Aussage ist math. oder sprachliche Formulierung, die wahr (w) oder falsch (f) ist.

äquivalent / die Äquivalent: A <=> B
Implikation: A => B / B => A

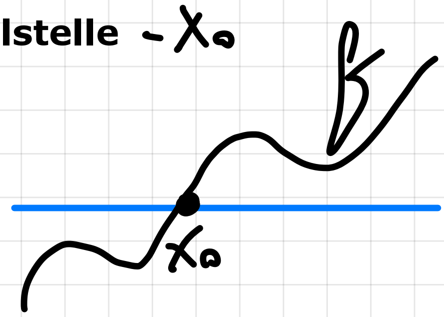
$A \wedge B$ und
$A \vee B$ oder
$\neg A$ nicht

Mit
A: es regnet
B: die Straße ist nass

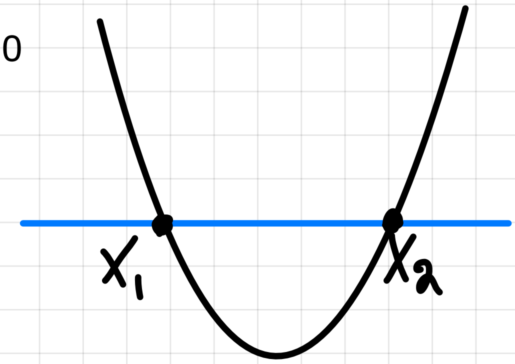
A=>B w, B=>A f

Wenn zwei Aussagen nicht äquivalent sind: </=>

Nullstelle - x_0



f(x0) = 0



1. Mathematik und Sprache

„Auch ein mathematischer Text ist ein Text in deutscher Sprache."
(A. Beutelspacher, **Das ist o.B.d.A. trivial**, Vieweg-Verlag, 1991)

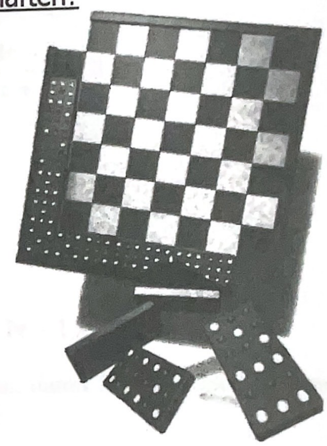
Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent? (Kreuzen Sie an!)

$B \Rightarrow A$

A ☒ Es gibt eine Nullstelle.
B ☐ Es gibt genau eine Nullstelle.
C ☒ Es gibt mindestens eine Nullstelle.

$A \Leftrightarrow C$

2. Was unterscheidet Mathematik von den Naturwissenschaften?



Diskutieren Sie diese Frage anhand der folgenden Fragestellung:

Ein Schachbrett hat 8·8=64 Felder. Nimmt man zweigegenüberliegende Eckfelder weg, bleiben 62 Felder übrig. Kann man 31 Dominosteine, die jeweils die Größe zweier Felder haben, so legen, dass sie das unvollständige Schachbrett ganz abdecken? (s. Abb.)

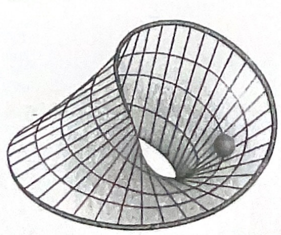
Literatur:
W. Blum, Was ist was (Bd. 12), Mathematik, Tessloff-Verlag, 2001.

3. Aussagen und Aussageformen

Eine Aussage ist eine sinnvolle sprachliche Äußerung, die entweder wahr oder falsch ist. Eine Aussageform ist eine Aussage, die mindestens eine Variable enthält und die zur Aussage wird, wenn man für die Variable eine Zahl aus einer Grundmenge einsetzt.

a) Was sind Aussagen?

α ≡ `Guten Morgen` β ≡ `Mein Name ist Peter Kubach`



b) Der Mathematiker und Astronom August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) entdeckte eine Fläche, die nur eine Seite hat. Das nach ihm benannte Möbiusband (siehe Bild) findet man zum Beispiel in der Biochemie, wo DNA-Stränge (Nucleinsäuren) so aufgebaut sind.

γ ≡ `Jedes Objekt hat eine Vorder- und Rückseite`

Geometrischer Beweis

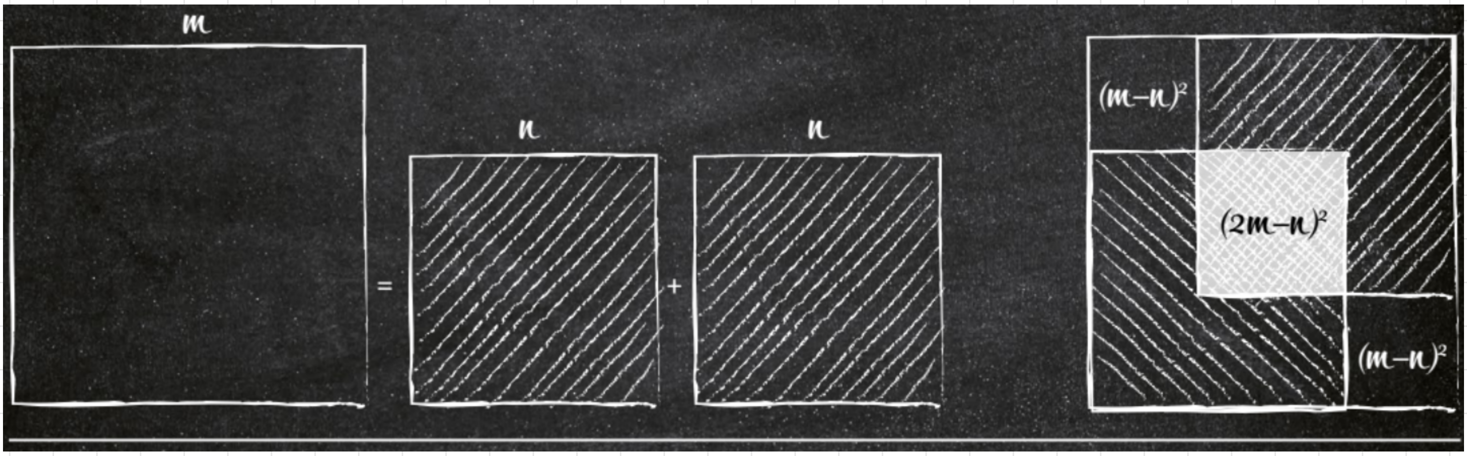
Es sei m √2 = n , wobei m:n die kleinstmöglichen Zahlen sind, die keine gemeinsamen Teiler haben. Dann ist 2n2= m2, d.h. der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seite m ist gleich der Summe der Flächeninhalte von zwei Quadraten mit der Seite n. Legt man die kleineren Quadrate in die gegenüberliegenden Ecken des großen Quadrats, so ergibt ihr Schnittpunkt ein neues Quadrat mit der Seitenlänge m - 2(m - n) = 2n - m. Die unbedeckten Teile des Quadrats sind ebenfalls Quadrate mit der Seitenlänge m - n. Aus der Gleichheit des Flächeninhalts des Quadrats mit der Seite m und der Summe der Quadrate mit der Seite n ergibt sich, dass der Flächeninhalt des Bereichs der Ebene, in dem sich die Quadrate überschneiden, gleich dem Flächeninhalt der nicht abgedeckten Flächen im Inneren des Quadrats ist, d. h. (2n - m)2= 2(m - n)^2. Daraus folgt, dass √2 = (2n - m) : (m - n). Das heißt, die Zahl √2 lässt sich als das Verhältnis von ganzen Zahlen darstellen, die kleiner sind als m und n, die bereits die kleinsten waren! Wir haben einen Widerspruch.

Algebraischer Beweis

Wenn √2 als Bruch ausgedrückt werden kann, dann können wir ihn als das Verhältnis der natürlichen Zahlen a und b schreiben, nämlich **√2 = a:b** , wobei a und b keine gemeinsamen Faktoren haben (d.h. **der Bruch ist irreduzibel**).

Wir multiplizieren die Gleichheit mit b und quadrieren ihre beiden Teile.
Wir erhalten **2b^2= a^2**.

Da der linke Teil der Gleichung gerade ist, **muss a^2 durch 2 teilbar sein**, und das ist nur möglich, wenn a gerade ist.
Wenn a gerade ist, können wir es als ***a = 2c*** darstellen.
Aber dann ist 2b^2= 4c^2, was bedeutet, dass b^2= 2c^2 ist, was wiederum bedeutet, dass b gerade ist.
Wir haben also herausgefunden, dass a und b gerade Zahlen sind, aber das widerspricht der Aussage, dass der Bruch a:b nicht reduzierbar ist.
Dieser Widerspruch beweist, dass es unmöglich ist, √2 als Bruch darzustellen.



Herr Weigelt

22.08.2024

Silke 5 Überlandfahren 4 Nachtfahren 280€
Tanja 6 / 5 / 380€
Mark 6 / 4 / 310€

xü: Preis für eine Überlandfahrt
xn: Preis für eine Nachtfahrt

Silke: 5xü + 4xn = 280
Tanja: 6xü + 5xn = 380
Mark: 6xü + 4xn = 310

Mark - Silke: xü = 310-280 = 30
Mark: 5 * 30 + 4xn = 280; 150 + 4xn = 280; 4xn = 130; xn=32.5

Tanja: 6 * 30 + 5 * 32.5 = 342.5

Man nennt dies ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten.
Gleichungen der Form «a1x1+a2x2+…+anxn=b» heißen **lineare Gleichungen**, da die Variablen nur in der ersten Potenz vorkommen.

x – Unbekannte
a – Koeffizient
b –

Die Lösung des LGS bezeichnet man als N-Tupel (x1, x2, …, xn).
Eine Lösung muss alle Gleichungen erfüllen.

Beispiel:
1) x1 - 2x3 = -4
2) 2x1 = 4
3) x1 - x2 = -3
4) 4x1 - x2 - 2x3 = 1

x1 = 2
x2 = -(-3 - 2) = 5
x3 = (-4 - 2) / -2 = 3
Eine Lösung fir die Gleichungen 1, 2 und 3: (x1, x2, x3) = (2, 5, 3)

Wir prüfen unsere Lösung in 4:
4 * 2 - 5 - 2 * 3 = 1
8 - 5 - 6 = 1
-3 ≠ 1

Das LGS 1, 2, 3, 4 $\mathbb{L} = \emptyset$

Beispiel 2

x - erste Ziffer, y - zweite Ziffer, z - dritte Ziffer

$x + y + z = 7$
$y = 2z$

$\mathbb{L}\ \{(7 - 3x_3, 2x_3, x_3)\}$

$x + 3z = 7$
$z < 5$
$z = 0, 1, 2, 3, 4$
$x = 7, 4, 1, /, /$
$y = 0, 2, 4, 6, 8$

$z > 2$ ist $x < 0$

$\mathbb{L} = \{700, 142, 421\}$

700, 421, 142

Übungen zu Linearen Gleichungssystemen (LGS)

---

x 1 2 3 4 5 6 7 8 9
y / 1 / 2 / 3 / 4 /
z / 6 / 5 / 4 / 3 /

1. Bestimmen Sie alle dreistelligen Zahlen mit den verlangten Eigenschaften

   a. Die erste Ziffer ist um 4 größer als die letzte, und die Summe der beiden ersten Ziffern ist 9. 450, 541, 632, 723, 814, 905

   b. Die Summe der beiden letzten Ziffern ist 7 und die erste Ziffer ist doppelt so groß, wie die zweite. 216, 425, 634, 843

   $y + z = 7$
   $x = 2y \quad y = \frac{x}{2}$

2. Gegeben sind zwei Punkte A und B. Die durch A und B gehende Gerade, soll durch eine Gleichung der Form $y = a \cdot x + b$ beschrieben werden. Stellen Sie ein LGS für die Koeffizienten a und b auf und bestimmen Sie die Geradengleichung ,2

   a. A (3 | 5) und B (-2 | 7) $\quad$ b. A (6 | -3) und B (-6 | 6)

   $y = -0{,}4x + 3,$ $\quad$ $y = -0{,}75x + 3$

   $5 = 3a + b$
   $7 = -2a + b$
   $-2 = 5a$
   $a = -\frac{2}{5} = -0{,}4$
   $b = 3{,}8$

   $-3 = 6a + b$
   $6 = -6a + b$
   $9 = -12a$
   $a = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$
   $b = -3 + \frac{6 \cdot 3}{4} =$
   $= -3 + \frac{12}{4} =$
   $= 3$

3. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung hat

   a.
   $$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 &= -2 \quad x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &= 1 \quad x_2 = 1 \\ x_1 &= 0 \quad x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 &= 2 \quad 1 + 0 \neq 2 \end{aligned}$$

   b.
   $$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &= 0 \quad x_1 = -1{,}5 \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \quad x_2 = 3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

   $-3 - 9 + 1 = -11 \neq 6$

4. Ein Vater und seine beiden Söhne sind zusammen 100 Jahre alt. Der Vater ist doppelt so alt, wie der ältere Sohn und 30 Jahre älter, wie der jüngere Sohn.

   $a + b + c = 100$ $\quad$ $2b + b + 2b - 30 = 100$ $\quad$ $5b = 70$ $\quad$ $b =$ $\quad$ $a =$
   $a = 2b$
   $a = 30 + c$ $\quad$ $30 + c = 2b$ $\quad$ $c = 2b - 30$ $\quad$ $c =$

---

5. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren

   a.
   $$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 &= 3 \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &= 13 \\ 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   b.
   $$\begin{aligned} -x_1 + 7 \cdot x_2 - x_3 &= 5 \\ 4 \cdot x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   c.
   $$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 &= 8 \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 &= 3 \\ 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

6. Die rechte Seite des Gleichungssystems hängt von r ab. Bestimmen Sie die Lösung in Abhängigkeit von r

   a.
   $$\begin{aligned} -x_1 + 3 \cdot x_2 &= r \\ x_1 + x_2 &= 3 \cdot r \\ -3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

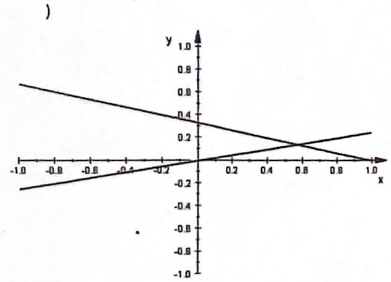
   b.
   $$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= r \\ x_2 - x_3 &= r + 1 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= r \end{aligned}$$

Lösung mit einem Computer (Computeralgebrasystem MuPAD)

- `solve({x+3*y=1, x-4*y=0},{x,y})`

  $$\left\{\left[x = \frac{4}{7}, y = \frac{1}{7}\right]\right\}$$

- ```
  plot(
  plot::Implicit2d(x+3*y=1,
  x=-1..1, y=-1..1),
  plot::Implicit2d(x-4*y=0,
  x=-1..1, y=-1..1)
  )
  ```


  ```

23.08.2024

Der Betrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$, ist das Abstand, den x zu Null hat.

$$x := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

$|x| \geq 0$

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$|x+y| \geq |x| + |y|$

$|x-2| \geq 4$, $x \in \mathbb{R}$

Wir lösen die Betrags-Ugl durch Fallunterscheidung.

Fall 1 sei $x \geq 2$ $\qquad]0;1[$ Offenes Interval

$|x-2| = x-2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6$

$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6\} = [6;\infty[$ Halbabgeschlossenes Interval

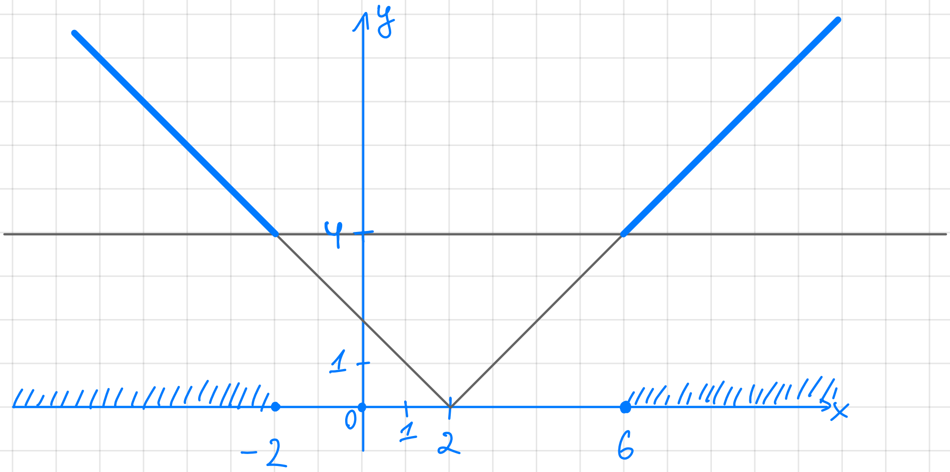
Fall$_2$ sei $x < 0$

$|x-2| = 2-x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2$

$\mathbb{L}_2 =]-\infty; -2]$

Also gilt $\mathbb{L} =]-\infty;-2] \cup [6;\infty[= \mathbb{R} \setminus]2;6[$

$|x-2| \geq 4$



$|x-1|+|x-2| \leq 3$

Beispiel 2

$$|x-1|+|x-2| \leq 3$$

$$\left[\begin{array}{r} x-1+x-2 \leq 0, \text{ wenn } x-1 \geq 0 \text{ und } x-2 \geq 0 \\ -(x-1)+x-2 \leq 0, \text{ wenn } x-1 < 0 \text{ und } x-2 \geq 0 \\ x-1-(x-2) \leq 0, \text{ wenn } x-1 \geq 0 \text{ und } x-2 < 0 \\ -(x-1)-(x-2) < 0, \text{ wenn } x-1 < 0 \text{ und } x-2 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 3, \text{ wenn } x \geq 1 \text{ und } x \geq 2 \\ x \in \mathbb{R}, \text{ wenn } x < 1 \text{ und } x \geq 2 \\ x \in \mathbb{R}, \text{ wenn } x \geq 1 \text{ und } x < 2 \\ x \geq 0, \text{ wenn } x < 1 \text{ und } x < 2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [0,3]$$

26.08.2024

Wir lösen die Betragsungleichung durch Fallunterscheidung

Fall 1 sei x<1
1-x+2-x=3-2x<=3 -2x<=0 x>=0 L_1 = [0, 1[

Vereinigungsmenge ∪

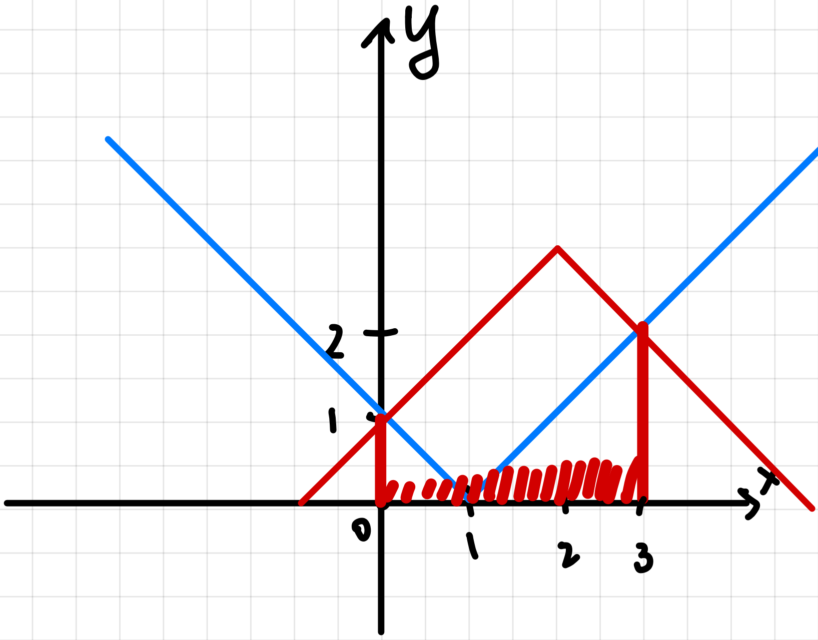
Schnittmenge ∩

Fall 2 sei 1<=x<2
x-1+2-x=1<=3 (wahr) L_2 = [1, 2[

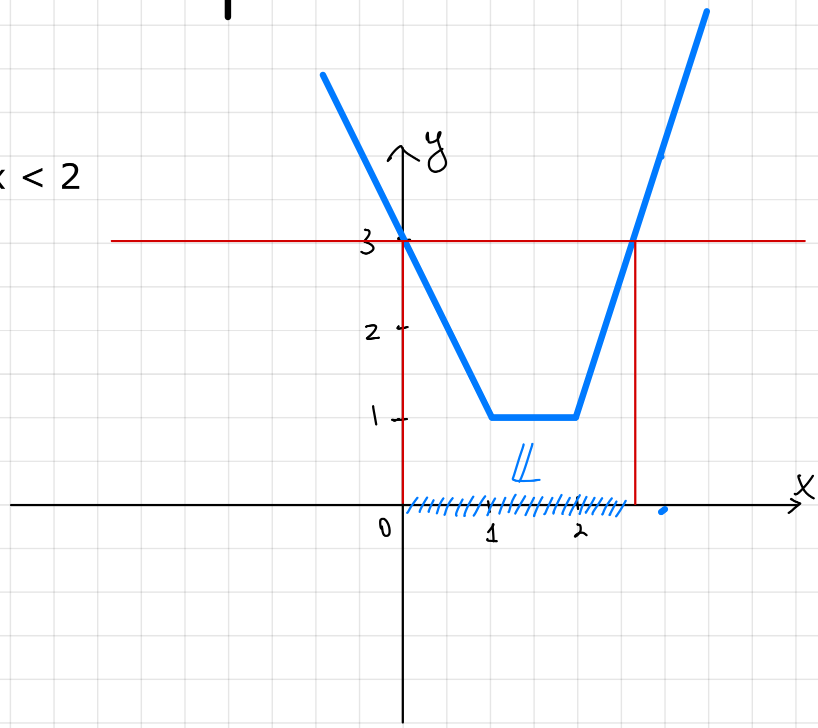
Fall 3 sei x>=2
x-1+x-2=2x-3<=3 2x<=6 x<=3 L_3 = [2, 3]

Also gilt, L = [0, 3]

|x-1|+|x-2|<=3
<=> |x-1|<=3-|x-2|



|x-1|+|x-2|={3-2x x < 1
1. 1 <= x < 2
2x-3 x >= 2



Mapel
Sciface Mupad

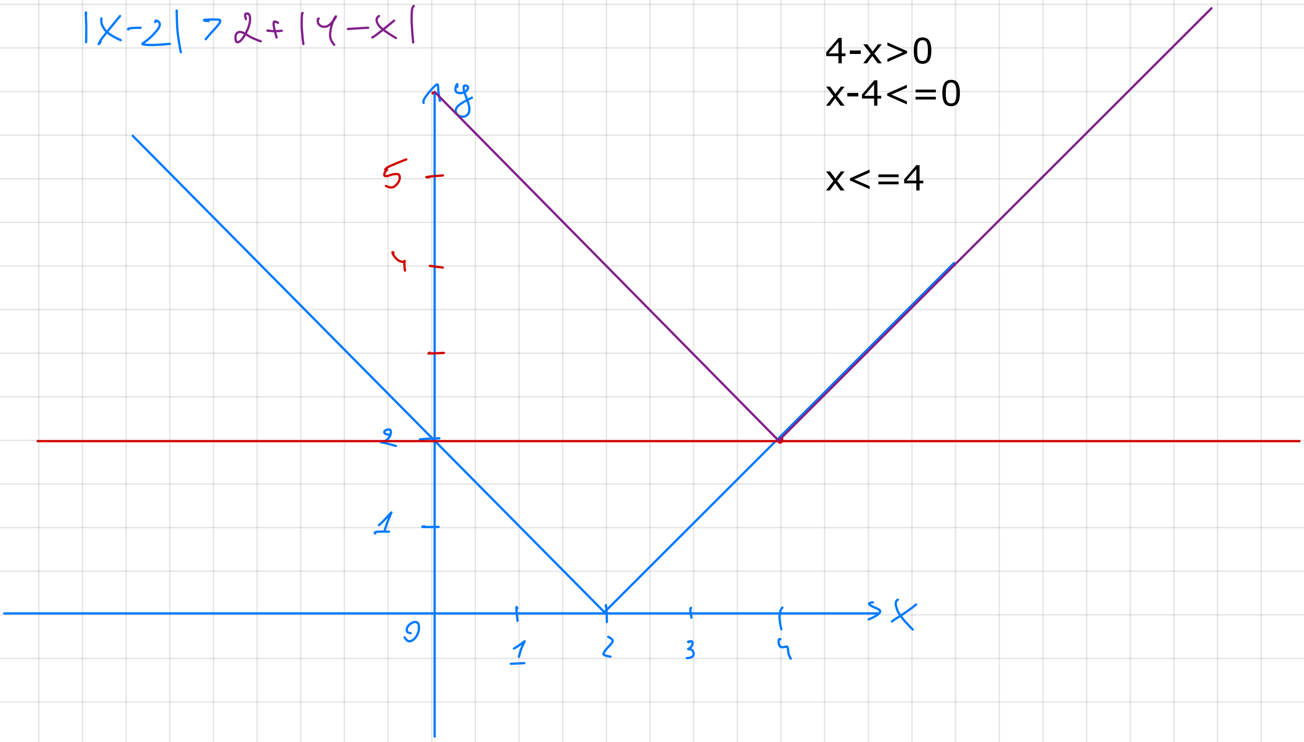
Frau Schierz

$|x-2|-|4-x|>2$

$|x-2| > 2+|4-x|$

$4-x>0$
$x-4<=0$

$x<=4$



Die Lösungsmenge ist leer. $L = \varnothing$

26.08.2024

Übungen

1. Beschreiben Sie in Worten

$]0,1[$ Das offene Interval von 0 bis 1.

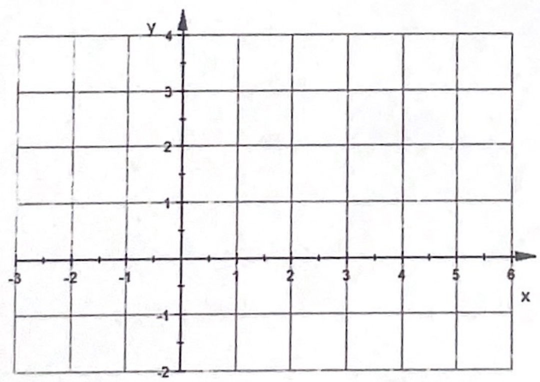
$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ Die Menge der positiven reellen Zahlen

2. Beschreiben Sie mit Symbolen

„Das abgeschlossene Intervall von -3 bis 2“ [-3, 2]

„Die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen“ $\{x \in R : x \geq 0\}$

3. Lösen Sie mit Fallunterscheidung und graphisch $|x-2| \leq 3,\ x \in \mathbb{R}$



Wir lösen die Betragsungleichung durch Fallunterscheidung

Fall 1 sei x<2
2-x<=3
x>=-1
L_1 = [-1, 2[

Fall 2 sei x>=2
x-2<=3
x<=5
L_2 = [2, 5]

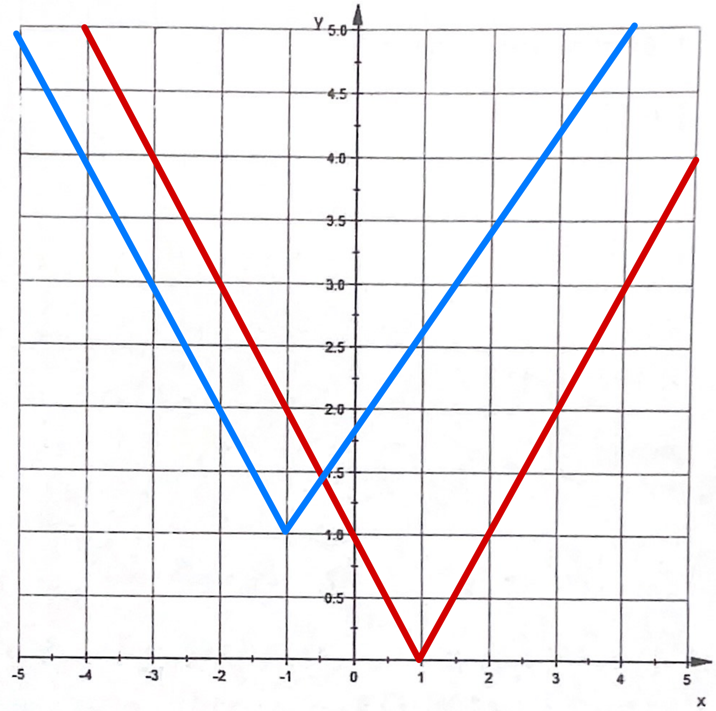
Also gilt, L = [-1, 5]

4. Lösen Sie graphisch und rechnerisch

$|x-1| - |x+1| \leq 1$

$|x-1| <= 1 + |x+1|$

$\mathbb{L} = [0.5, \infty[$



$|x-1| - |x+1| \leq 1$ $\quad -1 \quad 1$

Wir lösen die Betragsungleichung durch die Fallunterscheidung.

Fall 1 sei $x < 1$

$-(x-1) + x + 1 \leq 1$

$-x + 1 + x + 1 \leq 1$

$2 \leq 1$

Fall 2 sei $-1 \leq x < 1$

$-(x-1) - x - 1 \leq 1$

$1 - x - x - 1 \leq 1$

$-2x \leq 1$

$x \leq -0{,}5$

Fall 3 sei $x > 1$

$x - 1 - x - 1 \leq 1$

$-2 \leq 1$

Also gilt $\mathbb{L} = [0{,}5; \infty[$

29.08.2024

|x-1|, |x+1|

x<-1, -1<=x<1, x>=1

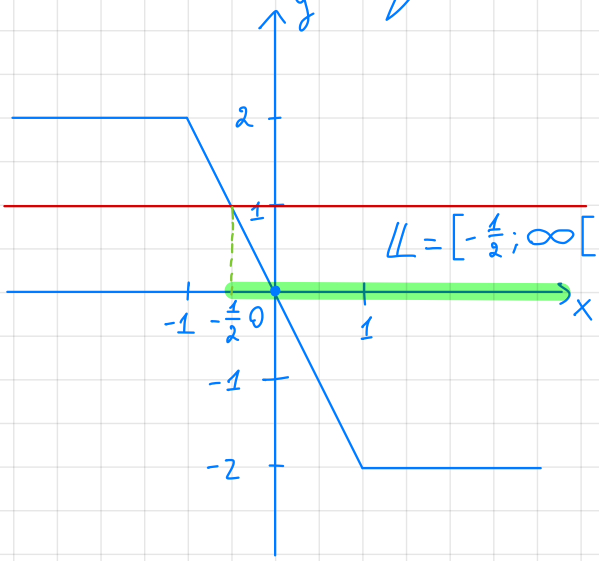
$$|x-1|-|x+1| = \begin{cases} 2, & \text{falls } x<-1 \\ -2x, & \text{falls } -1\le x<1 \\ -2, & \text{falls } x\ge 1 \end{cases}$$

|x-1|-|x+1|<=1

fall 1 sei x < -1
1-x-(-1-x)

fall 2 sei -1<=x<1
1-x-(x+1)

fall 3 sei x>=1
x-1-(x+1)



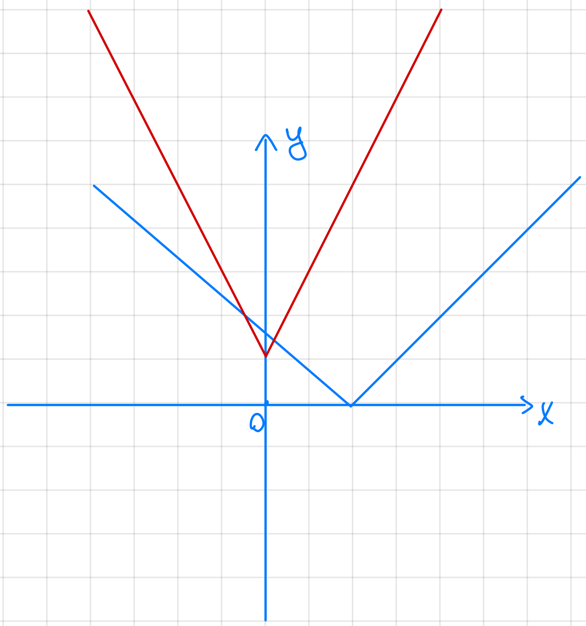
die Lösungsmenge ist ein halbabgeschlossenes Interval von minus einhalb bis Unendlichkeit ([-0.5, ∞[)

]0,1] halboffenes
[0, 1[halbgeschlossenes
[0,1] geschlossenes
]0,1[offenes

Stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x<0 \\ x^2, \text{ falls } x\ge 0 \end{cases}$$

|x-2|-2|x|<=-1
|x-2|<=2|x|+1



$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k = 3^n$$

5^n+7 ist durch 4 teilbar

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = f_{n_1} + f_{n-2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Zeilenstufenform

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -8 \\ 2x_2 + 5x_3 & = -6 \\ -2x_3 & = 4 \end{cases}$$

$$L = \{(0, 2, -2)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix obere Dreiecksmatrix

* beliebeges verschiedenen Zahlen ≠ 0

