14)$, $B(1|1|0)$ und $C(4|0|11)$ in der Ebene E ?
Bestimmen Sie eine Zahl p so, dass der Punkt $P(0|p|p)$ in der Ebene liegt.
- Die Punkte $A(0|0|4)$, $B(5|0|0)$ und $C(0|4|0)$ legen eine Ebene E fest. Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie einen Ausschnitt der Ebene E . Geben Sie eine Parametergleichung von E an.
- Gegeben sind drei Punkte A , B und C , die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ihre Ortsvektoren sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Bestimmen Sie welche Punkte der Ebene $E \equiv \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$ festgelegt werden, durch die Bedingung
a) $r+s=1$ b) $r-s=0$ c) $0 \leq r \leq 1$ d) $0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq s \leq 1$
- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der x_2x_3 - Ebene.
- Bestimmen Sie zu der Ebene E eine Gleichung in Normalenform
a) $E \equiv 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 10$ b) $E \equiv x_2 = -5$
- Untersuchen Sie, ob die Gerade $g \equiv \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zu $E \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist.

- Betrachten Sie die Ebene, durch den Mittelpunkt des Würfels, die orthogonal zur Diagonalen OF ist. Stellen Sie die Ebene in Normalenform auf. Begründen Sie, dass die Ebene die Kanten des Würfels, die sie schneidet, jeweils halbiert.



Функция	Производная
$a \cdot f(x) \ (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Summenregel

Produktregel

Quotientenregel

Kettenregel

1. $x' = 1$

2. $C' = 0$

3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

4. $(u + v)' = u' + v'$

5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

7. $(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

8. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

13. $(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

14. $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $(\operatorname{arctgu})' = \frac{u'}{1+u^2}$

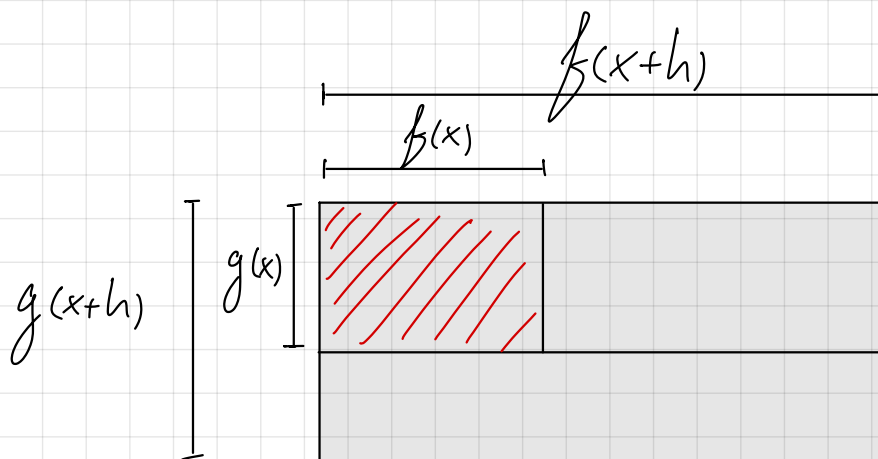
18. $(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2}$

$$\left((f(x))^n \right)' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$(\sin^4(x))' = 4 \cdot \sin^3(x) \cdot \cos(x)$$

$$\begin{aligned}
 (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
 &= f'(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \cdot f(x+h)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x+h) = \\
 &= f'(x)g(x) + g(x) \cdot f'(x)
 \end{aligned}$$



$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x + e^x = e^x(2x + x^2 + 1) = e^x(x+1)^2$$

$$e^x(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(x) = 5x(1-x)^2$$

$$f'(x) = 5(1-x)^2 - 2 \cdot 5x(1-x) = 5(1-x)(1-3x)$$

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2 = \\ &= (x-1)(x+1)(2(x+1) + 3(x-1)) = \\ &= (x-1)(x+1)^2(2x+2+3x-3) = \\ &= (x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1 \text{ (einfach)}$$

$$x_2 = -1 \text{ (doppelt)}$$

$$x_3 = 0,2$$