```
( * * * | * )       ( * * * | * )       (   )
( * * * | * )  -->  ( 0 * * | * )  -->  (   )
( * * * | * )       ( 0 * * | * )       (   )
```

Vielfachen — ein Faktor ungleich 0

Gauß-Elimationsverfahren
C.F. Gauß (1777 — 1855; 78)

Folgende elementaren Umformungen ändern die Lösungsmenge nicht:

- Vertauschen von Gleichungen (Zeilen)
- Multiplizieren einer Gleichung mit einem Faktor ≠ 0
- Eine Gleichung durch die Summe eines Vielfachen (Faktor) einer anderen Gleichung ersetzen

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ \frac{3}{2}\,x_1 + 5x_2 - 5x_3 & = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 3 & 2 & 1 & & 0 \\ 3/2 & 5 & -5 & & -9 \end{array} \quad \begin{array}{cc} -1 & -0.5 \\ & \\ & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 0 & -4 & 3 & & 4 \\ 0 & 2 & -4 & & 7 \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \\ & + \\ 2 & \end{array}$$

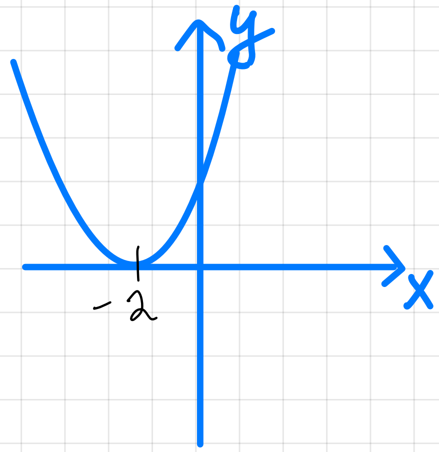
$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 0 & -4 & 3 & & 4 \\ 0 & 0 & -5 & & 10 \end{array}$$

$$L = \{(-1, \frac{1}{2}, 2)\}$$

02.09.2024

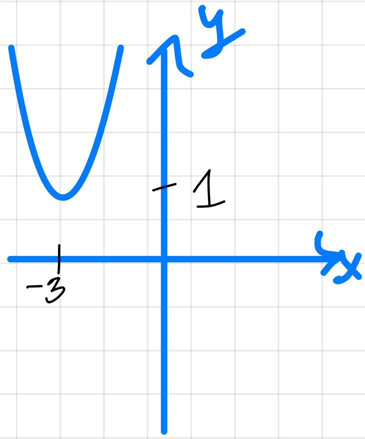
$y=ax+b$ linear
$y=ax^2+bx+c$ quadratischer Term

$y=x^2+4x+4=(x+2)^2+0$, $S(-2|0)$
$=a(x-d)^2+e$, $S(d|e)$

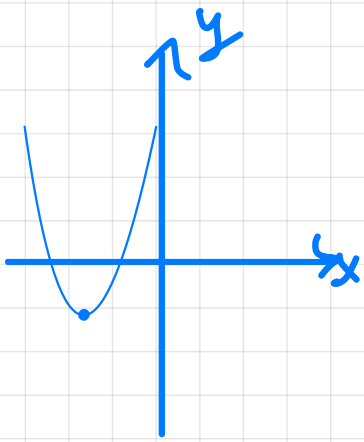


$y=x^2+4x+6=x^2+4x+4+2=(x+2)^2+2$, $S(-2|2)$

$y=x^2+6x+10=x^2+6x+9-9+10=(x+3)^2+1$, $S(-3|1)$
$D=b^2-4ac=36-40<0$



$y=x^2+3x+2$
$=x^2+3x+9/4-9/4+2$
$=(x+3/2)^2-1/4$, $S(-3/2|-1/4)$



$y=2x^2+4x-3$
$=2(x^2+2x\mathbf{+1})-3\mathbf{-2}$
$=2(x+1)^2-5$, $S(-1|-5)$

$y=5x^2+3x-7$
$=5(x^2+3/5x\mathbf{+9/100})-7\mathbf{-9/20}$
$=5(x+3/10)^2-149/20$, $S(-3/10|-149/20)$

y=1/3x^2+1/3x-2=
=1/3(x^2+x+1/4)-1/12-2
=1/3(x+1/2)^2-2\1/12
S(-1/2|-2\1/12)

y=-x^2+3x-2
=-(x^2-3x+9/4)-2+9/4
=-(x-3/2)^2+1/4
S(3/2|1/4)

x^2 - **3**x **+ 9/4**
(x-b)^2 = x^2 - **2**x**b** + b^2

2b=3
b=3/2
b^2=9/4

ax^2+bc+c=0

(quadratische Ergänzung)
<=> a(x^2+bx/a+) +c

$$a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}=0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c| : a| \sqrt{}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

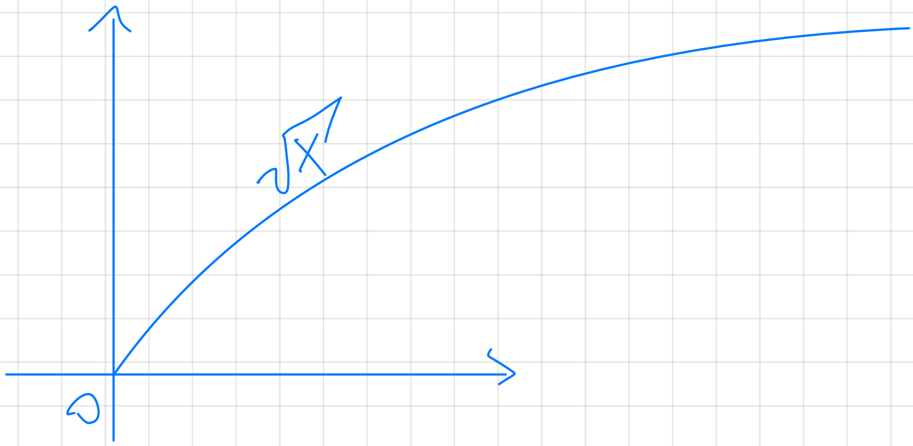
Scheitelpunkt

$$S(-\frac{b}{2a}|c-\frac{b^2}{4a})$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

abc-Formel

x=2 L = {2}
x^2=4 L={-2,2}
x^2=4 | √
|x|=√x^2=√4=2
x_1=2, x_2=-2
x^2=4
x=+-√4=+-2



$$2x^2+4x-6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{4}=\frac{-4\pm 8}{4}=\begin{cases}-3\\1\end{cases}$$

abc-Formel

pq-Formel

$$x^2+2x-3=0$$

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2=\begin{cases}-3\\1\end{cases}$$

1 Beschriften Sie zusammengehörende Kärtchen mit denselben Buchstaben. Ergänzen Sie die fehlenden Nullstellen.

A | $y = -x^2 + 1$

| S(−1|−1)

A | Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

C | S(3|−4)

F | $y = -x^2 + 2x - 1$

D | Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 =$ −2

E | S(1|0)

| Nullstellen: $x_1 = 1$; $x_2 =$ ____

C | $y = (x - 3)^2 - 4$

B | keine Nullstellen

E | $y = -(x - 1)^2$

| $y = x^2 + 2x$

D | $y = x(x + 2)$

F | S(−2|1)

B | $y = x^2 + 4x + 5$

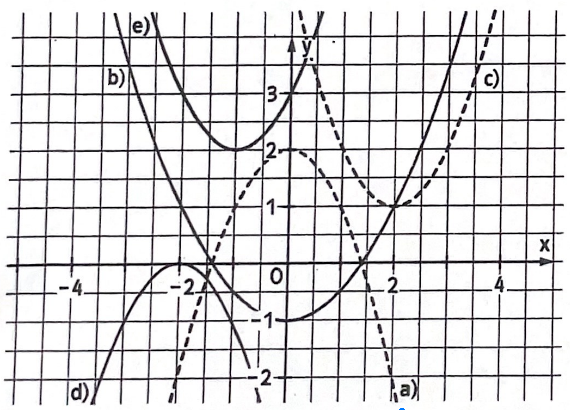
A | S(0|1)

B | $y = (x + 2)^2 + 1$

E | Nullstelle: $x =$ 1

C | $y = x^2 - 6x + 5$

2 Lesen Sie die Koordinaten des Scheitels ab und geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen an. Tipp: Achten Sie auch auf eine mögliche Streckung der Parabel.



a) S(0 | 2) y = $-x^2 + 2$

b) S(0 | −1) y = $\frac{1}{2}x^2 - 1$

c) S(2 | 1) y = $(x-2)^2 + 1$

d) S(−2 | 0) y = $(x+2)^2$

e) S(−1 | 2) y = $(x+1)^2 + 2$

3 Wie lautet die Gleichung der Funktion in Normalform, deren Graph aus dem der Normalparabel entsteht, indem man diesen

a) um 7 Einheiten nach unten verschiebt?
f(x) = $x^2 - 7$

b) um 2,5 Einheiten nach links verschiebt?
f(x) = $(x+2{,}5)^2 = x^2 + 12{,}5x + 6{,}25$

c) um $\frac{2}{5}$ Einheiten nach links und $\frac{1}{3}$ Einheiten nach oben verschiebt? f(x) = $\left(x+\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} = x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{4}{25} + \frac{1}{3} = \frac{12+25}{75} = x^2 + \frac{8}{25}x + \ldots = x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{37}{75}$

d) an der x-Achse spiegelt, und der die x-Achse nur bei x = 4,2 berührt? f(x) = $x^2 - 8{,}4x + 17{,}64$

$-\frac{b}{2a} = 4{,}2$

$b = -8{,}4$

$x^2 - 8{,}4x + c = 0$

$c = 8{,}4x - x^2$

$c = 8{,}4 \cdot 4{,}2 - 4{,}2^2$

$c = 2 \cdot 4{,}2^2 - 4{,}2^2 =$

$= 4{,}2^2 = 17{,}64$

4 Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung.

a) $\frac{1}{4}x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25 \cdot 4 = 100$

$x_1 =$ 10 ; $x_2 =$ −10

b) $2x^2 + 4x = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x_1 =$ 0 ; $x_2 =$ −2

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$

$x_{1,2} =$

$x_1 =$ −5 ; $x_2 =$ 2

d) $6(x - 4)(x + 4) = 0$

4

−4

e) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$D = 64 - 4 \cdot 16 = 0$

$x = \frac{8}{2} = 4$

f) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 10 = 0$

$x^2 + 6x + 60 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 60 < 0$

$$a(4,2)+b(4,2)+c=0$$
$$b^2-4ac=1$$

$$4,2^2+4,2b+c=0$$
$$b^2-4c=1$$
$$b=\sqrt{1+4c}$$
$$17,64+4,2\sqrt{1+4c}+c=0$$
$$4,2\sqrt{1+4c}=-(17,64+c)$$
$$\sqrt{1+4c}=\frac{-(17,64+c)}{4,2}$$
$$1+4c=\left(\frac{-17,64-c}{4,2}\right)^2$$
$$1+4c=\frac{311,1696+35,28c+c^2}{17,64}$$
$$17,64+70,56c=311,1696+35,28c+c^2$$
$$c^2-35,28c+293,5296=0$$
$$D=70,56$$
$$c=\frac{35,28\pm\sqrt{70,56}}{2}$$

$$c_1=13,44 \qquad b_1=\sqrt{1+4\cdot 13,44}=7,4$$
$$c_2=21,84 \qquad b_2=9,4$$
$$x^2+7,4x+13,44$$
$$x^2+9,4x+21,84$$

A={1,1,1}
B={1}
A=B

C={1,2}
D={2,1}
C=D, aber [1,2]≠[2,1]

Tripel (x,y,z)
(1,2,3)

L={(1,1,1)}

$$\begin{array}{rl|l} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2 & \cdot(-2) \\ x_2 - x_3 &= 1 & \\ 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= -4 & \\ \hline 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2 & \\ x_2 - x_3 &= 1 & \\ 0 &= 0 & \end{array}$$

$0 \cdot x_3 = 0$ (w)

sei x_3 beliebig

sei $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

dann ist $x_2 = t + 1$

$3x_1 = -2 + 2t + 2 + t = 3t \Rightarrow x_1 = t$

$$\mathbb{L} = \{(t, t+1, t) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(0,1,0) + t(1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{array}{rl|l} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2 & \cdot(-2) \\ x_2 - x_3 &= 1 & \\ 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= -3 & \\ \hline 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2 & \\ x_2 - x_3 &= 1 & \\ 0 &= 1 & \end{array}$$

$0 = 1$ (f)

$\mathbb{L} = \emptyset$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$

sei $x_3 = s,\ s \in \mathbb{R}$

sei $x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$

$\underset{m}{1} \times \underset{n}{3}$ – LGS

$\updownarrow$ Zeilen zuerst

Unbekannten / Spalten später

⚠ Zeilen zuerst, Spalten später

$x_1 = 2 - s - t$

$\mathbb{L} = \{(2-s-t, s, t) : s \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2,0,0) + s(-1,1,0) + t(-1,0,1) : s,t \in \mathbb{R}\}$

Dimension

$\dim \mathbb{L} = 1 \quad \mathbb{L} = \{(0,1,0) + t(1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$

$\dim \tilde{\mathbb{L}} = 2 \quad \tilde{\mathbb{L}} = \{(2,0,0) + s(-1,1,0) + t(-1,0,1) : s,t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \tfrac{z}{3} x_3 &= 1 \\ 3x_2 - z \cdot x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + z^2 x_3 &= z+2 \end{aligned}$$

parameter-abhängig 3x3-LGS

z-Parameter $(z \in \mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{z}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -z & 0 \\ 3 & -3 & z^2 & z+2 \end{array}\right) \quad -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{z}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -z & 0 \\ 0 & 0 & z^2-z & z-1 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0 \quad z \neq 1$$

$$x_2 = 3 - z \cdot \frac{1}{z} = 3-1=2$$

$x_1 =$

$ax^2 + bx + c$ Allgemeine Form

05.09.24

$x^2 + px + q$ Normalform

$a(x-d)^2 + e$ Scheitelform

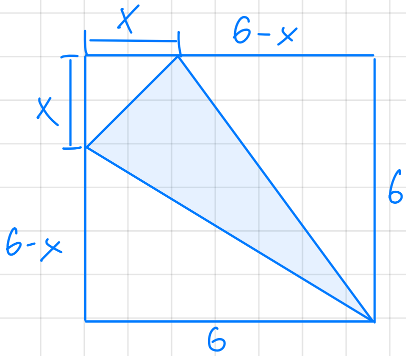
$a(x-x_1)(x-x_2)$ Faktorisierte Form

4) $a = 1$ $S(-4{,}5 \mid -1{,}25)$

$S(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a})$

$-\frac{b}{2} = -4{,}5$

$b = 9$



$$S = 6^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(6-x)\right) - \frac{x^2}{2} =$$

$$= 6^2 - 36 + 6x - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 6x = \frac{-x^2+12x}{2} = \frac{12x-x^2}{2}$$

$$\frac{36}{2} = 18$$

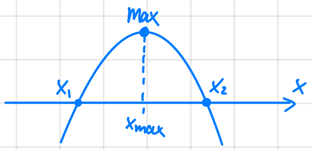
Vermutung $F_{max} = 18m^2$

$$S\left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$0 \leq x \leq 6$

$$-\frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) + 18 = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 18$$

x_{max} F_{max}



$$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x(x-12) = 0$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 12$

$\Downarrow$

$$x_{max} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+12}{2} = 6$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 6(6-12) = -6\cdot(-6) = 36$$

$a + x = 100$

$a \cdot x$ – max? $\Longrightarrow 2500$

$a = 100 - x$

$100x - x^2$

$x_1 = 100 \qquad x_2 = 0$

$\Downarrow$

$x_{max} = 50$

$a_{max} = 50$

Test

Lineare und quadratische Funktionen

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f durch die Punkte $A(3|1)$ und $B(5|5)$.
   Liegt der Punkt $C(-1|-6)$ ebenfalls auf dem Graphen von f?
   Wo schneidet der Graph von f die Koordinatenachsen?

2. Gegeben seien die Geraden $f(x) = 2x - 5$ und $g(x) = -3x - 2{,}5$.
   Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Graphen von f und g sich schneiden.
   Berechnen Sie anschließend den Schnittpunkt.

3. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(2|1)$, $B(10|5)$ und $C(3|6{,}5)$.
   a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.
   b) Bestimmen Sie die Länge der Höhe h_c zeichnerisch und rechnerisch.

4. Die Normalparabel wird so verschoben, dass ihr Scheitel bei $S(-4{,}5|-1{,}25)$ liegt.
   Wie lautet die Parabelgleichung?

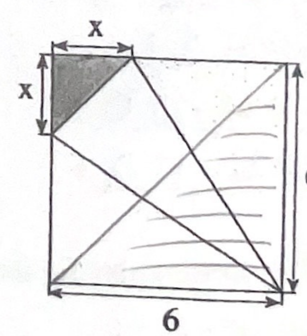
5. Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ und geben Sie den Scheitel an.

6. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^2 - 6x - 56$.

7. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 14$ und $g(x) = 2x + 4$.
   Untersuchen Sie, welche Lage die Gerade g relativ zur Parabel f einnimmt.
   Bestimmen Sie ggf. die Schnittpunkte.

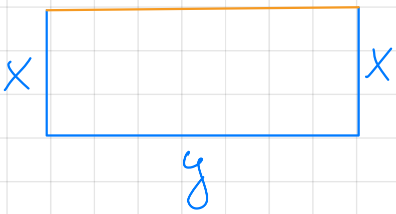
8. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel f, die durch die Punkte $A(1|6)$, $B(-1|2)$ und $C(2|13)$ geht.

9. Einem Quadrat mit der Seitenlänge 6 m soll ein gleichschenkliges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Ecken mit einer Quadratecke zusammenfällt. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks zu wählen, damit sein Flächeninhalt maximal wird?



09.09.2024

Zaun 100m
Suche: maximalen Bereich für die Pferde



$2x+y=100 \qquad y=100-2x$

$x \cdot y = x(100-2x) = 100x-2x^2$

$100x-2x^2 = -2(x^2-50x+625)+1250 = -2(x-25)^2+1250$

$S(25;1250)$

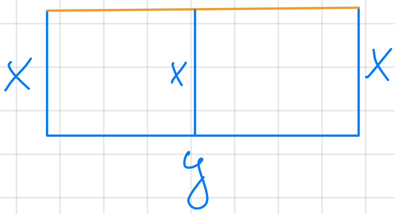
$\downarrow \quad \downarrow$

$x_{max} \quad F_{max}$

$100x-2x^2=0 \qquad x=25$

$2x(50-x)=0 \qquad y=75$

$x_1=0 \qquad x_2=50$



$3x+y=100$

$y=100-3x$

$x(100-3x) = 100x-3x^2 = -3\left(x^2-\frac{100}{3}x+\frac{2500}{9}\right)+\frac{2500}{3} =$

$= -3\left(x-\frac{50}{3}\right)^2+\frac{2500}{3}$

$S\left(\frac{50}{3}; \frac{2500}{3}\right)$

oder

$S(16,\overline{6}; 833,\overline{3})$

$100x-3x^2=0$

$x(100-3x)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=\frac{100}{3}$

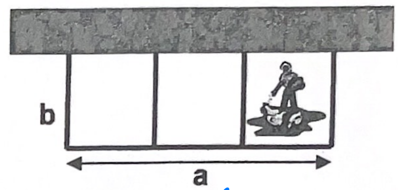
$x=\frac{50}{3}$

$y=50$

Voraussetzung für die volle Punktzahl ist eine nachvollziehbare Lösung mit den erforderlichen Rechnungen und Zwischenschritten!

Aufgabe 1:

Auf einer Wiese sollen an einem Fluss wie nebenstehend drei gleich große rechteckige Stücke eingezäunt werden. Insgesamt stehen 80m Maschendraht zur Verfügung.



$a = 80 - 4b$

(a) *Wie groß ist die Fläche, wenn die zum Fluss parallele Zaunseite eine Länge von 18 m haben soll?*

(b) *Wie sind die Seitenlängen zu wählen, damit die Fläche maximal wird? Welcher maximale Flächeninhalt ergibt sich?*

a) $a = 18m \quad a + 4b = 80m \iff 4b = 80m - a$

$4b = 80m - 18m = 62m$

$b = 15{,}5m$

$F = a \cdot b = 18m \cdot 15{,}5m = 279\,m^2$

b) $f(x) = x \cdot a = x(80-4x) = 80x - 4x^2$

$80x - 4x^2 = -4(x^2 - 20x + 100) + 400 = -4(x-10)^2 + 400$

$S(10; 400)$

Aufgabe 2:

Der Freizeitpark *Kreiselgau* hat durchschnittlich 960 Besucher am Tag bei einem Eintrittspreis von aktuell 19 €. In einer Versuchsphase wurde festgestellt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 1€, 2€, ... die Besucherzahl um 40, 80, ... zurückgeht.

(a) *Wie groß sind die Einnahmen aktuell durchschnittlich an einem Tag?* $960 \cdot 19€ = 18240€$

(b) *Wie groß wären die Einnahmen, wenn der Eintrittspreis um 2 € erhöht würde? Wäre die Preiserhöhung somit sinnvoll?* Preis: 21€ , 18480 €

(c) *Bei welchem Eintrittspeis könnte der Freizeitpark die Einnahmen maximieren? Mit wie vielen Besuchern müsste dann durchschnittlich gerechnet werden?*

$f(P) = (960 - 40\cdot(P-19)) \cdot P = (960 - 40P + 760) \cdot P = 1720P - 40P^2$ P für Preis

$f(21) = 1720 \cdot 21 - 40 \cdot 21^2 = 18480$

$1720x - 40x^2 = -40(x^2 - 43x + \frac{1849}{4}) + \frac{73960}{4} = -40(x - \frac{43}{2})^2 + 18490$

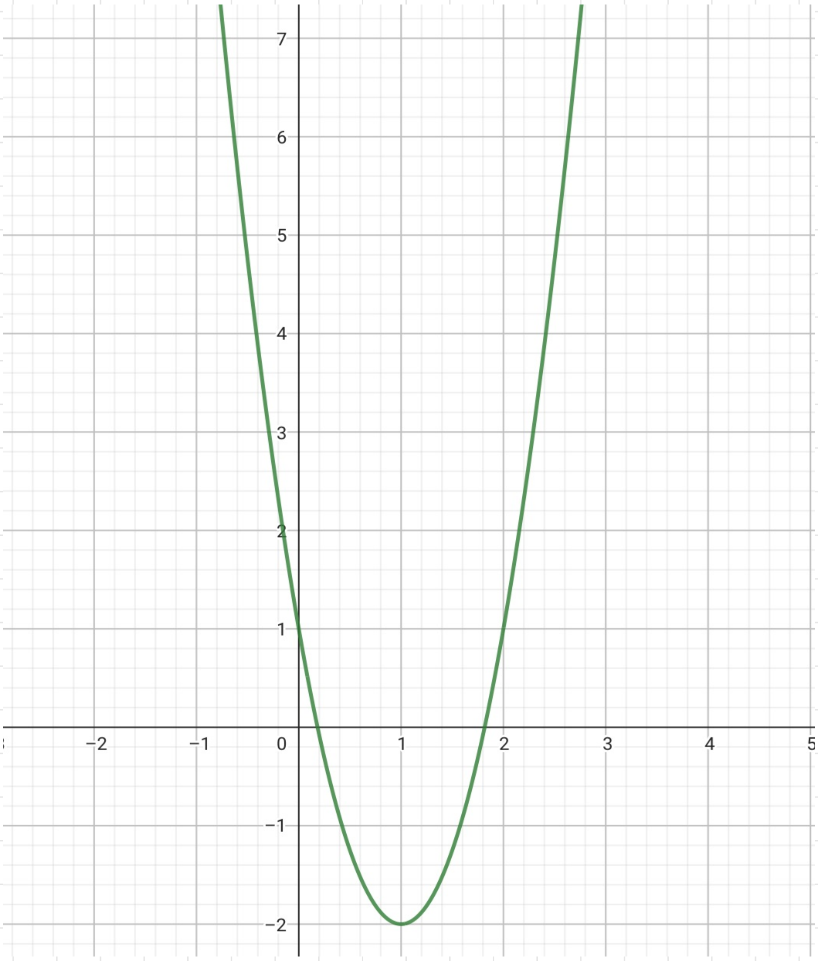
$\Downarrow$

$S(\frac{43}{2}; 18490)$

$\frac{43}{2} = 21{,}5 = 19 + 2{,}5$

10.09.2024

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 3(x^2 - 2x + 1) + 1 - 3 = 3(x-1)^2 - 2, S(1|-2)$$



$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 3 \times 1 = 36 - 12 = 24$$

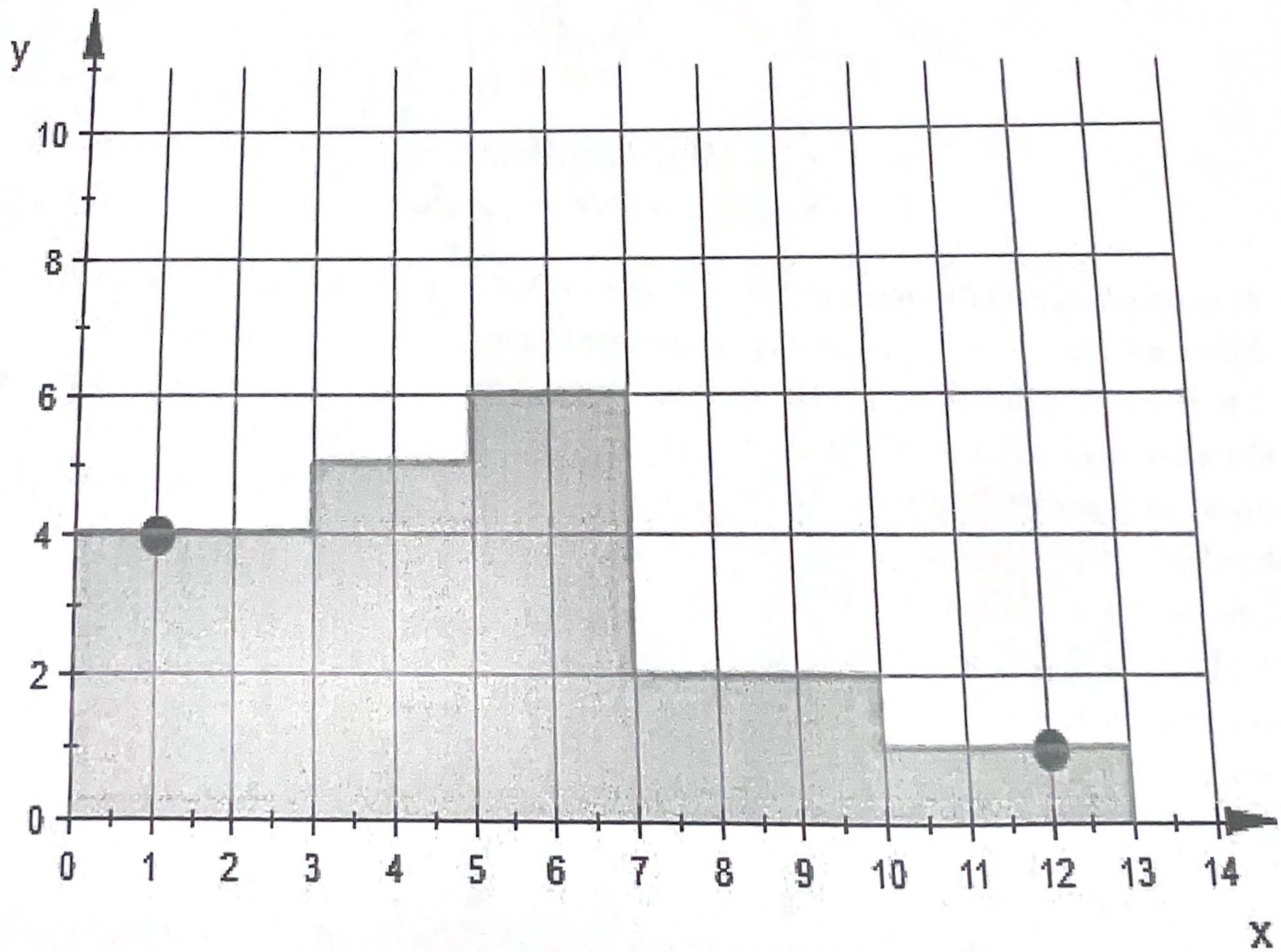
$$3x^2 - 6x + 1 = 0 | : 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3}}$$

Aufgabe zu Quadratischen Termen - Mauerwurf

Peter und Corinna werfen einen Ball von $A(1 \mid 4)$. Die Flugbahnen entsprechen den Graphen zu

$$f_P(x) = -0.1x^2 + 1.2x + 2.9, \quad f_C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + \frac{5}{4}$$

Skizziere die beiden Graphen mit Hilfe der Scheitelpunktform. Ermittle graphisch, welcher Wurf näher an $B(12 \mid 1)$ landet.

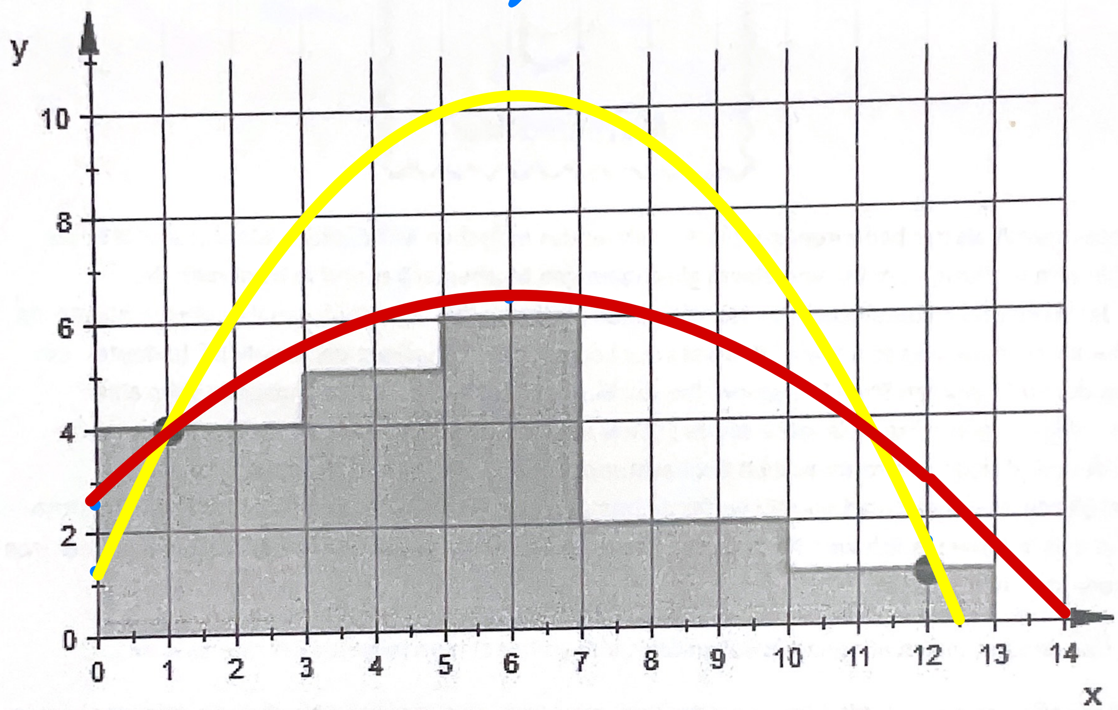


Aufgabe zu Quadratischen Termen - Mauerwurf

Peter und Corinna werfen einen Ball von $A(1 \mid 4)$. Die Flugbahnen entsprechen den Graphen zu

$$f_P(x) = -0.1x^2 + 1.2x + 2.9, \quad f_C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + \frac{5}{4}$$

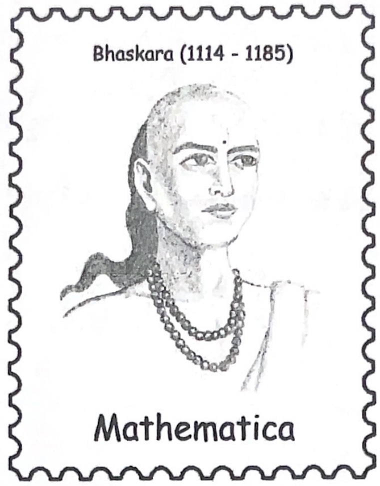
Skizziere die beiden Graphen mit Hilfe der Scheitelpunktform. Ermittle graphisch, welcher Wurf näher an $B(12 \mid 1)$ landet. Der Wurf von Corinna



$f_P(x) = -0{,}1(x^2 - 12x + 36) + 3{,}6 + 2{,}9 = -0{,}1(x-6)^2 + 6{,}5 \quad S(6;6{,}5)$

$f_C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + \frac{5}{4} = -0{,}25(x-6)^2 + 10{,}25$

$S(6;10{,}25)$



Bhaskara gilt als der bedeutendste Mathematiker des indischen Mittelalters. Meistens wird er als Bhaskara II. zitiert – um ihn von einem gleichnamigen Mathematiker und Astronomen des 7. Jahrhunderts zu unterscheiden. Nachfolgende Mathematiker sprechen von ihm ehrfurchtsvoll als Bhaskaracharya, was soviel wie "Bhaskara der Lehrer" oder "Bhaskara der Gelehrte" bedeutet. Der aus der südindischen Stadt Vijayapura (heute: Bundesstaat Karnataka) stammende Sohn eines Astrologen verbrachte viele Jahre seines Lebens in Ujjain (Madhya Pradesh). Dort arbeitete er als Leiter der dortigen astronomischen Beobachtungsstation – wie bereits Brahmagupta, der berühmteste seiner Vorgänger. Er verfasste (mindestens) sechs Bücher mit Merkregeln in Versform – wie dies in Indien üblich war. Nach diesen Regeln wurden noch viele nachfolgende Generationen von Studenten unterrichtet.

Unter den Beispielen mit quadratischen Gleichungen findet man folgende oft zitierte Aufgabe:

Der fünfte Teil einer Herde Affen, weniger drei, quadriert, ging in eine Höhle. Nur ein Affe war noch zu sehen. Wie viele Affen waren es?

<u>Lösung:</u>

Antwort: es waren 50 Affe.

$$x - \left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 = 1$$

$$x - \frac{x^2}{25} - 6 \cdot \frac{x}{5} + 9 = 1$$

$$x - \frac{x^2}{25} - \frac{6}{5}x + 8 = 0$$

$$x^2 - 55x + 250 = 0$$

$$x_1 = 50 \qquad x_2 = 5$$

und $\frac{x}{5} - 3 > 0$ $\quad \frac{5}{5} - 3 < 0$

$\frac{50}{5} - 3 > 0$

Übungen zu Linearen Gleichungssystemen (LGS)

1. Bestimmen Sie alle dreistelligen Zahlen mit den verlangten Eigenschaften

   a. Die erste Ziffer ist um 4 größer als die letzte, und die Summe der beiden ersten Ziffern ist 9.

   b. Die Summe der beiden letzten Ziffern ist 7 und die erste Ziffer ist doppelt so groß, wie die zweite.

2. Gegeben sind zwei Punkte A und B. Die durch A und B gehende Gerade, soll durch eine Gleichung der Form $y = a \cdot x + b$ beschrieben werden. Stellen Sie ein LGS für die Koeffizienten a und b auf und bestimmen Sie die Geradengleichung

   a. A (3 | 5) und B (-2 | 7) b. A (6 | -3) und B (-6 | 6)

3. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung hat

   a.
$$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 &= -2 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &= 0 \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

4. Ein Vater und seine beiden Söhne sind zusammen 100 Jahre alt. Der Vater ist doppelt so alt, wie der ältere Sohn und 30 Jahre älter, wie der jüngere Sohn.

---

5. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren

   a.
$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 &= 3 \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &= 13 \\ 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} -x_1 + 7 \cdot x_2 - x_3 &= 5 \\ 4 \cdot x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   c.
$$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 &= 8 \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 &= 3 \\ 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

6. Die rechte Seite des Gleichungssystems hängt von r ab. Bestimmen Sie die Lösung in Abhängigkeit von r

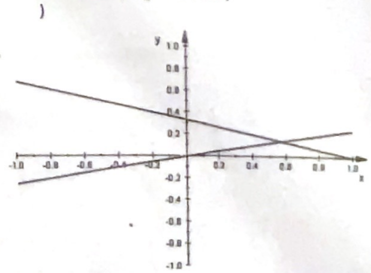
   a.
$$\begin{aligned} -x_1 + 3 \cdot x_2 &= r \\ x_1 + x_2 &= 3 \cdot r \\ -3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= r \\ x_2 - x_3 &= r + 1 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= r \end{aligned}$$

Lösung mit einem Computer
(Computeralgebrasystem MuPAD)

- ```
  solve({x+3*y=1, x-4*y=0},{x,y})
  ```
  $$\left\{\left[x = \frac{4}{7},\ y = \frac{1}{7}\right]\right\}$$

- ```
  plot(
  plot::Implicit2d(x+3*y=1,
  x=-1..1, y=-1..1),
  plot::Implicit2d(x-4*y=0,
  x=-1..1, y=-1..1)
  )
  ```



$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 & 3z \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad 1 \quad -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & z+1 \\ 2 & 3 & 0 & z \end{array}\right) \quad -1 \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & z \\ 0 & 4 & 0 & 4z \\ 0 & -7 & 1 & -3z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & z+1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 & -2z+2 \end{array}\right)$$

$4x_2 = 4z \qquad x_2 = z$

$-7z + x_3 = -3z \qquad x_3 = 4z$

$-x_1 + 3z = z \qquad x_1 = 2z$

$$L = \left\{ \left(\frac{4z+3}{2}, -z-1, -2z-2 \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L = \left\{ \left(\tfrac{3}{2} \middle| -1 \middle| -2 \right) + z\left(2 \middle| -1 \middle| -2 \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

11.09.24

$$\begin{array}{rl|l} 2x_1 + 4x_2 &= -1 & (-3) \\ 3x_1 + 5x_2 &= 2 & (2) \\ \hline 2x_1 + 4x_2 &= -1 & \\ -2x_2 &= 7 & \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-2} = 6{,}5$$

$$\mathbb{L} = \{(6{,}5; -3{,}5)\}$$

$$(2\cdot 5 - 3\cdot 4)x_2 = 2\cdot 2 - 3\cdot(-1)$$

$$x_2 = \frac{2\cdot 2 - 3\cdot(-1)}{2\cdot 5 - 3\cdot 4} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{7}{-2} = -3{,}5$$

Sei A eine (2×2) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann heißt $\boxed{ad - bc}$ **Determinante** und wird mit $\det(A)$ oder $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ bezeichnet.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Cramer's Rule

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad x = \frac{D_x}{D}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$2x_1 + 4x_2 = 1$$

$$3x_1 + 5x_2 = 2$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2} = -0{,}5$$

Das LGS hat genau eine Lösung, wenn det(A)≠0 ist.

Lösung mit der Cramerischen Regel:

$$4x_1 + 2x_2 = 3$$

$$6x_1 + zx_2 = 3$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & z \end{vmatrix}} = \frac{3z-6}{4z-12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{z-2}{z-3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & z \end{vmatrix}} = \frac{-6}{4z-12} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z-3}$$

$$L_z = \left\{ \left(\frac{3z-6}{4z-12} \,\middle|\, \frac{-6}{4z-12} \right) \right\}, \quad z \neq 3$$

Sonderfall $z = 3$

Lösung mit Gauß-Elimination

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-3) \\ (2) \end{array}$$

$0 = -3$ (↯)

$\mathbb{L} = \emptyset$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \neq 0 \Leftrightarrow \text{hat genau eine Lösung}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

$\Updownarrow$

hat genau eine Lösung

Regel von Sarrus (nur für 3x3) –

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$$1 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 - (0 \cdot 1 \cdot 1) - (4 \cdot 1 \cdot 1) - (2 \cdot 3 \cdot 2) =$$

$$= 10 - 16 = -6$$

$-$ X

$+$ X

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Übungen zu Lösungsmengen LGS

1. Geben Sie die Lösungsmengen des LGS in Abhängigkeit des Parameters $r \in IR$ an:

a. $$\begin{aligned} -x_1 + 3 \cdot x_2 \quad &= 1 \\ 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &= 1 \\ -3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - r^2 \cdot x_3 &= r \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 &= 2 \cdot r \\ 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 &= 2 \cdot r + 6 \end{aligned}$$

2. Ein inhomogenes LGS mit 2 Variablen hat die Lösungen (1|2) und (3|4). Zeigen Sie, dass dann alle Zahlenpaare der Form $(1+2 \cdot t \mid 2+2 \cdot t)$ mit $t \in IR$ Lösungen sind.

3. Bei einem Automodell sind die Ledersitze L und das Navigationssystem N gesondert zu bezahlen (sogenannte Sonderausstattungen). Bei 100000 ausgelieferten Autos wurde L 65100 und N 12600 mal eingebaut.

   a. Warum lässt sich aus den Angaben nicht schließen, wie oft weder L noch N, nur L, nur N oder beide Sonderausstattungen eingebaut wurden? Stellen Sie ein LGS für die vier Ausstattungsvarianten auf.
   b. Mindestens wie viele Käufer wählten keine Sonderausstattung?
   c. Wie viele Käufer wählten keine Sonderausstattung, wenn N stets mit L bestellt wurde?

4. Stellen Sie ein LGS mit den Variablen x_1, x_2 und x_3 auf, dass die Lösungsmenge $L = \{(0 \mid 3 \mid 1) + r \cdot (1 \mid 1 \mid 2) : r \in IR\}$ besitzt.

Übungen zu Determinanten / Cramersche Regel

1. Lösen Sie das LGS mithilfe von Determinanten

a. $$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 &= 5 \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &= 9 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 &= 4 \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 &= 9 \\ 3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. Für welche Werte $r \in IR$ hat das LGS genau eine Lösung? Geben Sie die Lösung an.

a. $$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_2 &= 5 \\ r \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &= 9 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} r \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 &= 13 \\ r \cdot x_1 + r \cdot x_2 &= r \end{aligned}$$

3. Wie muss man $r \in IR$ wählen, damit das homogene LGS
$$\begin{aligned} r \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 &= 0 \\ 4 \cdot x_1 + r \cdot x_2 + x_3 &= 0 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$
unendlich viele Lösungen hat?

4. Bisher haben Sie zwei Methoden kennengelernt, wie Sie LGS lösen können.

   a. Bewerten Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren und die Cramersche Regel im Hinblick auf ihren Rechenaufwand. Welchem Verfahren geben Sie den Vorzug.
   b. Suchen Sie Informationen (z.B. im Internet, MuPAD-Hilfesystem, o.ä.) über das Gauß-Jordan-Verfahren.

① a)

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -z^2 & z \\ \hline -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -z^2 & z-3 \\ \hline -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4-z^2 & z-2 \end{array} \quad \begin{array}{c} (-3) \\ \\ \\ \\ (1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$x_3(4-z^2) = z-2$

$x_3 = \frac{z-2}{4-z^2} = \frac{z-2}{(2-z)(z+2)} = -\frac{1}{z+2}$, $z \neq \pm 2$

$3x_2 = 1 + 4 \cdot \frac{1}{z+2} = \frac{z+2+4}{z+2} = \frac{z+6}{z+2}$

$x_2 = \frac{z+6}{3z+6}$

$-x_1 + \frac{z+6}{z+2} = 1$

$x_1 = \frac{z+6}{z+2} - 1 = \frac{z+6-z-2}{z+2} = \frac{4}{z+2}$

$\mathbb{L} = \{(\frac{4}{z+2}; \frac{z+6}{3z+6}; -\frac{1}{z+2}) : z \in \mathbb{R}\}$, $z \neq \pm 2$

b) $\mathbb{L} = \{(z+1; z+1; z-1) : z \in \mathbb{R}\}$

④ $\mathbb{L} = \{(0;3;1) + z(1;1;2) : z \in \mathbb{R}\}$

$x_1 = z \qquad x_2 = z+3 \qquad x_3 = 2z+1$

z.B. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 15z+14 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 11z+14 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 15z+18 \end{cases}$

① a) $2x_1 - 3x_2 = 5$

$7x_1 + 5x_2 = 9$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{25+27}{10+21} = \frac{52}{31}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{52}{31}; -\frac{17}{31}\right)\right\}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{18-35}{31} = -\frac{17}{31}$$

b) $3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 4$

$6x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 9$

$3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 2$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 6 & 4 & -12 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -3\cdot4\cdot6 - 5\cdot12\cdot3 + 7\cdot6\cdot3 + 3\cdot4\cdot7 - \\ - 3\cdot12\cdot3 + 6\cdot6\cdot5 = 30$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 9 & 4 & -12 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -4\cdot4\cdot6 - 5\cdot12\cdot2 + 7\cdot9\cdot3 + 2\cdot4\cdot7 - \\ - 3\cdot12\cdot4 + 6\cdot9\cdot5 = 155$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 6 & 9 & -12 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -3\cdot9\cdot6 - 4\cdot12\cdot3 - 7\cdot6\cdot2 + 3\cdot9\cdot7 + \\ + 2\cdot12\cdot3 + 6\cdot6\cdot4 = 15$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot2 + 5\cdot9\cdot3 - 4\cdot6\cdot3 - 3\cdot4\cdot4 + 3\cdot \\ \cdot9\cdot3 - 2\cdot6\cdot5 = 60$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{155}{30}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{60}{30} = 2$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{155}{30}; \frac{1}{2}; 2\right)\right\}$$

② a) $x_1 - 2x_2 = 5$

$z x_1 + 4x_2 = 9$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ z & 4 \end{vmatrix} = 4+2z$$

$4+2z \neq 0$

$z \neq -2$ Antwort: Für z nicht gleich -2.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{20+18}{4+2z} = \frac{19}{2+z}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ z & 9 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{9-5z}{2+z}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{19}{2+z}; \frac{9-5z}{2+z}\right) : z \in \mathbb{R}, z \neq -2\right\}$$

b) $z x_1 + 8x_2 = 13$

$z x_1 + z x_2 = z$

$$\det A = \begin{vmatrix} z & 8 \\ z & z \end{vmatrix} = z^2 - 8z$$

$z^2 - 8z \neq 0$

$z \neq 0 \quad z \neq 8$ $\quad z = 0 \lor z = 8$

$z = 0$

$8x_2 = 13$

$\mathbb{L} = \{(t \mid \frac{13}{8}) : t \in \mathbb{R}\}$

$z = 8$

$8x_1 + 8x_2 = 13$

$8x_1 + 8x_2 = 8$

$\mathbb{L} = \emptyset$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ z & z \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{13z - 8z}{z^2 - 8z} = \frac{5}{z-8}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} z & 13 \\ z & z \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{z^2 - 13z}{z^2 - 8z} = \frac{z-13}{z-8}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{5}{z-8}; \frac{z-13}{z-8}\right) : z \in \mathbb{R} \setminus \{0,8\}\right\}$$, für $z \neq 0$, $z \neq 8$

③ $$\begin{aligned} \tau x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + \tau x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \tau & 1 & -2 \\ 4 & \tau & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\tau^2 + 2 - 2\cdot 4\cdot 3 + 4\tau - 3\tau - 20 =$$

$$= 5\tau^2 + \tau - 42$$

$$5\tau^2 + \tau - 42 = 0$$

$$D = 1 + 4\cdot 5\cdot 42 = 841$$

$$\tau_1 = x_1 = \frac{-1-29}{10} = -3$$

$$\tau_2 = x_2 = \frac{-1+29}{10} = 2{,}8$$

16.09.2024

Türme von Hanoi → Édouard Lucas 1842-1891
1883 Weltausstellung („Expo") in Paris

Algorithmus
Komplexität

Anzahl der Scheiben $n \in \mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	64
Anzahl der Schpielzüge a_n	1	3	7	15	31	63	127	$2^{64}-1$
	2	4	8	16	32	64	128	

$\cdot 2$
$+1$

$a_{n+1} = 2a_n + 1,\ a_1 = 1$ rekursives Bildungsgesetz

Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \longrightarrow a_n$

$a_{64} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$

$a_n = 2^n - 1,\ n \in \mathbb{N}$ explizites Bildungssatz

$1{,}84 \cdot 10^{19}$ s

$3{,}07 \cdot 10^{17}$ min

$5{,}12 \cdot 10^{15}$ h

$2{,}13 \cdot 10^{14}$ d

$5{,}84 \cdot 10^{11}$ y (Jahre)

584 Milliarden Jahren

584 000 000 000 Jahre

14 000 000 000 Alter unseres Universums

$1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6$

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2}+2, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$1, 3, 6, 10, 15, 21$

$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad , a_1 = 1$

$a_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

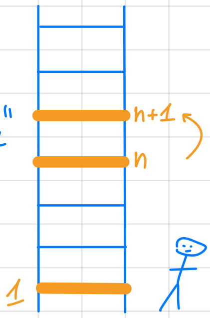
$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221$

$5, 20, 23, 22, 88, 91, 90, 360, 363, 362$

$\cdot 4 \quad +3 \quad -1 \quad \cdot 4 \quad +3 \quad -1$

Vollständige Induktion:

„Leiter"



17.09.2024

Vollständige Induktion

Beweisverfahren für Aussagen im N

Benötigte Schritte

1. Schritt: Induktionsanfang (n = 1)
   Aussage gilt für ein Anfangselement.
2. Schritt: Induktionsschluss (n --> n + 1)
   Wenn die Aussage für n gilt, dann gilt sie auch für den Nachfolger n + 1.

Satz (Türme von Hanoi)
Besteht der Turm aus n Scheiben, dann ist die minimale Anzahl der Spielzüge $a_n = 2^n - 1$.

Beweis:
Wie beweisen die Aussage durch vollständige Induktion (induktiv):
1. Induktionsanfang (n = 1) $1 = a_1 = 2^1 - 1 = 1 (w)$

1. Induktionsschluss (n --> n + 1) $a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

QED: Quod erat demonstrandum (lat.) = Was zu zeigen war

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + \dots + 101 = 51^2 = 2601$ $2n - 1 = 101$ $2n = 102$ $n = 51$

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, für alle $n \in \mathbb{N}$

Summe $\sum$

$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}}_{\text{für n alle natürliche Zahlen}} : \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage induktiv

1. Induktionsanfang $(n=1)$ $\quad 1 = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2 = 1 \quad (w)$

2. Induktionsschluss $(n \longrightarrow n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1)-1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2 = (n+1)^2 \quad (w) \quad \underline{\text{QED}}$$

Aussage für n

Aussage für n+1

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & 99 & 100 \\
100 & 99 & 98 & \dots & 2 & 1 \\
\hline
101 & 101 & 101 & & 101 & 101
\end{array}$$

$$\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$n = 1000 : \ 1+2+3+\dots+1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500 \cdot 501 = 500500$$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ induktiv.

1. Induktionsanfang $(n=1)$ $1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1 = 1$ (w)

2. Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{2n+2+n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

QED

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

HA

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$$

$q=2$ $n=10$ $\quad 1+2+4+\ldots+1024$

$q=\frac{1}{3}$ $n=3$ $\quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

allgemein $\quad 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n$

18.09.2024

$$x_1 - 2x_2 - zx_3 = 0$$
$$2x_1 + zx_2 + x_3 = 0 \qquad z \in \mathbb{R}$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

Wie muss man z wählen, damit das LGS unendlich viele Lösungen hat

$$(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -z \\ 2 & z & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2z - 8 - 2z + 4z^2 - 1 + 8 = 4z^2 - 1$$

$4z^2 - 1 = 0$

$(2z-1)(2z+1) = 0$

$z_1 = \frac{1}{2} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -z \\ 2 & z & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-4) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & z \\ 0 & 4+z & 2z+1 \\ 0 & 9 & 4z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & z \\ 0 & 4+z & 2z+1 \\ 0 & 0 & 4z^2-1 \end{vmatrix} = (4+z)(4z^2-1)$$

zählt nicht, weil die 3. Zeile damit multipliziert wurde

$$(4z+2)(4+z) - 9(2z+1) = 16z + 4z^2 + 8 + 2z - 18z - 9 = 4z^2 - 1$$

Entwicklungssatz von Laplace $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -z \\ 2 & z & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & -z \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & -z \\ z & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2z - 1 - 2(-4 + z) + 4(-2 + z^2) =$$

$$= 2z - 1 + 8 - 2z - 8 + 4z^2 = 4z^2 - 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & z \\ 0 & 4+z & 2z+1 \\ 0 & 9 & 4z+2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4+z & 2z+1 \\ 9 & 4z+2 \end{vmatrix} = (4+z)(4z+2) - 9(2z+1) = 4z^2 - 1$$

LGS (2×2) $\quad A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ $\quad x_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad x_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{b}$, $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\vec{b}$ $\quad : \quad A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$

$A\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=\vec{0}$

$A\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}=\vec{0}$

$\mathbb{L}=\{\vec{x}:\vec{x}=\vec{u}+\tau\cdot\vec{v}:\tau\in\mathbb{R}\}=$

$=\{\vec{x}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}:\tau\in\mathbb{R}\}=$

$=\{\vec{x}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1+2\tau\\2+2\tau\end{pmatrix}:\tau\in\mathbb{R}\}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Beweis

Wir beweisen die Aussage $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ induktiv.

1) Induktionsanfang $(n=1)$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = 1$$

2) Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

QED

Wir beweisen die Aussage $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$ induktiv.

1) Induktionsanfang $(n=0)$

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = 1$$

2) Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

QED

$8^n - 1 \quad : \quad 7, 63, 511, \ldots$

Für jede natürliche Zahl n ist $8^n - 1$ durch 7 teilbar.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} : 8^n - 1 = 7 \cdot k$

$$8^{n+1} - 1 = 8^n \cdot 8 - 1 = 8(8^n - 1) - 1 + 8 = 8(8^n - 1) + 7 = 8 \cdot 7k + 7 =$$
$$= 7(8k + 1)$$
$$= 7 \cdot \tilde{k}$$

1. Vollständige Induktion – Ein Beispiel

Wir zeigen die Bernoullische Ungleichung durch vollständige Induktion.

$$\forall a \geq -1, n \in \mathbb{N} \ (\quad (1+a)^n \ \geq 1 + na \quad)$$

Jakob Bernoulli, Schweizer Mathematiker (1654 – 1705)

Beweis:

1. Schritt (Induktionsanfang, n=1): $(1+a)^1 = 1 + 1 \cdot a$ (w.)

2. Schritt (Induktionsschluss $n \rightarrow n+1$): $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq$
$(1+n \cdot a) \cdot (1+a) =$
$1+(n+1) \cdot a + n \cdot a^2 \geq 1+(n+1) \cdot a$,

weil $na^2 \geq 0$ ist.

QED.

2. Sprachliche Formulierungen: Richtig oder falsch?

a) „Vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, mit dem man beweisen kann, dass eine Aussageform für alle reellen Zahlen gilt.“
b) „Die Aussageform muss für ein Anfangselement gelten, etwa für n=1.“
c) „$\alpha(n)$ haben wir schon, jetzt zeigen wir $\alpha(n+1)$“
d) „Angenommen $\alpha(n)$ ist wahr, dann ist auch $\alpha(n+1)$ wahr.“

3. Übungen

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ ($8^n - 1$ ist durch 7 teilbar)

b) Leiten Sie nun eine Formel zur Berechnung der Summe aufeinanderfolgender gerader Zahlen her, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1} \right)$

d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$? (Beweisen Sie Ihre Vermutung!)

e) Sei $\alpha(n) \equiv \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{8}(2 \cdot n + 1)^2$. Zeigen Sie, dass aus $\alpha(n) \Rightarrow \alpha(n+1)$.

f) $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \ \left(x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} \cdot y^{k-1} \right)$

g) Formulieren Sie unter Verwendung des Summenzeichens ein Bildungsgesetz für alle $n \in \mathbb{N}$ und beweisen Sie das durch vollständige Induktion:

$1 = 1, \quad 1-4 = -(1+2), \quad 1-4+9 = 1+2+3, \quad 1-4+9-16 = -(1+2+3+4)$

h) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, definiert durch $a_1=1$, $a_{n+1}=1/2\ a_n+1$.
Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $a_n \leq 2$ gilt.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+n\cdot a)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+a(n+1)+na^2$$

$$1+a(n+1)+na^2 \geq 1+(n+1)a \quad , \text{ weil } na^2 \geq 0$$

$2^n > n^2$ für $n \geq 5$ und $n=1$

n	2^n	n^2	
1	2	1	w
2	4	4	f
3	8	9	f
4	16	16	f
5	32	25	w
6	64	36	w

Wir beweisen die Ungl. für $n \geq 5$.

Ind.-anfang $(n=5)$: $32 = 2^5 > 5^2 = 25$ (w)

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n^2 \cdot 2 = n^2+n^2 = n^2+n\cdot n \underset{3<5}{>} n^2+3n$$

$$n^2+3n = n^2+2n+n > n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

$n=0$: 1

$n=1$: 1 1

$n=2$: 1 2 + 1 = 3

$n=3$: 1 3 3 1

$n=4$: 1 4 6 4 1

n^2+3n

$2^n > n^3$, $n=1$, $n \geq 10$ 24.09.24

Wir beweisen die Ungleichung induktiv für $n \geq 10$.

1) Induktionsanfang $(n=10)$ $1024 = 2^{10} > 10^3 = 1000$ (w)

2) Induktionsschluss $(n \to n+1)$

0			1				
1		1		1			
2	1		2		1		
3	1		$\boxed{3+3+1}$			= 7	
4	1	4	6	4	1		

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n^3 = n^3+n^3 = n^3 + n\cdot n^2 = n^3 + 7n^2 =$$

$$= n^3+3n^2+3n^2+n^2 > n^3+3n^2+3n+1 = (n+1)^3$$

QED

$2^n > n^4$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2n^4 = n^4+n^4 = n^4 + n\cdot n^3 > n^4 + 15n^3 =$$

$$= n^4+4n^3+6n^3+4n^3+n^3 > n^4+4n^3+6n^2+4n+1 =$$

$$= (n+1)^3$$

QE

n		Summe
0	1	1
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64

n Zeile $n = 0, 1, 2$

k Spalte $k = 0, 1, 2$

$\binom{n}{k}$ „n über k", Binominalkoeffizient

$n!$ Fakultät

$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

$5! = 4!\cdot 5$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad , \quad n \geq k$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$15 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$15 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$n = 4 \ : \ \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \ldots \binom{4}{4} = 2^4$$

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = 2^4$$

für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Beweis:

Wir zeigen die Summenformel induktiv.

1) Induktionsanfang $(n=0)$

$$1 = \binom{0}{0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 2^0 = 1$$

2) Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} + \binom{n}{n} =$$

$$= 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

$$11^2 = 121$$

$$11^3 = 1331 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$11^4 = 14641$$

$$11^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot 10^k$$

$$11^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 10^k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis

Wir zeigen die Aussage induktiv.

1) Induktionsanfang $(n=0)$

$$1 = \binom{0}{0}\cdot 10^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}\cdot 10^k = 11^0 = 1 \qquad (w)$$

2) Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot 10^k = \binom{n+1}{0}\cdot 10^0 + \binom{n+1}{1}\cdot 10^1 + \ldots + \binom{n+1}{n}10^n + \binom{n+1}{n+1}10^{n+1} =$$

$$= \binom{n}{0}10^0 + \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)10^1 + \left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)10^2 + \ldots + \left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)10^n + \binom{n}{n}10^{n+1} =$$

$$= \binom{n}{0}10^0 + \binom{n}{1}10^1 + \binom{n}{2}10^2 + \ldots + \binom{n}{n}10^n + \binom{n}{0}10^1 + \binom{n}{1}10^2 + \binom{n}{2}10^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}10^n + \binom{n}{n}10^{n+1} =$$

$$= 11^n + 10\cdot 11^n = 11^n(1+10) = 11^n\cdot 11 = 11^{n+1}$$

QED

25.09.2024

1. Klausur

A1
- Aussagen
- Betrags-Ungleichung

A2
- Quadratische Terme
- Nullstellen
- Scheitelpunkt
- Extrema mit quadratischer Zielfunktion

2. Klausur

A3
- Vollständige Induktion
- Summe
- Rekursive Folge
- Teilbarkeit
- Binominalkoeffiziente

A4
- Determinante (Sarrus, Laplace)
- LGS-Gauß Elimination
- Cramersche Regel

$$\mathbb{L} = \{\underbrace{(0|3|1)}_{\text{löst den inhomogene System}} + \underbrace{\tau(1|1|2)}_{\text{löst den homogene System}} : \tau \in \mathbb{R}\}$$

$\vec{x}_1 = (1|4|3) \quad (\tau = 1)$

$\vec{x}_2 = (0|3|1) \quad (\tau = 0)$

$\vec{x}_3 = (-1|2|-1) \quad (\tau = -1)$

homogenes LGS $\quad A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

inhomogenes LGS $\quad A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{0}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\tau|\tau|2\tau)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

sei $x_3 = t$

$2x_2 = t \qquad x_2 = \frac{1}{2}t$

$2x_1 = t \qquad x_1 = \frac{1}{2}t$

$\mathbb{L} = \{(\frac{1}{2}t | \frac{1}{2}t | t) : t \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{L} = \{(t | t | 2t) : t \in \mathbb{R}\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_3 = 5 \end{array}\right|$$

$\mathbb{L} = \{(0|3|1) + \tau(1|1|2) : \tau \in \mathbb{R}\}$

30.09.24

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{n}{k}$ Zeile, Spalte „n über k"

$0 \leq k \leq n$

$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$1+3+6+10+15+21=56$

$1+4+10+20+35=70$

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\binom{8}{4}$

$\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}$, für alle $n \geq 3$

Beweis:

Wir zeigen die Summenformel induktiv.

1. Induktionsanfang $(n=3)$

$$\sum_{k=3}^{3}\binom{3}{3}=\binom{3}{3}=1=\binom{4}{4}=1 \quad (w)$$

2. Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=3}^{n+1}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{3}=\binom{n+2}{4}$$

QED

$1+3+6+10+15+21=56$

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

für $n \geq m$

Beweis

Wir zeigen die Summenformel induktiv

1. Induktionsanfang $(n=3)$

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = 1 \quad (w)$$

2. Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1} = \binom{n+1+1}{m+1} \qquad (w)$$

QED

1) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$

2) $\binom{3}{4} + \binom{3}{5}$ nicht möglich

$\binom{n}{k}$, $n \geq k$

3) $\binom{7}{2} + \binom{9}{7}$ nicht möglich

4) $\binom{7}{2} + \binom{7}{5}$ nicht möglich

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

1.

$$\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m}$$

$8^n - 1$ teilbar durch 7

$8^n - 1 = 7 \cdot k \quad , k \in \mathbb{N}$

2. I-schluss

$8^{n+1} - 1 = 8^n \cdot 8 - 1 = 8(8^n - 1) - 1 + 8 = 8(8^n - 1) + 7 = 8 \cdot 7k + 7 = 7(8k+1) = 7\tilde{k}$

$5^n + 7$ durch 4 teilbar $\quad (4k)$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage induktiv

1. Induktionsanfang $(n=0)$

$5^0 + 7 = 8 = 4 \cdot 2$

2. Induktionsschluss

$5^{n+1} + 7 = 5^n \cdot 5 + 7 = 5(5^n + 7) + 7 - 35 = 5 \cdot 4 \cdot k - 28 = 4(5k - 7) = 4\tilde{k}$

QED

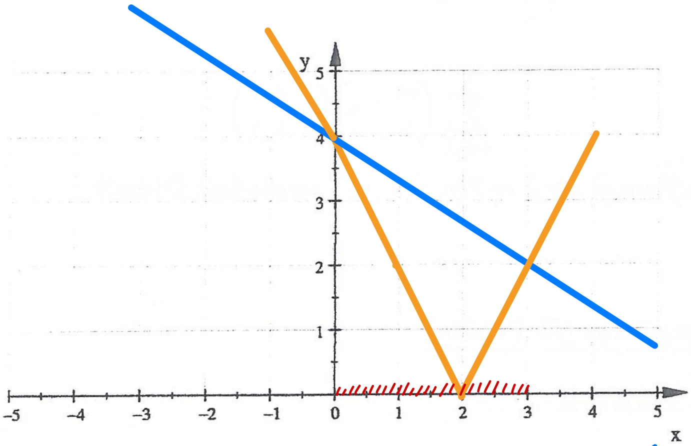
Name: Kurs:

Kurse A/B **1. Mathematik-Klausur**

Schreiben Sie Ihre Lösung auf den weißen Kanzleibogen. Das farbige Konzeptblatt wird nicht bewertet.

1. Aussageformen, quadratische Funktionen und Parabeln (25 Punkte):

a) Lösen Sie graphisch: Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Aussageform $\boxed{|2x-4|} \leq \boxed{-\frac{2}{3}x+4}$?



$x \in [0;3]$

$4ab \leq a^2+2ab+b^2$

b) Lösen Sie $|2x-4| = -\frac{2}{3}x+4$ durch Fallunterscheidung!

c) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ gilt

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

$ab - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq 0$

$ab - \frac{ab}{2} - \frac{a^2+b^2}{4} \leq 0$

$\frac{ab}{2} - \frac{a^2+b^2}{4} \leq 0$

$\frac{a^2-2ab+b^2}{4} \leq 0 \quad (a-b)^2 \leq 0$

2. Quadratische Funktionen und Parabeln (25 Punkte):

a) Nennen Sie die Scheitelpunktform und berechnen Sie den Scheitelpunkt von f mit

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 20$$

$S(2|12) \Rightarrow 2(x^2-4x+4)+20-8$

$\Rightarrow 2(x-2)^2+12$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

$2 \quad 12$

b) Gegeben ist f mit

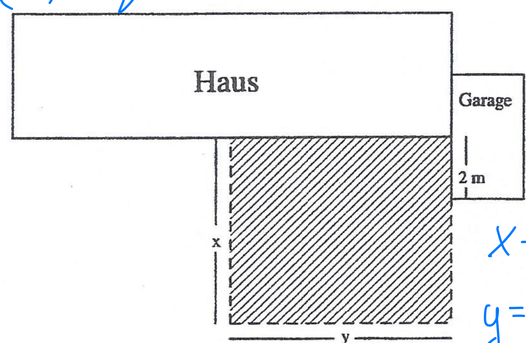
$$f(x) = x^2 - 4x + q, \qquad q \in \mathbb{R}$$

Für welche Werte von q hat f zwei Nullstellen? $b^2-4ac>0$

$\mathbb{L} = \{q \in \mathbb{R} : q<4\}$ $q \in]-\infty;4[$

$(-4)^2 - 4q > 0 \quad 16 > 4q \quad q<4$

c) Max will mit 18 Meter Zaun einen Platz für seinen Esel einzäunen. Er benutzt hierfür die Seiten von Garage und Haus, die Garage steht zwei Meter vor, wie in der Skizze dargestellt. Berechne den maximalen Platz, der dem Esel zur Verfügung steht. $50\,m^2$



$x+y+x-2=18$

$y=20-2x$

$x \cdot y = x \cdot 2 \cdot (10-x) = 20x-2x^2$

$20x-2x^2=0 \quad 2x(10-x)=0$

$x_1=0 \quad x_2=10$

$x_{Scheitel}=5 \quad y=20-2\cdot 5=10$

$S_{max}=2\cdot 5\cdot(10-5)=10\cdot 5=50$

Viel Erfolg !

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$2x^2-8x+20=0$$

$$S\left(-\frac{-8}{2\cdot 2}\,\middle|\,20-\frac{(-8)^2}{4\cdot 2}\right)$$

$$S(2|12)$$

b) Wir lösen die Betragsungleichung durch Fallunterscheidung

Fall 1, sei $x \geq -2$

$|2x-4| \leq -\frac{2}{3}x+4$

$2x-4+\frac{2}{3}x-4 \leq 0$

$\frac{8}{3}x \leq 8$

$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 3\}$

Fall 2, sei $x < -2$

$|2x-4| \leq -\frac{2}{3}x+4$

$4-2x+\frac{2}{3}x-4 \leq 0$

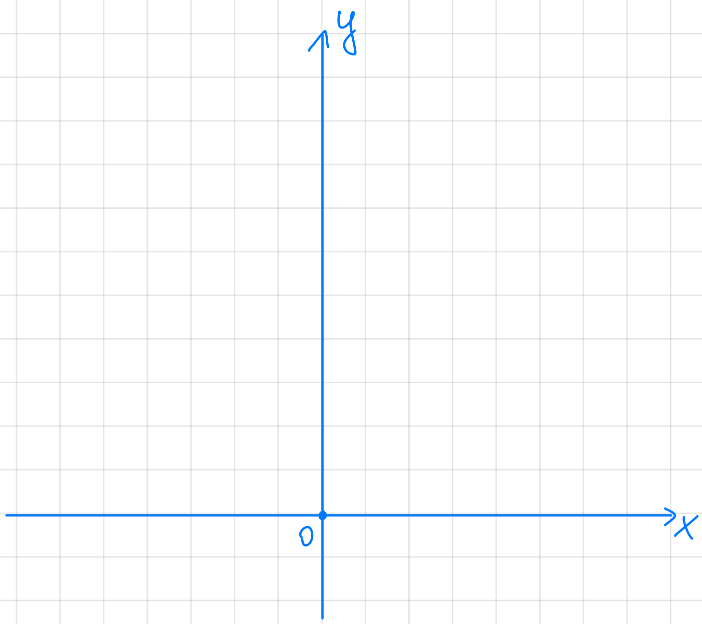
$-\frac{4}{3}x \leq 0$

$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x \leq 3\} = [0;3]$

c) $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$

$|a \cdot b| \leq \frac{(a+b)^2}{4}$



Name:

Kurse A/B	**1. Mathematik-Klausur**

Wir beweisen die Aussage induktiv.

1. Induktionsanfang $(n=1)$

$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1 = 1^2$

3. Vollständige Induktion (25 Punkte):

a) Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

2. Induktionsschluss $(n \rightarrow n+1)$

$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = (n+1)^2$

QED

b) Beweisen Sie: $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

$5^n + 7 = 4 \cdot k$

c) Beweisen Sie: $5^{n+1} + 7 = 5^n \cdot 5 + 7 = 5(5^n + 7) + 7 - 35 = 5 \cdot 4k - 28 = 4(5k-7) = 4\tilde{k}$

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} = \binom{\overset{n+2}{n+1}}{k+1} \qquad \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$$

Verdeutlichen Sie die Formel für $k = 2, n = 4$ im Pascalschen Dreieck.

4. Lineare Gleichungssysteme (25 Punkte):

Gegeben ist das LGS mit $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & a \cdot y & + & 3 \cdot z & = & 2 \\ 2 \cdot x & + & 3 \cdot y & + & a \cdot z & = & 3 \end{array}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix. Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das LGS genau eine Lösung? $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 6 + 3 - 2a - 9 - 2a^2 = -a^2 - 2a = -a(a-2)$ für $a \neq 0$ und $a \neq 2$

Sei jetzt $a = 2$.

b) Berechnen Sie die Lösungsmenge mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

c) Geben Sie eine spezielle Lösung des inhomogen Systems und zwei verschiedene Lösungen des homogenen Systems an. $\mathbb{L} = \{(0;1;0) + t(5;4;1) : t \in R\}$

Viel Erfolg !

21.10.24

$$\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!}+\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k)!}+\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)\cdot(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!\,(n-k+1)+(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!\,(n-k+2)}{k!\,(n-k+1)(n-k)!}$$

$k=2,\quad n=4 \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq k$

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=\sum_{m=2}^{4}\binom{m}{2}=\binom{5}{3}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1\ \binom{2}{2} & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3\ \binom{3}{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6\ \binom{4}{2} & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & \binom{5}{3} & & & &
\end{array}$$

Beweis:

Wir zeigen die Summenformel induktiv nach n.

1. Induktionsanfang $(n=k)$

$$1=\binom{k}{k}=\sum_{m=k}^{k}\binom{m}{k}=\binom{k+1}{k+1}=1 \qquad (w)$$

2. Induktionsschluss $(n\to n+1)$

$$\sum_{m=k}^{n+1}\binom{m}{k}=\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}$$

q.e.d.

$5^n + 7$ ist durch 4 teilbar

8, 12, 32, ...

$5^n + 7 = 4 \cdot k$

Ind-anfang $(n=0)$: $5^0 + 7 = 8 = 2 \cdot 4$ (w)

$$5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7 = 5(\underbrace{5^n+7}_{4k}) + \underbrace{7 - 35}_{28 \to 4k}$$

$$5^{n+1} + 7 = (4+1) \cdot 5^n + 7 = \underbrace{4 \cdot 5^n}_{4k} + \underbrace{5^n + 7}_{4k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

I.A. $(n=1)$ $\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2 = 1$ (w)

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}$$

$n=2$: $x^2 - y^2 = (x-y)(x^1 y^0 + x^0 y^1) =$

$= (x-y)(x+y)$

$n=3$: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2) =$

$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$n=7$: $x^7 - y^7 = (x-y)(x^6 + x^5 y + x^4 y^2 + x^3 y^3 + x^2 y^4 + x y^5 + y^6)$

Beweis:

IA $(n=1)$ $x - y = (x-y)(x^0 \cdot y^0) = x - y$

IS $(n \to n+1)$

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x^{n+1-k} \cdot y^{k-1} = (x-y) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{n+1-k} \cdot y^{k-1} + (x-y) \cdot (x^0 y^n) =$$

$$= x \cdot (x-y) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1} + (x-y) y^n =$$

$$= x(x^n - y^n) + y^n(x-y) = x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1} = x^{n+1} - y^{n+1}$$

q.e.d.

28.10.24

a)

$a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

zu zeigen $a_n \leq 2$

Wir zeigen die Ungleichung induktiv.

1. Induktionsanfang $(n=1)$

$a_1 = \sqrt{2} \approx 1,41 \leq 2 \quad (w)$

2. Induktionschluss $(n \to n+1)$

$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Q.E.D.

b) $2^{3n} + 13 = 7k \qquad n \in \mathbb{N}$

Wir zeigen die Teilbarkeit induktiv.

1. Induktionsanfang $(n=0)$

$2^0 + 13 = 14 = 7 \cdot 2 \qquad (w)$

2. Induktionsschluss $(n \to n+1)$

$2^{3(n+1)} + 13 = 2^3 \cdot 2^{3n} + 13 = (7+1)2^{3n} + 13 = 7 \cdot 2^{3n} + 2^{3n} + 13 = 7k + 7 \cdot 2^{3n} = 7(k + 2^{3n}) = 7\tilde{k}$

c) $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1}$

$\binom{5}{2} = \sum_{i=0}^{3} \binom{1+i}{1} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} =$

$= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Wir zeigen die Summenformel induktiv

1. Induktionsanfang $(n=1, k=1)$

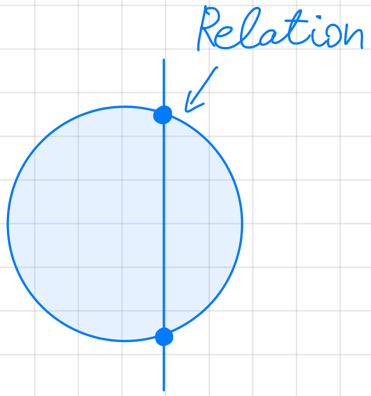
$1 = \binom{1}{1} = \sum_{i=0}^{0} \binom{i}{0} = \binom{0}{0} = 1 \quad (w)$

2. Induktionsschluss ($n \to n+1$)

$$\sum_{i=0}^{n+1-k}\binom{k-1+i}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{k-1+i}{k-1} + \binom{k-1+n+1-k}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Q.E.D.

Reele Funktion



Definitionsbereich Werteberech

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = x^2$$

$$f: D \to W, \quad f(x) = y \quad, D, W \leq \mathbb{R}$$

Zu jedem x existiert genau ein y

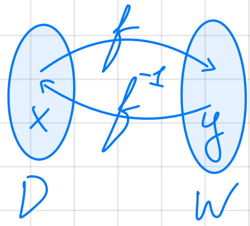
D := Telefonnumern

W := Einwohnen

0231 | 94 xxx 472

keine Funktion, sondern eine Relation $f: D \longrightarrow W$

$$f^{-1}: W \longrightarrow D$$



$$f^{-1}(f(x)) = x$$

richtig für Umkehrfunktion

$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \to x^2$$ richtig

$$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \to \sqrt{x}$$

Umkehrfunktion

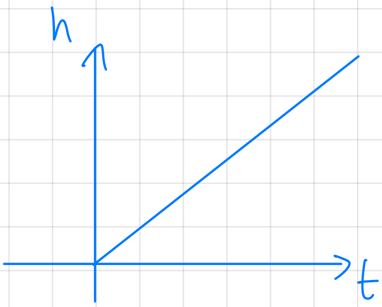
$\boxed{\text{DO - CP157}}$

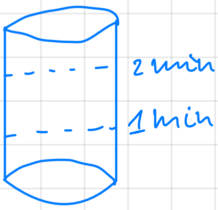
$f:$ Kfz-Nr. $\longrightarrow$ Halter Funktion

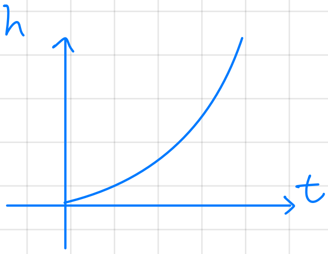
$f^{-1}:$ Halter $\longrightarrow$ Kfz-Nr. keine Funktion Relation

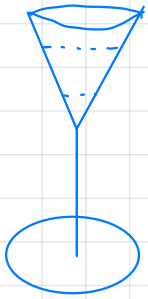
ISBN $\longrightarrow$ Verlag

Artikelnummer $\longrightarrow$ Preis







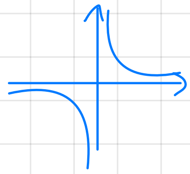


29.10.24

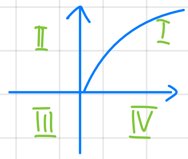
$f: D \to W \quad , x \mapsto f(x)$

$f_1: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad , f(x) = \frac{1}{x}$

$f_2: [0;\infty[\to [0;\infty[\quad , f(x) = \sqrt{x}$



$\frac{1}{x}$

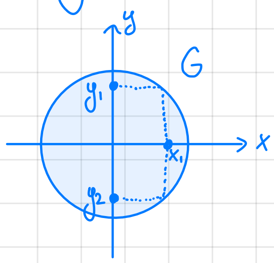


$\sqrt{x}$

G heißt Graph

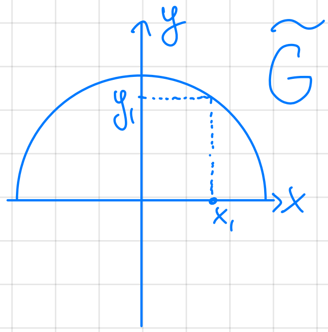
$G_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0, y = \frac{1}{x}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) : y = \frac{1}{x}\}$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



Relation

$\tilde{G} = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 : y = \sqrt{1-x^2}\}$

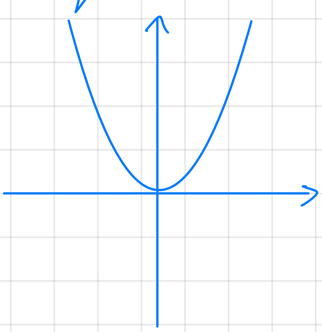


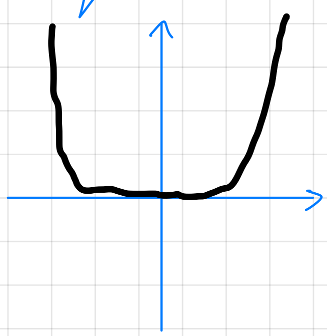
Funktion

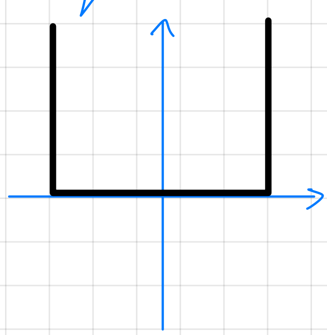
Die Funktion g hat eine Nullstelle bei -1.

„Parabel"

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = x^4$ $\qquad$ $f(x) = x^{100}$







$f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$

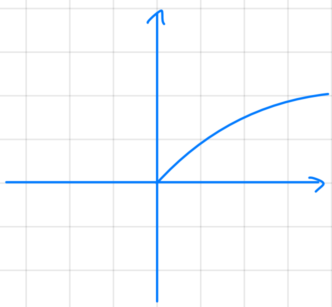
$4 - x \geq 0$

$x \leq 4$

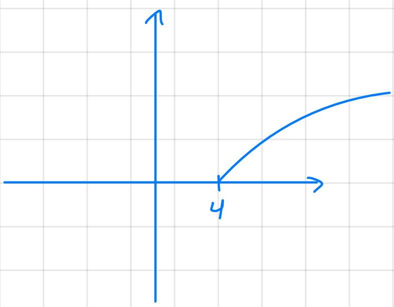
$D =]-\infty; 4]$

$f:]-\infty; 4] \to [2; \infty[, \quad f(x) = 2 + \underbrace{\sqrt{4-x}}_{\geq 0} \geq 2 + 0 = 2$

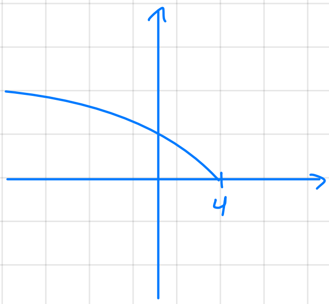
$f(x) = \sqrt{x}$



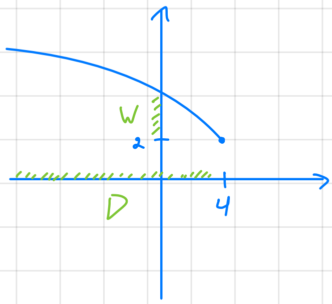
$f(x) = \sqrt{x-4}$



$f(x) = \sqrt{4-x}$



$f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$



W – Wertebereich
D – Definitionsbereich

Funktionen

1 Verbinden Sie zusammengehörige Karten.

$f(x) = \frac{4}{x}$ | $f(3) = 3$ | $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $W_f = [0; 3]$

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ | $f(0) = 3$ | $D_f = \mathbb{R}$ | $W_f = [0; \infty[$

$f(x) = \frac{x^2}{3}$ | $f(2) = 2$ | $D_f = [-3; 3]$ | $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2 Ergänzen Sie.

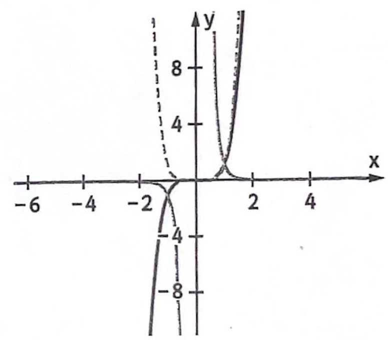
	Aussage in Textform	mathematische Kurzform
a)	Die Funktion f nimmt an der Stelle 2 den Funktionswert 6 an.	$f(2) = 6$
b)	Die Definitionsmenge der Funktion g umfasst alle reellen Zahlen außer 4.	$\mathbb{R} \setminus \{4\}$
c)		$g(-1) = 0$
d)	Die Wertemenge der Funktion f umfasst nur die positiven reellen Zahlen größer Null.	$W_F =]0, \infty[$
e)		$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
f)	Die Funktion f ordnet der Zahl 0 einen kleineren Funktionswert zu als der Zahl −2.	$f(0) < f(-2)$
g)		$W_g = [0; 10]$

3 Dargestellt sind die Graphen der folgenden Funktionen.

f: $x \to x^5$; g: $x \to \frac{1}{x^5}$; h: $x \to x^6$

a) Beschriften Sie die Graphen mit den passenden Funktionsnamen.

b) Geben Sie zu jeder Funktion die Definitions- und die Wertemenge an.



D_f = ________ D_g = ________ D_h = ________

W_f = ________ W_g = ________ W_h = ________

4 Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 16}$

D_f = ________

b) $f(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

D_f = ________

c) $f(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$

D_f = ________

5 Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr (w) oder falsch (f) ist. Notieren Sie dazu den Buchstaben der passenden Begründung von einer der Karten.

a) Die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ ist der Graph einer Funktion. ________

b) Die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ ist der Graph einer Funktion. ________

c) Wenn ein Wert bei einer Zuordnung mehrfach angenommen wird, liegt keine Funktion vor. ________

A Eine Funktion ordnet jedem Wert der Definitionsmenge genau einen Wert der Wertemenge zu.

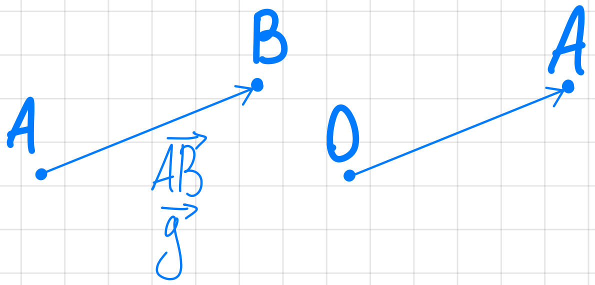
B Bei einer Funktion kann ein Wert der Wertemenge mehrfach angenommen werden.

C Wenn einem Wert der Definitionsmenge verschiedene Werte der Wertemenge zugeordnet werden, liegt keine Funktion vor.

Vektorrechnung

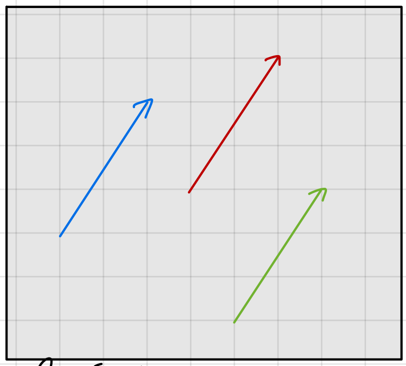
31.10.24

Gebundener Vektor



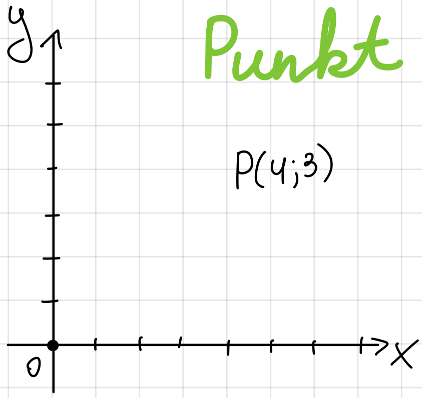
$\vec{OA} = \vec{a}$

„Ortsvektor"

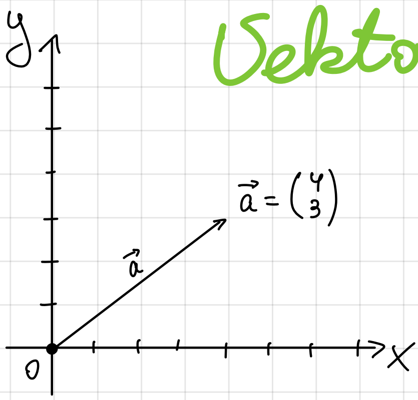


gleiche Vektoren

Punkt



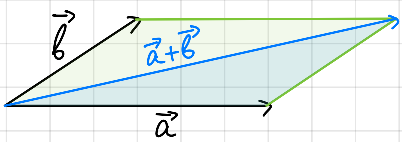
Vektor

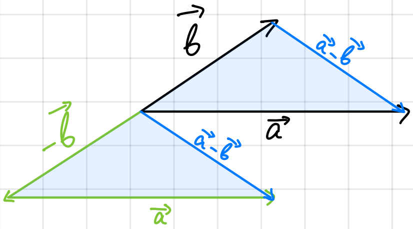


2 Vektoren sind immer komplanar (liegen in einer Ebene)

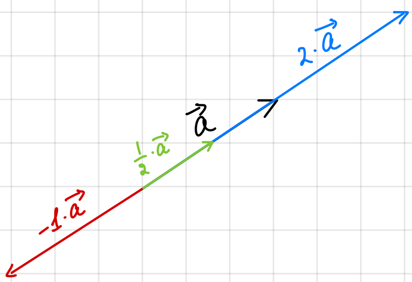
$V = \mathbb{R}^2$ ← Vektorraum

$+ : V \times V \longrightarrow V$





$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$



$\vec{a}, 2\cdot\vec{a}, \frac{1}{2}\cdot\vec{a}, -1\vec{a}$ kollinear (auf einer Gerade)

$r_1 \cdot \vec{a_1} + r_2 \cdot \vec{a_2} + r_3 \cdot \vec{a_3}$ Linearkombination (LK)

$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK von $\vec{a}, \vec{b}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcl|l} 2r + s & = & 5 & + \\ -r + 3s & = & 1 & 2 \\ \hline 2r + s & = & 5 & r = 2 \\ 0 + 7s & = & 7 & s = 1 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$ Raum — Zeit

$0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \dots x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad n \in \mathbb{R}$

Lineare Algebra mit Analytischer Geometrie – Vektorrechnung

Ein Vektor ist eine Größe, die durch Angabe von Maßzahl und Richtung vollständig beschrieben wird. Wir stellen Vektoren durch Pfeile dar und bezeichnen sie mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Die Maßzahl eines Vektors heißt Betrag und wird mit $a = |\vec{a}|$ bezeichnet. Ein Vektor lässt sich auch durch Angabe von Anfangs- und Endpunkt festlegen, z.B. $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet den (gebundenen) Vektor, der in A beginnt und in B endet. Beginnt ein Vektor $\overrightarrow{OA}$ im Ursprung des Koordinatensystems, so heißt er Ortsvektor. Zwei Vektoren heißen gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen. Wir lassen die Parallelverschiebung von Vektoren zu, sprechen hier von freien Vektoren.

Eine Größe, die nur durch ihre Maßzahl vollständig beschreiben wird, heißt Skalar.

- Physikalische Beispiele für Skalare sind: Masse m, Zeit t, Temperatur T, Widerstand R.
- Physikalische Beispiele für Vektoren sind Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kraft $\vec{F}$, Impuls $\vec{p}$, Drehmoment $\vec{M}$

Wenn man aus gegebenen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ einen Vektor $\vec{v} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ bildet, dann bezeichnet man ihn als eine **Linearkombination (LK)** aus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

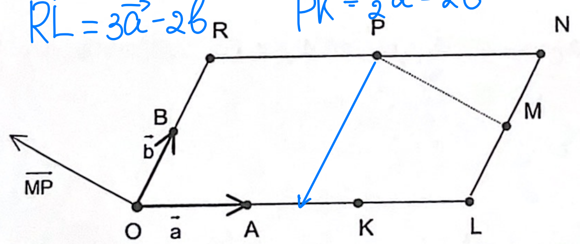
Beispiele: $2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$ ist eine LK von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Eine **Summe** $\vec{a} + \vec{b}$ oder eine **Differenz** $\vec{a} - \vec{b}$ ist also auch eine LK.

<u>Übung 1</u>

In dem nachstehenden **Parallelogramm** OLNR seien B,M und P die Mittelpunkte der Seiten OR bzw. LN bzw. RN. Die **Punkte** A und K teilen die Seite OL in drei gleichlange Strecken. Die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ bezeichnen wir mit $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$. Die Punkte A und B sind demnach die **Spitzen** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$\overrightarrow{RL} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ $\quad$ $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} =$
$= \vec{p} - \vec{m} =$
$= \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} - \vec{b} =$
$= -\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$



$\overrightarrow{OL} = 3\vec{a}$
$\overrightarrow{ON} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$
$\overrightarrow{OM} = 3\vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

a) Schreiben Sie die (Orts-)Vektoren $\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}$ und $\overrightarrow{OP}$ als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Mit $\overrightarrow{MP}$ (siehe Zeichnung) bezeichnen wir den Ortsvektor, der im Punkt O (Ursprung des Koordinatensystems, Nullpunkt, „origin“) beginnt und mit seiner Länge und Richtung genau zwischen die Punkte M und P passen würde. Schreiben Sie $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{PK}$ als LK aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

<u>Definition:</u>

A Wir bezeichnen Vektoren als **kollinear**, wenn sie zusammen auf einer **Geraden** liegen.

B Wir bezeichnen Vektoren als **komplanar**, wenn zusammen auf einer **Ebene** liegen. (Zwei Vektoren sind immer komplanar, mehr Vektoren können komplanar sein, müssen es aber nicht).

<u>Übung 2</u>

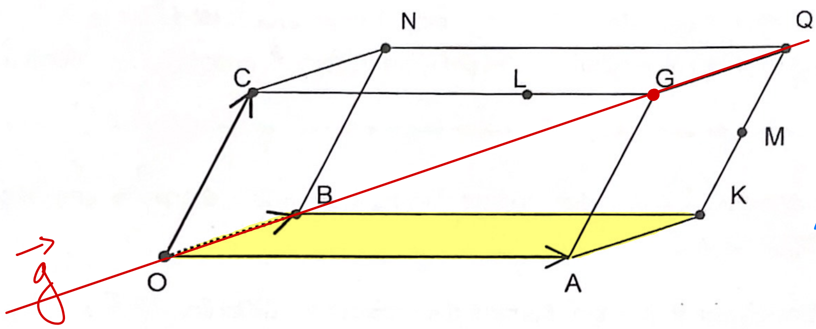
Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Schreiben Sie $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als LK aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Übung 3

Gegeben sind drei nicht-komplanare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Sie *spannen* den gezeichneten **Spat** *auf*.

Die Spitzen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bezeichnen wir mit A,B,C; die Namen der anderen Ecken des Spats entnehmen Sie der Zeichnung. M sei der Mittelpunkt von KQ, L teile die Strecke CG im Verhältnis 2:1.



$\overrightarrow{KN} = \vec{n} - \vec{k} = \vec{b} + \vec{c} - a - \vec{b} =$
$= \vec{c} - \vec{a} =$
$= -1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}$

$\overrightarrow{MB} = \vec{b} - \vec{m} = \vec{b} - (\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{c}) =$
$= \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) =$
$= \vec{b} - \vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} =$
$= -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} = -(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c})$

a) Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{LK}$ als LK aus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Suchen Sie in Gedanken die Vektoren $\vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Fügen Sie in Gedanken weitere Punkte und Vektoren hinzu, sodass Sie solche LK schnell erkennen können. $\rightarrow x(\vec{a} + \vec{c}) = x \cdot \vec{g} = x \cdot \overrightarrow{OG}$

c) Wo liegen alle LK der Form $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, $(x, y \epsilon \mathbb{R})$ und $x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{c}$, $(x \epsilon \mathbb{R})$.

d) Warum kann man $\overrightarrow{BG}$ nicht als LK aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. aus $\vec{a}$ und $\vec{c}$ schreiben.

Verwenden Sie für Ihre Antworten aus c) und d) die Formulierung „eine Ebene aufspannen".

Übung 4

Schreiben Sie $\vec{m} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ als LK aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Erklären Sie (mit den geeigneten Fachbegriffen, warum Sie für $\vec{m}$ und $\vec{k}$ unterschiedliche Ergebnisse erhalten.

Übung 5

Zeigen Sie, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ nicht-komplanar sind?

Wenn drei Vektoren nicht-komplanar sind, so spannen sie den Raum ($\mathbb{R}^3$) auf. Man kann dann jeden Vektor des Raumes als LK dieser drei Vektoren darstellen. Schreiben Sie $\vec{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK aus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{m} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{m}$

$r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} 5r + s = 7 & s = -3 \\ r - 4s = 14 & r = 2 \\ s = -3 & s = -3 \end{array}$$

$\vec{m}$ liegt in der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{m}$ sind komplanar.

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \neq \vec{k}$

$$\begin{array}{ll} 5r + s = 8 & s = -97 \;/\; r = 1 \\ r - 4s = 9 & r = 21 \\ s = 3 & s = 3 \end{array}$$

?

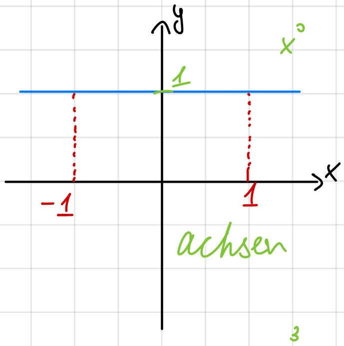
$\boxed{\text{3 Vektoren spannen einen Raum auf}}$

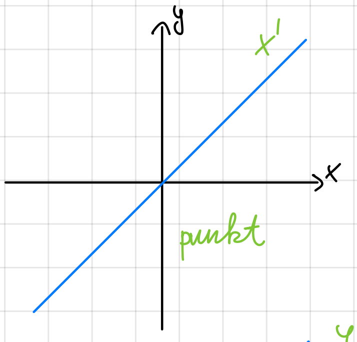
$\vec{k}$ liegt ~~auf~~ in der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{k}$ sind nicht komplanar.

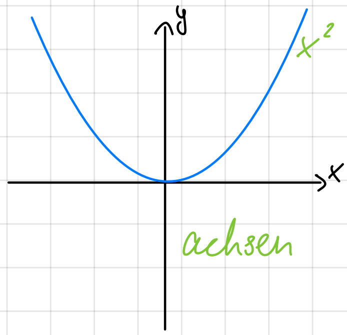
$\mathbb{L} = \emptyset$

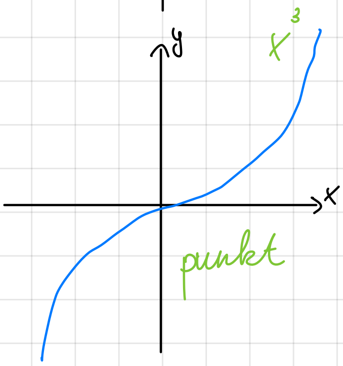
Besondere Symmetrie

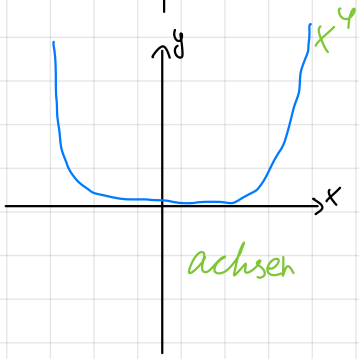
Punktsymmetrie zum Ursprung der K.O.-Systems
Achsensymmetrie zur y-Achse











Definition:

Eine Funktion f heißt achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$.
Dann heißt f eine <u>gerade</u> Funktion.

Definition:

Eine Funktion f heißt punktsymmetrisch zum Ursprung des K.O.-Systems, wenn $f(-x) = -f(x)$.
Dann heißt f eine <u>ungerade</u> Funktion.

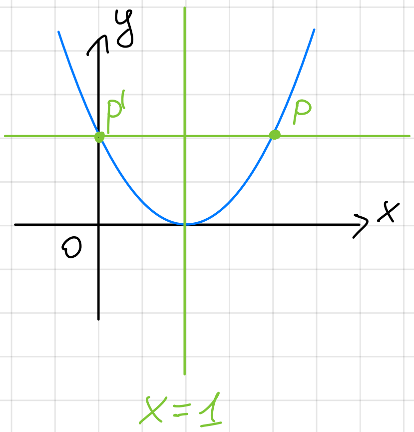
Beispiele:

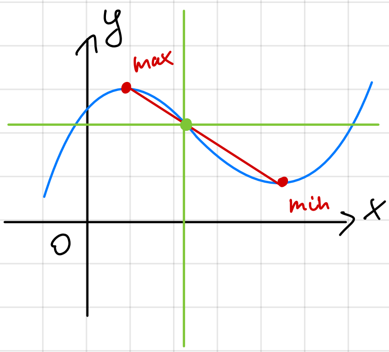
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ achsensymmetrisch, weil
$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 = x^4 + 2x^2 + 3 = f(x)$

$f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ punktsymmetrisch, weil
$f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -(x^5 - 2x^3 + x) = -f(x)$

$f(x) = x^4 + x$ hat keine besondere Symmetrie, weil
$f(-x) = (-x)^4 + (-x) = x^4 - x \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$

$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$





1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$(x-2)^2 = 1 \cdot x^4 2^0 - 4 \cdot x^3 2^1 + 6 \cdot x^2 2^2 - 4 \cdot x^1 2^3 + 1 \cdot x^0 2^4 =$
$= x^4 - 4 \cdot 2x^3 + 6 \cdot 4x^2 - 4 \cdot 8x + 16 =$
$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

1 Entscheiden Sie ohne Funktionsplotter, ob die Funktion f gerade oder ungerade ist. Die zugehörigen Buchstaben aller geraden, ungeraden und der übrigen Funktionen ergeben jeweils in der richtigen Reihenfolge den Namen einer Stadt.

B | $f(x) = x^3 + 1$	W | $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3$	N | $f(x) = (x-2)^4$	I | $f(x) = x^4 \cdot 3$
T | $f(x) = x - \frac{2}{x}$	K | $f(x) = x^6 - 11x^2$	H | $f(x) = \frac{x}{x^2}$	A | $f(x) = x^{-7}$
L | $f(x) = x^4 - x$	E | $f(x) = (x^2+1) \cdot 3x$	D | $f(x) = 1 - x$	U | $f(x) = \frac{1}{x+1}$
N | $f(x) = 0{,}2x$	I | $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$		E | $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

Lösungswörter: gerade: ________ ungerade: __________ weder gerade noch ungerade: __________

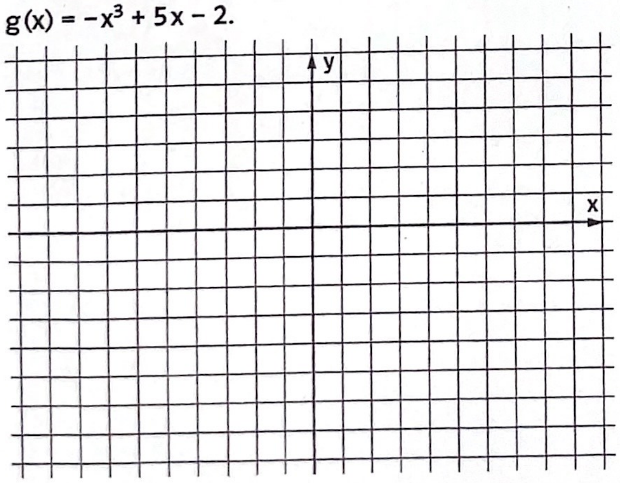
2 Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und geben Sie ein Beispiel oder Gegenbeispiel an.

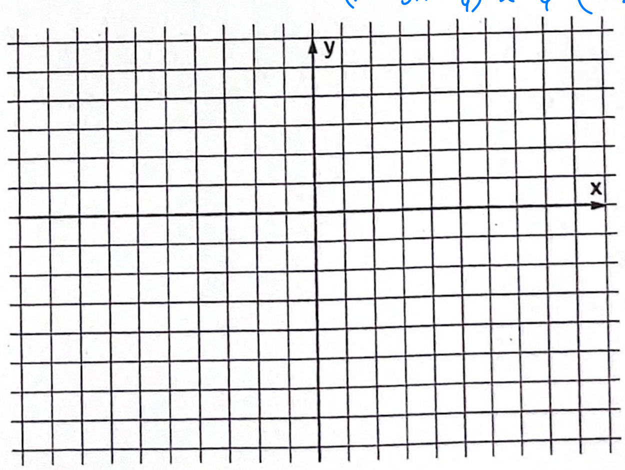
Aussage	wahr	falsch	(Gegen-)Beispiel
a) Jede Funktion, die nicht gerade ist, ist ungerade.	○	●	$f(x) = x + 1$
b) Multipliziert man die Terme zweier ungerader Funktionen, erhält man stets den Term einer geraden Funktion.	●	○	Beweis
c) Es gibt genau eine Funktion, die gerade und ungerade ist.	●	○	$f(x) = 0$
d) Dividiert man die Terme einer geraden und einer ungeraden Funktion, erhält man stets den Term einer ungeraden Funktion.	●	○	Beweis
e) Der Graph von jeder ungeraden Funktion ist zu jedem seiner Punkte punktsymmetrisch.	○	●	$f(x) = x^3$

3 Skizzieren Sie mithilfe des GTR (Wertetabelle) die Graphen von f und g mit $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ und $g(x) = -x^3 + 5x - 2$.

$W = [-\frac{1}{4}; \infty[$

$= (x^4 - 3x^2 + \frac{9}{4}) + 2 - \frac{9}{4} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$





4 Geben Sie Werte von t an, für die der Graph von f symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung ist.

a) $f(x) = -x^3 + 3tx^2 + \frac{t}{2}x$
$t = 0$

b) $f(x) = 2(x+2)(x-t)$
$t = 2$

c) $f(x) = x^{2t} - x^t$
$t = 2k$

d) $f(x) = 3x^{t+2} + 2x^t$
$t = 2k - 1$
$t = 2k$

2b) Beweis

Vor: f, g ungerade

$f(-x) = -f(x)$

$g(-x) = -g(x)$

Behauptung: $f(x) \cdot g(x)$ gerade

Beweis

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$

Q.E.D.

2d) Vor f - gerade, g - ungerade

$f(-x) = f(x)$

$g(-x) = -g(x)$

Behauptung: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ungerade

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$h(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{-g(x)} = -\frac{f(x)}{g(x)} = -h(x)$

Q.E.D.

05.11.24

a)

$f_t(x) = -x^3 + 3tx^2 + \frac{t}{2}x$

$f_t(x) \neq f(x,t)$

$f_1(x) = -x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x$

$f_{-2}(x) = -x^3 - 6x^2 - x$

$f_0(x) = -x^3$

$t = 0$: ungerade

$t \neq 0$: keine besondere Symmetrie

für kein $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion gerade

b) $f_t(x) = 2(x+2)(x-t) = 2(x^2 - tx + 2x - 2t) = 2x^2 + (4-2t)x - 4t \cdot x^0$

$t \neq 2$: keine besondere Symmetrie, weil $4-2t \neq 0$

$t = 2$: $f_2(x) = 2x^2 - 8$ gerade

c) $f_t(x) = x^{2t} - x^t$

$t = 0$: $f_0(x) = 0$ gerade und ungerade

$t = 2k$: $f_{2k}(x) = x^{4k} - x^{2k}$ gerade

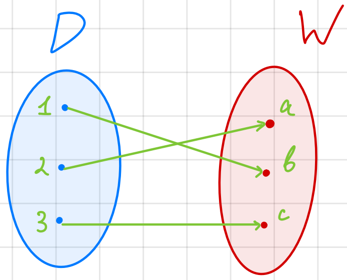
$t = 2k-1$: $f_{2k-1}(x) = x^{4k-2} - x^{2k-1}$ keine bes. Symmetrie

d) $f_t(x) = 3x^{t+2} + 2x^t$

t : gerade : $f_t(x)$ gerade

t : ungerade : $f_t(x)$ ungerade

$f: \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c\}$

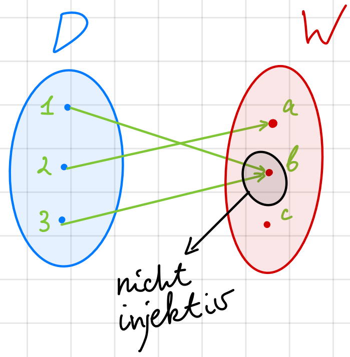


$f^{-1}(b) = 1$

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Updownarrow$

f injektiv



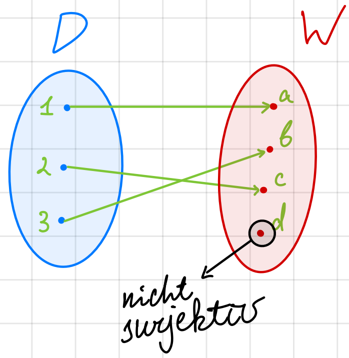
$f^{-1}(b) = \{2,3\}$

f^{-1} – keine Funktion

$\forall\, y \in W \;\exists\, x \in D : f(x) = y$

$\Updownarrow$

f surjektiv



$f^{-1}(d) = ?$

Konsequenz:

$|D| = |W|$

---

f injektiv und surjektiv $:\Longleftrightarrow$ f bijektiv

$f: D \to W$

$f^{-1}: W \to D$

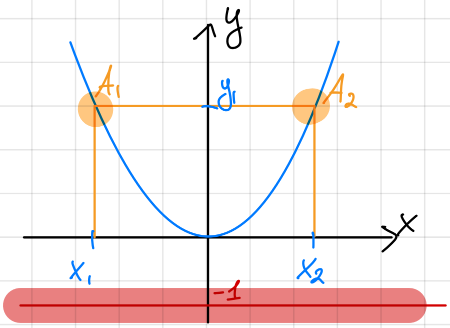
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

f ist nicht injektiv

und nicht surjektiv,

also nicht bijektiv,

d.h. nicht umkehrbar



$-1 \in \mathbb{R}$

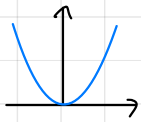
$f(x) = x^2 = -1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht inj
nicht sur



$f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ $\left.\begin{array}{l}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\end{array}\right\}$ bijektiv

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$

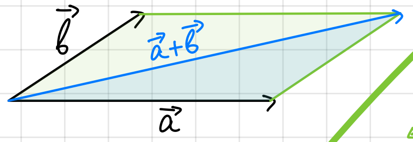
$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$

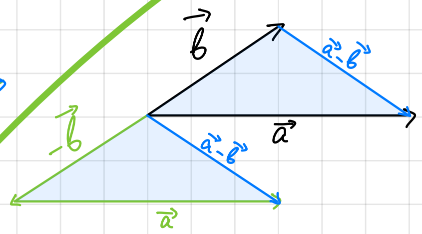
spannen einen Raum auf

06.11.24

kollinear $\quad \vec{a}, \vec{b}, \quad$ d.h. $\quad \vec{b} = r \cdot \vec{a}$

komplanar $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{c} = \underbrace{r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}_{\text{Linearkombination}}$





$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0} \qquad x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$r \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} = \vec{0} \qquad 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0} \qquad r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = \vec{c} - \vec{c} = \vec{0}$$

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ n Vektoren und
$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ n Skalare

$$r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0} \quad ?$$

Die Vektoren heißen linear unabhängig (l.u.), wenn

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0} \implies r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$$

Sonst heißt die Vektoren linear abhängig. (l.a.)

Folgerung: Kolliniare und komplanare Vektoren sind linear abhängig.

Beispiel: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ ist l.a.

1. $0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c} + 0\cdot\vec{c} + 0\cdot\vec{d} + 0\cdot\vec{e} = \vec{0}$
2. $0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 1\cdot\vec{c} - 1\cdot\vec{c} + 0\cdot\vec{d} + 0\cdot\vec{e} = \vec{0}$

mehr als 1 $\Leftarrow$ = l.a.

Beispiel: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}$

$0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 5\cdot\vec{0} = \vec{0}$ l.a. (komplanar)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ l.u. (nur (0;0;0))

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right| = 0 + 12 - 2 - 0 - 2 - 3 = 5 \neq 0 \Leftrightarrow \text{l.u.}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}\right| = 15 \neq 0 \Leftrightarrow \text{l.u.}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl|l} x &+& 3y &+& 2z &=& 0 & (+) \quad (-2) \\ -x & & &+& 2z &=& 0 & \\ 2x &+& y &-& z &=& 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl|l} x &+& 3y &+& 2z &=& 0 & \\ & & 3y &+& 4z &=& 0 & 5 \\ & & -5y &-& 5z &=& 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 3y &+& 2z &=& 0 \\ & & 3y &+& 4z &=& 0 \\ & & & & 5z &=& 0 \end{array}$$

$z = 0 \qquad y = 0 \qquad x = 0$

$\mathbb{L} = \{(0;0;0)\}$, also sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ l.u.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\7\end{pmatrix}$$ linear abhängig (l.a.)

fest

$$\begin{array}{l|ccc|c}
\mathrm{I} & 1 & 4 & 2 & 0 \\
 & 2 & 0 & -4 & 0 \\
 & -3 & 1 & 7 & 0 \\
\hline
\mathrm{II} & 0 & -8 & -8 & 0 \\
 & 0 & 13 & 13 & 0 \\
\hline
\mathrm{III} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$\cdot(-2)$, $\cdot 3$; $\cdot 13$, $\cdot 8$

Lösungsmenge: sei $z = t \in \mathbb{R}$

$y = -t$

$x = 4t - 2t = 2t$

$\mathbb{L} = \{(2t; -t; t) : t \in \mathbb{R}\}$ $\quad 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\vec{b} = 2\vec{a} + \vec{c}$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ l.u.

$\Updownarrow$

$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 0 & -4\\-3 & 1 & 7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\0 & -8 & 8\\0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \text{l.a.}$$

Aufgabe 1

Gegeben sind die Vektoren

liegen in xz-Ebene = komplanar

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ und b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

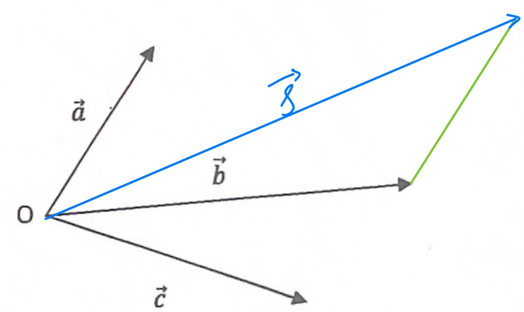
Sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar? a) ja b) nein

Sie können auch ohne zu rechnen eine geometrische Erklärung geben.

Aufgabe 2

Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ und

$\vec{d} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$.

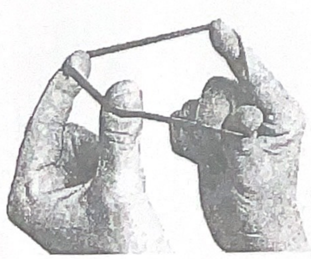


Aufgabe 3

Wären $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar, dann könnte man $\vec{c}$ als LK aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ darstellen, d.h. $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$. Die Gleichung $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$ (homogenes LGS) hätte dann keine eindeutige Lösung. Wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im Raum sind, dann ist die Determinante von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gleich Null.

a) Untersuchen Sie damit, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ komplanar sind.

b) Was gilt, wenn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ ist?



Aufgabe 4

Hält man ein Gummiband, wie im nebenstehenden Bild, so entsteht ein Viereck im Raum, also ein Viereck, dessen Ecken nicht in einer Ebene liegen müssen. Beweisen Sie, dass die Seitenmittelpunkte dieses Vierecks ein Parallelogramm bilden.

07.11.24

$$f : \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \longrightarrow \{b_3, b_4, b_2, b_1\}$$

$f(a_2) = b_4$ $\qquad$ $f(f^{-1}(b_4)) = f(a_2) = b_4$

$f^{-1}(b_4) = a_2$ $\qquad$ $f^{-1}(f(a_2)) = f^{-1}(b_4) = a_2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

$f : \mathbb{R}^{-} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(-5) = (-5)^2 = 25$

$f^{-1} : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{-}$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ $\qquad$ $f^{-1}(25) = -\sqrt{25} = 5$

$y = x^2$

$\Longleftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = -x$

$\Longleftrightarrow -\sqrt{y} = x$

$f^{-1}(y) = x$

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \to y = f(x) = x^2$

$A = \{\text{Vater}, \text{Mutter}, \text{Sohn}, \text{Tochter}\} = \{1948, 1976, 1950, 1978\}$

I	V 48	M 50	S 76	T 78	in	su	bi
II	V 48	M 50	S 75	T 78	in	su	bi
III	V 48	M 50	S 78	T 78	in	su	bi

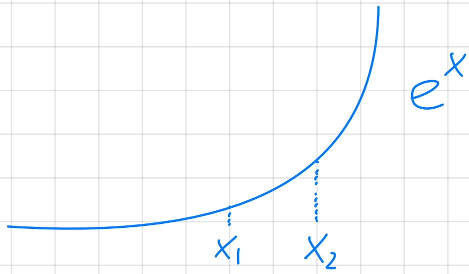
$$f: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

n	$f(n)$
0	0
1	-1
2	1
3	-2
4	2
5	-3
6	3
7	-4

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -2\cdot z - 1 & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

f (streng) monoton steigend

$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$



$f(x_1) \leq f(x_2)$ streng steigend

„echtes"

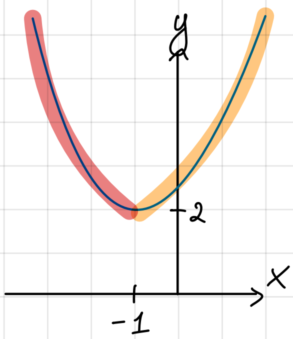
f (streng) monoton fallend

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

f injektiv $\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Satz:
Jede streng monotone Funktion ist injektiv.

$f(x) = x^2 + 2x + 3$



$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 3 - 1 = (x+1)^2 + 2 \qquad S(-1; 2)$

$f: [-1; \infty[\longrightarrow [2; \infty[, \; f(x) = x^2 + 2x + 3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} - 1$

$f:]-\infty; -1] \longrightarrow [2; \infty[, \; f(x) = x^2 + 2x + 3 \qquad f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2} - 1$

$$y = x^2 + 2x + 3$$
$$y = (x+1)^2 + 2$$
$$y - 2 = (x+1)^2$$
$$\sqrt{y-2} = |x+1| \qquad x \leqslant 1$$
$$-1 - x = \sqrt{y-2}$$
$$x = -1 - \sqrt{y-2}$$

11.11.2024

$$f(x) = -1 - \frac{1}{|x-1|}, \quad x \neq 1$$

a) Injektivität

$$1 < x_1 < x_2 \implies x_1 - 1 < x_2 - 1$$
$$\implies |x_1 - 1| < |x_2 - 1|$$
$$\implies \frac{1}{|x_1-1|} > \frac{1}{|x_2-1|}$$
$$\implies -\frac{1}{|x_1-1|} < \frac{1}{|x_2-1|}$$
$$\implies -1 - \frac{1}{|x_1-1|} < -1 - \frac{1}{|x_2-1|}$$

f ist streng monoton steigen im $]1;\infty[$, also ist f in $]1;\infty[$ injektiv.

b) Surjektivität in $]-\infty;-1[$

$x > 1$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow |x-1| > 0 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{|x-1|} < 0 \Rightarrow -1 - \frac{1}{|x-1|} < -1$$

$$y = -1 - \frac{1}{|x-1|} = f(x)$$

$$\implies \frac{1}{x-1} = -1 - y$$

$$x - 1 = -\frac{1}{y+1}$$

$$x = -\frac{\cancel{y}\,1}{y+1} + 1 = \frac{y+1-1}{y+1} = \frac{y}{y+1}$$

Also f ist surjektiv in $]-\infty;-1[$.

f ist bijektiv.

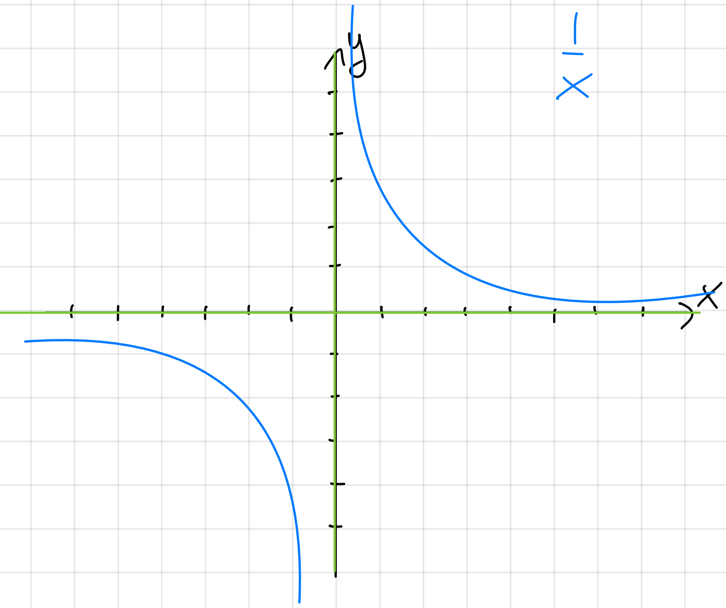
$f:]1;\infty[\to]-\infty;-1[$, $f(x) = -1 - \frac{1}{x-1}$

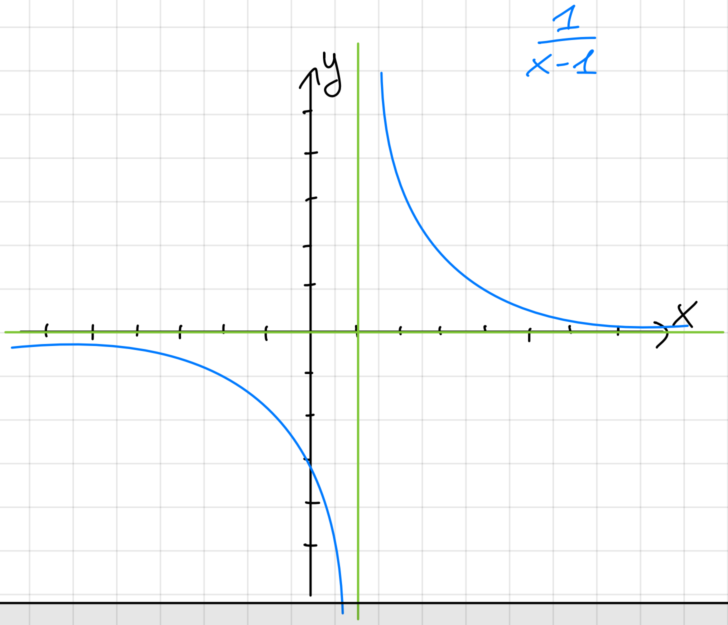
$f^{-1}:]-\infty;-1[\to]1;\infty[$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$

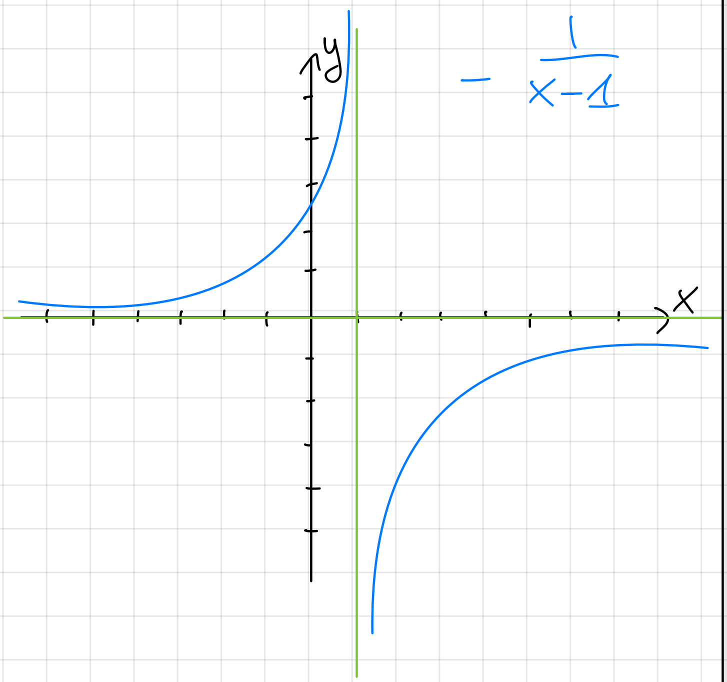
verkettet

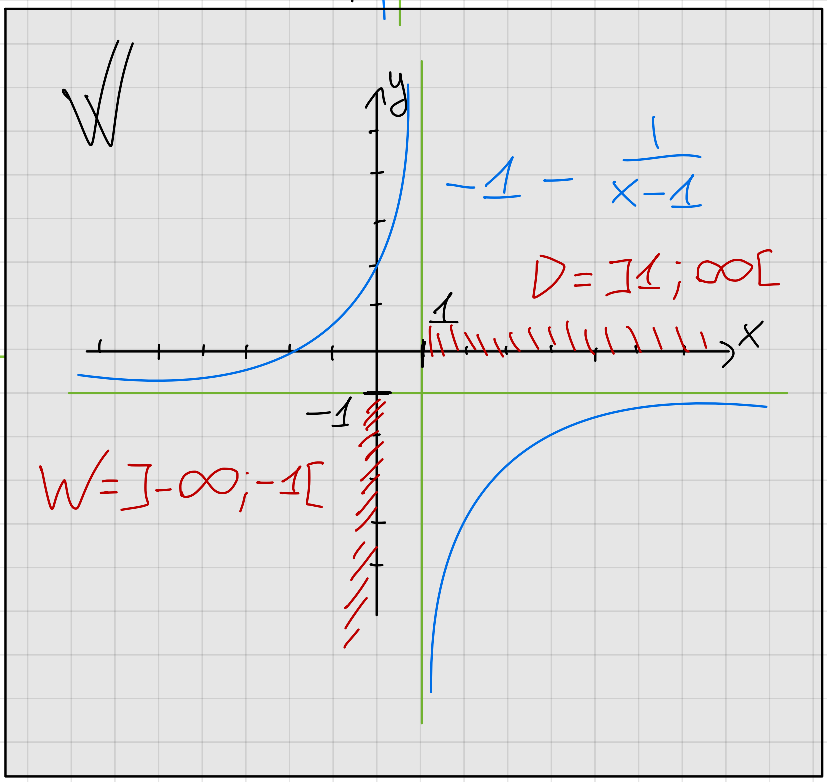
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$

$f(x) = -1 - \frac{1}{x-1}$

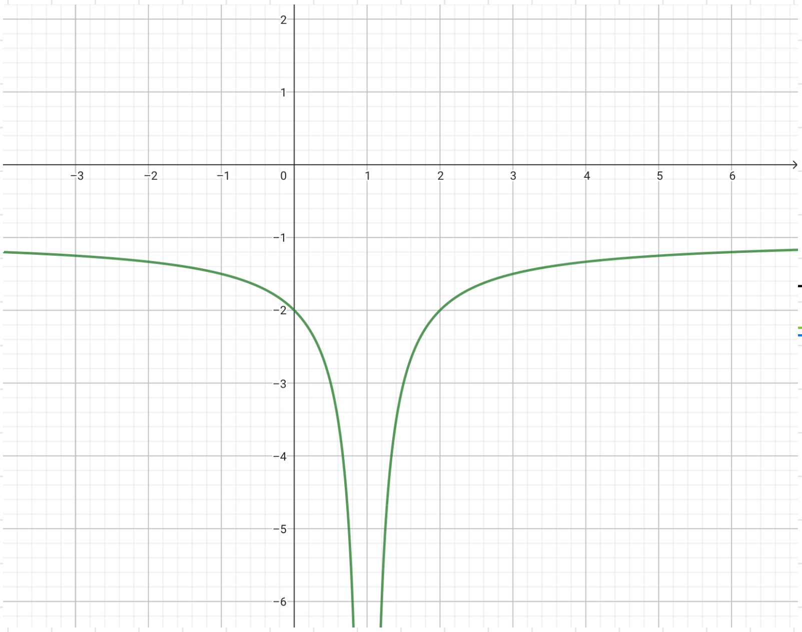


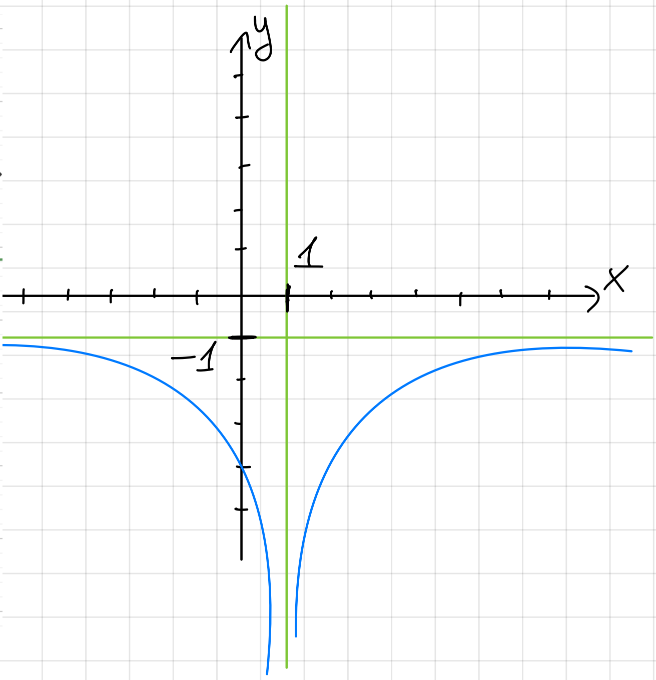






Gesamtfunktion





HA

Hausaufgaben- und Übungsblatt

Thema: Umkehrbarkeit von Funktionen und Graphen

1. Berechnung von Umkehrfunktionen:

Bilden Sie zu folgenden Zuordnungsvorschriften die Umkehrfunktionen, falls notwendig für Teilabschnitte des Definitionsbereiches. Geben Sie auch jeweils den Definitions- und Wertebereich mit an:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$, b) $g(x) = x^2 - 4x + 4$, c) $h(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$.

2. Graphen:

Gegeben sind die folgenden Graphen

$$G_1 := \Big\{ (x|y) \in [-1,1] \times [-1,1] : |x| + |y| = 1 \Big\}, \qquad G_2 := \Big\{ (x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = |x^2 - 1| + 1 \Big\}$$

Skizzieren Sie die Graphen G_1 und G_2. Wird durch die definierende Gleichung eine Funktion oder eine Relation beschrieben?

3. Eine parameterabhängige Aufgabe:

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ auf dem Definitionsbereich $D_f = [a, 4]$ umkehrbar ist. Wie lautet dort die Umkehrfunktion?

4. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) f, g injektiv $\Rightarrow f + g$ injektiv

b) f, g injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv

Bemerkung: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ heißt Verkettung von f mit g. Beachten Sie, dass $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

Sind die Funktionen gegebenenfalls auch surjektiv, und damit umkehrbar? Falls ja, wie sieht die Umkehrfunktion aus?

5. Zum Begriff bijektiv:

Welche der folgenden Abbildungen ist bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Jedem Studierenden am Studienkolleg Bochum wird sein Nachname zugeordnet.

b) Jedem Buch wird seine ISB-Nummer zugeordnet, z.B.: *Lothar Papula*, Mathematik für Ingenieure (Bd. 1), Vieweg-Verlag 1983 (5. Auflage 1990), ISBN 3-528-44236-0.

c) Es sei A := Menge aller Vereine in Bochum und B := Menge aller Menschen.

$$f : A \to B, \quad f(x) = \text{Vorsitzende:r von } x$$

12.11.24

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3 + 1$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$

$\Rightarrow (x_1-2)^3 < (x_2-2)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1-2) + 1 < \frac{1}{2}(x_2-2)$

injektiv

Sei $y \in \mathbb{R} : \frac{1}{2}(x-2)^3 + 1$

$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x-2)^3$

$\Rightarrow 2y - 2 = (x-2)^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2y-2} = x - 2$

$\Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{2y-2}$

surjektiv

also f ist bijektiv, d.h. umkehrbar

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3 + 1$

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} - 2$

1. Angenommen innerhalb von 4 Stunden werden jeweils 25% eines Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden. Die wirksame Anfangsdosis beträgt 100 mg und wird alle 4 Stunden erneut gegeben.

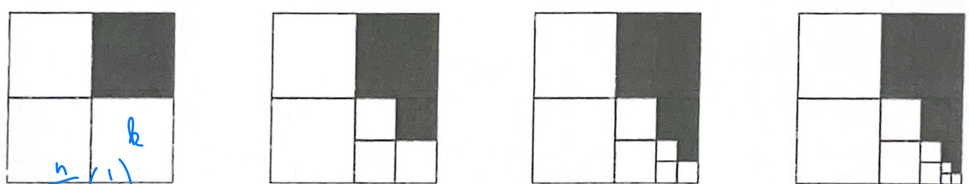
a) Wir bezeichnen die Medikamentenhöhe (in mg) nach $t = 4 \cdot n$ Stunden mit d_n. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Medikamentenhöhe nach 4,8,12,16 und 20 Stunden.

b) Wie hoch ist der Medikamentenhöhe (in mg) nach 2 Tagen?

c) Wie entwickelt sich der Medikamentenspiegel bzw. berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} d_n$.

---

2. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 wird geviertelt und das obere rechte Viertel wird abgeschnitten. Das Teilquadrat unten links wird wieder geviertelt und wieder wird das obere rechte Viertel abgeschnitten. Dieser Vorgang wird iterativ fortgesetzt und durch die Folge der Grafiken veranschaulicht:



$f_n(n) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$

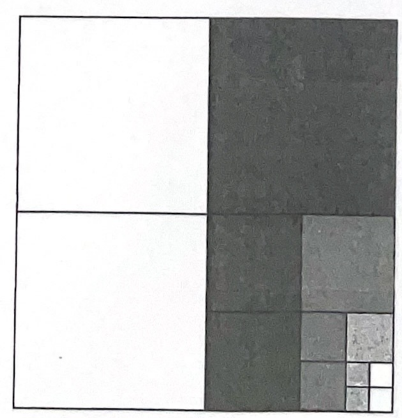
$f_{n+1} = f_n(1 - f_n)$

a) Beschreiben Sie formelmäßig die Summen jener Flächeninhalte (f_n), die nach n Schritten abgeschnitten wurden.

b) Berechnen Sie diese Inhalte mit dem Taschenrechner. Die Zahlenwerte zeigen, dass die Inhalte ständig zunehmen. Auf welchen Wert steuern sie zu?

c) Die Inhalte lassen sich als Differenz schreiben. Finden Sie eine Formel. Begründen Sie damit, dass $g = \frac{1}{3}$ Grenzwert der Folge (f_n) ist.

d) Die abgeschnittenen Flächen stehen mit der Restfläche in Beziehung. Stellen Sie diese Beziehung formelmäßig dar, und bestimmen Sie so erneut den Grenzwert.



18.11.2024

zu Beginn : $n=0$: $d_0 = 100$

nach 4 Std. : $n=1$: $d_1 = 100 + \frac{3}{4} d_0 = 175$

nach 8 Std. : $n=2$: $d_2 = 100 + \frac{3}{4} d_1 = 231{,}25$

nach 12 Std. : $n=3$: $d_3 = 100 + \frac{3}{4} d_2 = 273{,}4375$

nach 16 Std. : $n=4$: $d_4 = \quad 305{,}078$

nach 20 Std. : $n=5$: $d_5 = \quad 328{,}808$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 400$$

$$d_{12} = 100 + \frac{3}{4} d_{11} \approx 390{,}5$$

rekursives Bildungsgesetz

$$d_{n+1} = 100 + \frac{3}{4} d_n \quad , \quad d_0 = 100$$

$$g = 100 + \frac{3}{4} \cdot g$$

$$g - \frac{3}{4} g = 100$$

$$\frac{1}{4} g = 100$$

$$g = 400$$

$$d_1 = 100 + \frac{3}{4} \cdot 100 = 100\left(1 + \frac{3}{4}\right)$$

$$d_2 = 100 + \frac{3}{4} d_1 = 100 + \frac{3}{4} \cdot 100\left(1 + \frac{3}{4}\right) = 100\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$d_3 = 100 + \frac{3}{4} d_2$$

$$d_n = 100 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 100 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = d_n$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad , \quad q \neq 1}$$

Summe

$\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$: $\frac{3}{4}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

$\frac{3}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{81}{256}$

$0{,}75$, $0{,}56$, $0{,}42$, $0{,}31$ $\longrightarrow 0$

„konvergiert gegen Null"

$$100 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} , \quad 100 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 100 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 400$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1 \longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1}$$

Reihe

$$|q|<1 \iff -1<q<1$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

19.11.24

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

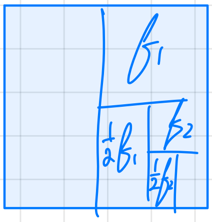
$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad , \quad |q|<1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \underbrace{-1}_{-q^0}\underbrace{-q}_{-q^1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3} = 3 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$



$$S_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4}$$

$$S_2 = \frac{5}{16} = \frac{1}{3} - \frac{1}{48} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^2}$$

$$S_3 = \frac{21}{64} = \frac{1}{3} - \frac{1}{192} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^3}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^n}} \qquad \boxed{S_n = S_{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

explizites Bildungsgesetz

rekursives BG

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\cdot 4^n} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$f_1 + \frac{1}{2}f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_2 \ldots \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}(f_1 + f_2 + \ldots) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots \longrightarrow \frac{1}{3}$$

20.11.24

Fachsprache und Übungen zur Vektorraumtheorie

Sei V ein Vektorraum und $M := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Teilmenge von V.

Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen (LK) von M die **lineare Hülle** oder der **Spann**.

$$[M] := \mathrm{spann(M)} := \left\{ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{r_k} \cdot \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{k} \quad \middle| \quad \mathrm{r_k} \in \mathbb{R}, \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{k} \in \mathrm{M} \right\} = V$$

Wenn die lineare Hülle von M den gesamten Vektorraum V ergibt, d.h. $[M] = V$, dann heißt M ein **Erzeugendensystem** (ES) des Vektorraumes V.

Beispiel: Die Menge M

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bildet ein Erzeugendensystem für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

die Basis

Besteht das Erzeugendensystem nur aus **linear unabhängigen** Vektoren, dann heißt es eine **Basis**. Ein Vektorraum kann verschiedene, ja sogar unendlich viele, Basen haben.

Beispiel: Die Vektoren in B_1 und B_2 mit

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sind jeweils linear unabhängig. Also sind sowohl B_1 als auch B_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Zur Erinnerung: Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn der Nullvektor $\vec{0}$ nur auf triviale Art darstellbar ist, d.h. alle Skalare haben den Wert Null.

$$\sum_{k=0}^{n} r_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad r_k = 0$$

Die Anzahl der Basisvektoren heißt **Dimension** des Vektorraumes.

Ein Vektorraum U, der eine echte Teilmenge des Vektorraums V ist, heißt Untervektorraum (UVR).
$\subseteq$

1. Basis in $\mathbb{R}^2$

Bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^2$? ja nein

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie Ihr Ergebnis auch unter Verwendung der obigen Fachbegriffe.

2. Basis und Dimension von UVR in $\mathbb{R}^3$

Bestimmen Sie eine Basis und ~~eine~~ die Dimension der folgenden Vektorräume

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \middle| \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \middle| \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underbrace{V}_{\text{Lineare Hülle}} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}}_{V \text{ Unterwektorraum von } \mathbb{R}^2} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \text{nicht eindeutig}$$

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$A \subset B$ Teilmenge

$A \subseteq B$ Teilmenge oder B

$A \subsetneq B$ Teilmenge nicht gleich B

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Erzeugendensystem (ES)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Basis

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = V$$ Basis = linear unabhängiges ES

$$\mathbb{R}^3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}}_{V} \overset{\text{echte Teilmenge}}{\subsetneq} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \\ \tau \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\} = V$$

l.u., da es nur ein Vektor gibt

Aufgabe 1 Basis von $\mathbb{R}^2$

a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ sind l.u. und die Dimension von $\mathbb{R}^2$ ist 2.

$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ sind Basis von $\mathbb{R}^2$

b) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-15\\-20\end{pmatrix}$ sind l.a. $\begin{pmatrix}-15\\-20\end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Teil von $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

$$1 = r \qquad\qquad r = 1$$

$$5 = 3r + 4s \qquad\qquad s = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

$V := \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\\b\end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ l.u.

$\dim V = 2$

$W := \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ l.u

$\dim W = 1$

$\begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin W \Rightarrow$ kann nicht durch die Basis dargestellt werden

$\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \notin W$

3. Vektorraum der (2x2)-Matrizen

Die 2x2-Matrizen bilden einen Vektorraum, wobei die Summe und das skalare Produkt komponentenweise definiert sind.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}, \qquad r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a & r \cdot b \\ r \cdot c & r \cdot d \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie für

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Basis und die Dimension an.

b) Wir betrachten jetzt den Untervektorraum

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad a+b+c+d = 0 \right\}$$

Geben Sie zu N eine Basis und eine Dimension an.

Begründen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ ein Element von N ist. Stellen Sie die Matrix als LK der Basisvektoren dar.

4. Magische Quadrate

Eine quadratische Matrix heißt magisches Quadrat, wenn die Summen der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich sind. Die magischen (3x3)-Quadrate bilden einen Vektorraum der Dimension drei. Sie dürfen das ohne Nachweis benutzen, aber warum ist das eigentlich so?

Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis dieses Vektorraumes ist.

Prüfen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

ein magisches Quadrat ist und stellen Sie diese Matrix als LK dieser Basis dar.

5. Raum der Polynome

Die Raum der quadratischen Polynome wird mit Π_2 bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{P} := \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

eine Basis von Π_2 ist. Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^2 + 2x + 3$ bezüglich der Basis $\mathcal{P}$ dar. Geben Sie eine (einfachere) Basis und die Dimension an.

pk, 15. 11. 2024

$f: [1;4] \to [-4;5]$, $f(x) = (x-1)^2 - 4$

$f^{-1}: [-4;5] \to [1;4]$, $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$

4) Beweisen oder widerlegen Sie

a) f, g injektiv $\Rightarrow f+g$ injektiv

Seien $f(x) = -x$ und $g(x) = \sqrt{x}$.

$x_1 > x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$, weil $-x_1 < -x_2$

$g(x_1) > g(x_2)$, weil $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$

Also $f(x) = -x$ und $g(x) = \sqrt{x}$ sind beide injektiv.

Sei $h(x) = -x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = f(x) + g(x)$

$h(x)$ hat zwei Nullpunkten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$h(0) = -0 + \sqrt{0} = 0$

$h(1) = \sqrt{1}(1-\sqrt{1}) = 0$

$h(x_1) = h(x_2)$

$f(x_1) + g(x_1) = f(x_2) + g(x_2)$

D.h., dass es solche x_1 und x_2 gibt, sodass $h(x_1) = h(x_2)$, was dem Prinzip der Injektivität widerspricht.

f, g injektiv $\not\Rightarrow f+g$ injektiv

$\sqrt{x}$ und $-x+\sqrt{x}$ sind nicht surjektiv:

$x = 4$

$-4 + \sqrt{4} = -2$

$\sqrt{x} \neq -2$

Artem Hozhulenko Kurs A Mathe

1) Berechnung von Umkehrfunktion

a) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ $\quad y = f(x)$ $\quad f^{-1}(x) = 4x - 8$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad W = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

$y = \frac{1}{4}x + 2 \quad | -2; \cdot 4$

$\Leftrightarrow x = 4y - 8$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $\quad y = g(x)$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad W = \{y \mid y \in \mathbb{R}_0^+\}$

Sei $x \geq 2$, dann:

$y = (x-2)^2 \quad | \sqrt{\ }; +2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y} + 2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \; g(x) = (x-2)^2$

$g^{-1}: [2; \infty[\to [2; \infty[,$

$g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}$

Sei $x < 2$, dann:

$y = (x-2)^2 \quad | \sqrt{\ }; +2$

$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y}$

$g^{-1}:]-\infty; 2[\to]-\infty; 2[,$

$g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

c) $h(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$ $\quad y = h(x)$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ $\quad W = \{y \mid y \in]-\infty; 1[\}$

Sei $x < -1$

$y = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{-(x+1)} = \sqrt{1-y}$

$\Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{\frac{3}{1-y}}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{3}{1-y}}$

Sei $x > -1$

$y = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

$\frac{\sqrt{3}}{x+1} = \sqrt{1-y}$

$x + 1 = \sqrt{\frac{3}{1-y}}$

$x = \sqrt{\frac{3}{1-y}} - 1$

$h: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to]-\infty;1[,\ h(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

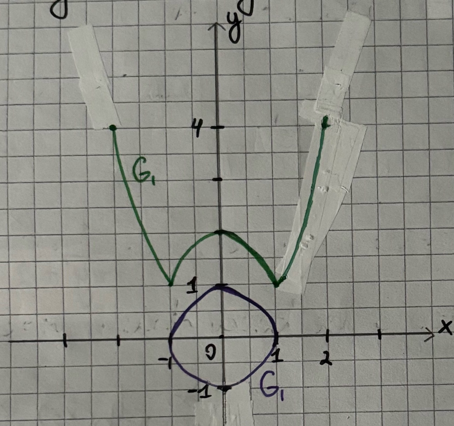
$h^{-1}:]-\infty;1[\to]-\infty;1[,\ h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\frac{3}{1-x}}$

$h^{-1}:]-\infty;1[\to]-1;\infty[,\ h^{-1}(x) = -1 + \sqrt{\frac{3}{1-x}}$

2) Graphen

$G_1 = \{(x|y) \in [-1;1]\times[-1;1] : |x|+|y| = 1\}$

$G_2 = \{(x|y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = |x^2-1|+1\}$



G_1 ist eine Funktion.
G_2 ist eine Relation.

3) Eine parameterabhängige Aufgabe

$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad D_f = [a;4]$

$y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$

$x - 1 \geq 0 \qquad y = (x-1)^2 - 4$

$x \geq 1 \qquad \sqrt{y+4} = x - 1$

$\Downarrow \qquad x = 1 + \sqrt{y+4}$

$a \geq 1$

$\Downarrow$

$a = 1$

Artem Horhulenko Kurs A Mathe

1) Berechnung von Umkehrfunktion

a) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ $\quad y = f(x) \quad f^{-1}(x) = 4x - 8$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \quad W = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

$y = \frac{1}{4}x + 2 \quad | -2 ; \cdot 4$

$\Leftrightarrow x = 4y - 8$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \quad y = g(x)$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \quad W = \{y \mid y \in \mathbb{R}_0^+\}$

Sei $x \geq 2$, dann:

$y = (x-2)^2 \quad | \sqrt{} ; +2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y} + 2$

Sei $x < 2$, dann:

$y = (x-2)^2 \quad | \sqrt{} ; +2$

$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ , \; g(x) = (x-2)^2$

$g^{-1} : [2; \infty[\to [2; \infty[,$

$g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}$

$g^{-1} :]-\infty; 2[\to]-\infty; 2[,$

$g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

c) $h(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2} \quad y = h(x)$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} \quad W = \{y \mid y \in]-\infty; 1[\}$

Sei $x < -1$

$y = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{(x+1)} = \sqrt{1-y}$

$\Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{\frac{3}{1-y}}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{3}{1-y}}$

Sei $x > -1$

$y = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

$\frac{\sqrt{3}}{x+1} = \sqrt{1-y}$

$x + 1 = \sqrt{\frac{3}{1-y}}$

$x = \sqrt{\frac{3}{1-y}} - 1$

$A - ?$
$R = 8{,}3144621$
$t = 273{,}15$
$e = 2{,}718281828$
$M - ?$

Hausaufgaben- und Übungsblatt

Thema: Umkehrbarkeit von Funktionen und Graphen

1. Berechnung von Umkehrfunktionen:

Bilden Sie zu folgenden Zuordnungsvorschriften die Umkehrfunktionen, falls notwendig für Teilabschnitte des Definitionsbereiches. Geben Sie auch jeweils den Definitions- und Wertebereich mit an:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2,$ b) $g(x) = x^2 - 4x + 4,$ c) $h(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}.$

2. Graphen:

Gegeben sind die folgenden Graphen

$$G_1 := \Big\{ \, (x|y) \in [-1,1] \times [-1,1] : |x| + |y| = 1 \, \Big\}, \qquad G_2 := \Big\{ \, (x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = |x^2 - 1| + 1 \, \Big\}$$

Skizzieren Sie die Graphen G_1 und G_2. Wird durch die definierende Gleichung eine Funktion oder eine Relation beschrieben?

3. Eine parameterabhängige Aufgabe:

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ auf dem Definitionsbereich $D_f = [a, 4]$ umkehrbar ist. Wie lautet dort die Umkehrfunktion?

4. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) f, g injektiv $\Rightarrow f + g$ injektiv

b) f, g injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv

Bemerkung: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ heißt Verkettung von f mit g. Beachten Sie, dass $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

Sind die Funktionen gegebenenfalls auch surjektiv, und damit umkehrbar? Falls ja, wie sieht die Umkehrfunktion aus?

5. Zum Begriff bijektiv:

Welche der folgenden Abbildungen ist bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Jedem Studierenden am Studienkolleg Bochum wird sein Nachname zugeordnet.

b) Jedem Buch wird seine ISB-Nummer zugeordnet, z.B.: *Lothar Papula*, Mathematik für Ingenieure (Bd. 1), Vieweg-Verlag 1983 (5. Auflage 1990), ISBN 3-528-44236-0.

c) Es sei A := Menge aller Vereine in Bochum und B := Menge aller Menschen.

$$f : A \to B, \quad f(x) = \text{Vorsitzende:r von } x$$

21.11.24

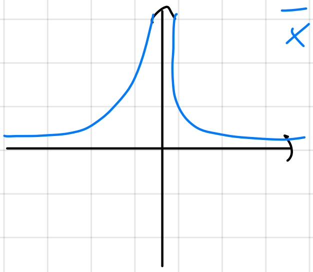
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}x + 2$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = 4x - 8$

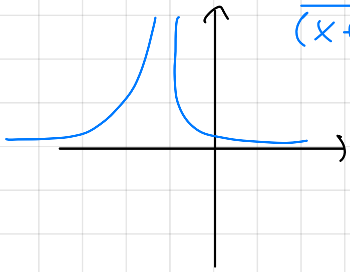
DAX i1 = 505

$f(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

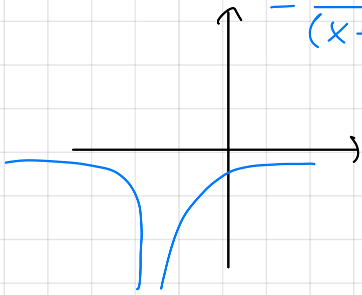
$\frac{1}{x}$



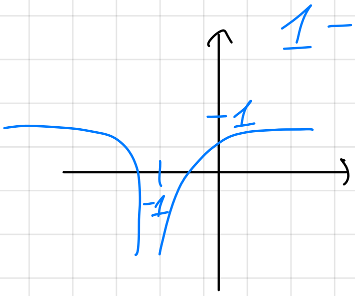
$\frac{3}{(x+1)^2}$



$-\frac{3}{(x+1)^2}$



$1 - \frac{3}{(x+1)^2}$



25.11.24

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$a \cdot b = b \cdot a$ kommutativ

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ assoziativ

$a(b+c) = (a+b)c$ distrubutiv

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ Folge (geometrisch)

$2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$

$1 - 0{,}5 \cdot 8 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \frac{1}{8} = a_8$

Welche Wert hat a_8

$a_{n+1} = q \cdot a_n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

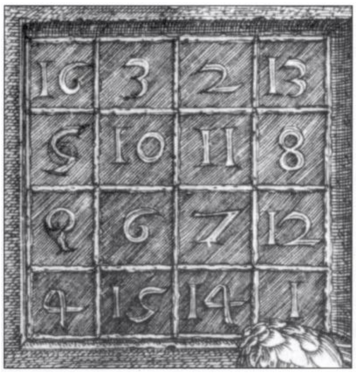
$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ geometrische Folge $\boxed{a_n = q^n \cdot a_0}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_7 = a_8$

$a_7 = a_6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $a_8 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot a^6$

$$a_8 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 \cdot 2 = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}$$

A. Dürers magisches 4x4-Quadrat.



Das Quadrat von Albrecht Dürer ist wohl das berühmteste aller magischen Quadrate. Der Grund dürfte darin liegen, dass sich das 4x4-Quadrat auf Dürers äußerst geheimnisvollen Kupferstich Melencolia I aus dem Jahr 1514 befindet. Dieses Bild gibt der Forschung bis heute Rätsel auf.

Interessant ist die letzte Zeile. In der Mitte steht 15 und 14, das Jahr, in dem der Kupferstich entstanden ist, sowie 4 und 1, also im Alphabet die Buchstaben D und A.

Albrecht Dürer der Jüngere (21. Mai 1471 – 6. April 1528; Nürnberg) war ein deutscher Maler, Grafiker, Mathematiker und Kunsttheoretiker. Er zählt zu den herausragenden Vertretern der Renaissance.

Wie in jedem magischen Quadrat ergeben die Summen der Zeilen, Spalten und der Diagonalen den gleichen Wert. Diese sogenannte magische Zahl ist 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Aber die magische Zahl 34 taucht in insgesamt 86 weiteren Kombinationen auf. Einige sind hier dargestellt:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

pk, 15. 11. 2024

Fachsprache und Übungen zur Vektorraumtheorie

Sei V ein Vektorraum und $M := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ eine Teilmenge von V.

Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen (LK) von M die **lineare Hülle** oder der **Spann**.

$$[M] := \mathrm{spann(M)} := \left\{ \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_k} \cdot \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{k} \quad | \quad \mathrm{r_k} \in \mathbb{R}, \tilde{\mathrm{v}}_\mathrm{k} \in \mathrm{M} \right\}$$

Wenn die lineare Hülle von M den gesamten Vektorraum V ergibt, d.h. $[M] = V$, dann heißt M ein **Erzeugendensystem** (ES) des Vektorraumes V.

Beispiel: Die Menge M

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bildet ein Erzeugendensystem für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Besteht das Erzeugendensystem nur aus **linear unabhängigen** Vektoren, dann heißt es eine **Basis**. Ein Vektorraum kann verschiedene, ja sogar unendlich viele, Basen haben.

Beispiel: Die Vektoren in B_1 und B_2 mit

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sind jeweils linear unabhängig. Also sind sowohl B_1 als auch B_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

lernen

Zur Erinnerung: Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn der Nullvektor $\vec{0}$ nur auf triviale Art darstellbar ist, d.h. alle Skalare haben den Wert Null.

Nullvektor

$$\text{Linearkombination} \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} r_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \; ! \quad \Longrightarrow \quad r_k = 0$$

Die Anzahl der Basisvektoren heißt **Dimension** des Vektorraumes.

Ein Vektorraum U, der eine echte Teilmenge des Vektorraums V ist, heißt Untervektorraum (UVR).

1. Basis in $\mathbb{R}^2$

Bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie Ihr Ergebnis auch unter Verwendung der obigen Fachbegriffe.

2. Basis und Dimension von UVR in $\mathbb{R}^3$

Bestimmen Sie eine Basis und eine Dimension der folgenden Vektorräume

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \quad | \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad | \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Vektorraum der (2x2)-Matrizen

Die 2x2-Matrizen bilden einen Vektorraum, wobei die Summe und das skalare Produkt komponentenweise definiert sind.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}, \qquad r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a & r \cdot b \\ r \cdot c & r \cdot d \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie für

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Basis und die Dimension an.

b) Wir betrachten jetzt den Untervektorraum

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad a + b + c + d = 0 \right\}$$

Geben Sie zu N eine Basis und eine Dimension an.

Begründen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ ein Element von N ist. Stellen Sie die Matrix als LK der Basisvektoren dar.

4. Magische Quadrate

Eine quadratische Matrix heißt magisches Quadrat, wenn die Summen der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich sind. Die magischen (3x3)-Quadrate bilden einen Vektorraum der Dimension drei. Sie dürfen das ohne Nachweis benutzen, aber warum ist das eigentlich so?

Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis dieses Vektorraumes ist.

Prüfen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

ein magisches Quadrat ist und stellen Sie diese Matrix als LK dieser Basis dar.

5. Raum der Polynome

Die Raum der quadratischen Polynome wird mit Π_2 bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{P} := \left\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\right\}$$

eine Basis von Π_2 ist. Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^2 + 2x + 3$ bezüglich der Basis $\mathcal{P}$ dar. Geben Sie eine (einfachere) Basis und die Dimension an.

pk, 15. 11. 2024

$\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right] = \text{spann}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}}_{=:U} \subseteq \mathbb{R}^2$ 27.11.24

lineare Hülle [ ]

$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ l.a. $\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ linear abhängig

$\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$ – Basis

$\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = U$ $\dim U = 1$ ES von U: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$

l.u., weil es nur ein Vektor erhält

$M = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 3 - 2 - 12 - 9$

$18 + 4 + 1 - 21$

$22 - 20 = 2$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\\0 & 2 & 8\end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 8\end{vmatrix} = 8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ l.u.

$r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l|}
r + s + t = 3\\
r + 2s + 4t = 4\\
r + 3s + 9t = 5\\
\hline
\end{array}$$

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ l.a. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

4 Vektoren in $\mathbb{R}^3$ $\quad 4 > 3 \Rightarrow M$ ist keine Basis

$M' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ l.a.

$-8 + 16 - 8 = 0 \Rightarrow$ l.a.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} \cdot (-4) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -16 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -16 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \text{l.a.}$$

$M'' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ l.u. $\quad [M''] \subsetneq \mathbb{R}^3 \quad \dim [M''] = 2$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\} = \qquad z = x + y$$

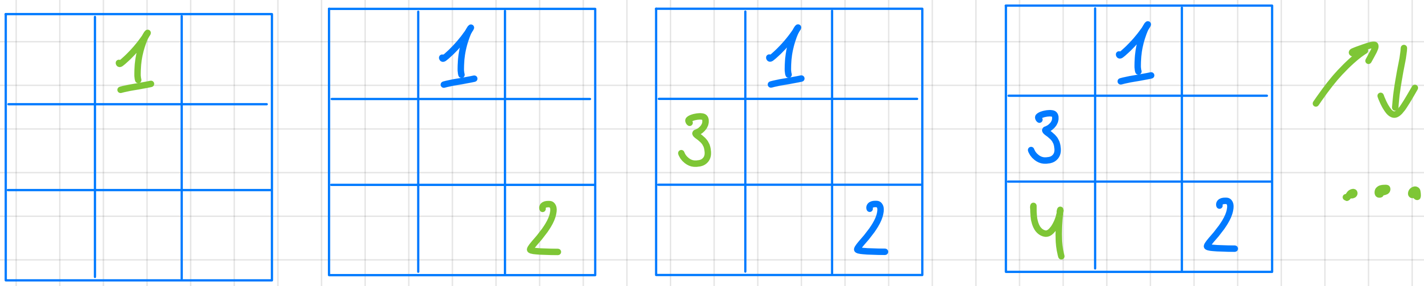
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$ Erzeugenden System von U
Basis von U

$\subset$ Teilmenge
$\subseteq$ Teilmenge oder gleich (echte Teilmenge)
$\subsetneq$ Teilmenge und nicht gleich

$\dim U = 2$ Unterwektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$
$\dim \mathbb{R}^3 = 3$



8	1	6
3	5	7
4	9	2

!

Kommt in der Klausur vor

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

M enthält magische Quadrate

$\dim[M] = 3$

$$z_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2z_1 + z_2 & 2z_3 & z_1 + 2z_2 + 2z_3 \\ 2z_2 + 2z_3 & z_1 + z_2 + z_3 & 2z_1 \\ z_1 + z_3 & 2z_1 + 2z_2 & z_2 + 2z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2z_3 = 0$

$z_3 = 0$

$2z_1 = 0$

$z_1 = 0$

$2 \cdot 0 + 2z_2 = 0$

$z_2 = 0$

$z_1 = z_2 = z_3 = 0 \Rightarrow$ linear unabhängig

HA

8	1	6
3	5	7
4	9	2

als LK darstellen

$M_1M_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

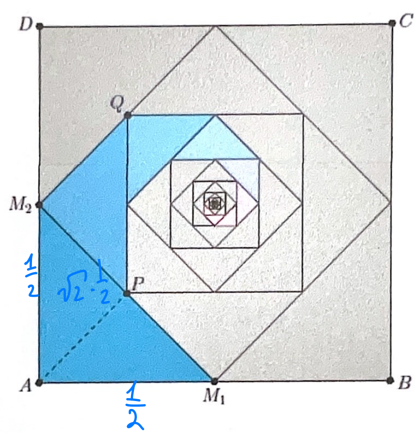
$M_2P = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}$

$QP = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = q$

Übung zu geometrischen Folgen / Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$



$$4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) =$$
$$= 4$$

Bild des Schweizer Künstlers Eugen Jost, geboren 1950

a) Berechnen Sie die Summen der Flächeninhalte / Umfänge aller Quadrate, wenn das größte Quadrat die Seitenlänge 1 hat.

b) Wie viele Quadrate müssen wir summieren, damit die Summe der Umfänge mindestens 10 ergibt?

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 8 + 4\sqrt{2} = 13{,}66$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = 4 \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = 10$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{1}$$

$$n = -2\log_2(5\sqrt{2}-6) + 3 \approx 2{,}8$$

$$n = 3$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Übungen zu geometrischen Reihen / Folgen

$b_0 = \frac{162}{q^4} = 2$

$q = 3$

$b_n = b_0 \cdot q^n$

$3^n = \frac{258280326}{6}$

$n = 17$

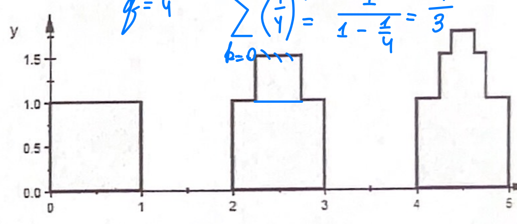
1. Verwandeln Sie unter Verwendung der geometrischen Reihe $0.\overline{09}$ in eine rationale Zahl.

2. Bei einer geometrischen Folge ist $b_4 = 162$ und $b_7 = 4.374$. Das wievielte Folgeglied ist $b_n = 258.280.326$?

3. Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 1. Es wächst in jedem Schritt um ein weiteres Quadrat, wobei die gemeinsame Begrenzungslinie entfernt wird. Der Flächeninhalt f_n und der Umfang u_n lassen sich als geometrische Summe darstellen. Berechnen Sie jeweils den Wert für $n \to \infty$.

1 0,5 0,25 0,125

$q = \frac{1}{4}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$



$u_0 = 4$

$u_1 = 4+1$

$u_2 = 4+1+\frac{1}{2}$

$u_3 = 4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$u_n = 4 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 4+2 = 6$

4. Berechnen Sie die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 8^k}{16^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{7} + 2 =$$

$$= 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $1 + (x^2 - 1) + (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^3 + \cdots$? $=$

$\updownarrow$

divergieren

falls $|x^2 - 1| < 1$ $\quad = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2-1)^k = \frac{1}{1-(x^2-1)} = \frac{1}{2-x^2} = f(x)$

$-1 < x^2 - 1 < 1$

$0 < x^2 < 2$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Geometrische Folge

$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Geometrische Summe

$\sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, falls $q \neq 1$

Geometrische Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}$, falls $|q| < 1$

geometrisch 2, 4, 8, 16, 32 ...

arithmetisch 2, 4, 6, 8, 10 ...

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$x = 1 : e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$$

$$0{,}\overline{09} = 0{,}09 + 0{,}0009 + 0{,}000009$$

$$= \frac{9}{100} + \frac{9}{10\,000} + \frac{9}{1\,000\,000}$$

$$= 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right) = 9\left(\frac{100}{99} - \frac{99}{99}\right) = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k-2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^k}{\frac{1}{9} \cdot 3^k} = 18 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 18\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 18 \cdot 2 = 36$$

Konvergenz einer Fall

02.11.24

$a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \to 0, \; n \to \infty$ konvergent

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \to 0, \; n \to \infty$ konvergent

$a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ divergent

$a_n = n^2$: $1, 4, 9, 16, \ldots \to \infty$ divergent

(„streben gegen")

uneigentlich konvergent gegen unendlich (∞)

Definition 1: (math)

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt konvergent gegen den Grenzwert g : $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \; n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon$$

Für alle Epsilon positiv existiert eine reele Zahl n_0, sodass für $n > n_0$ gilt: die Folgeglieder a_n liegen in der e-Umgebung von g.

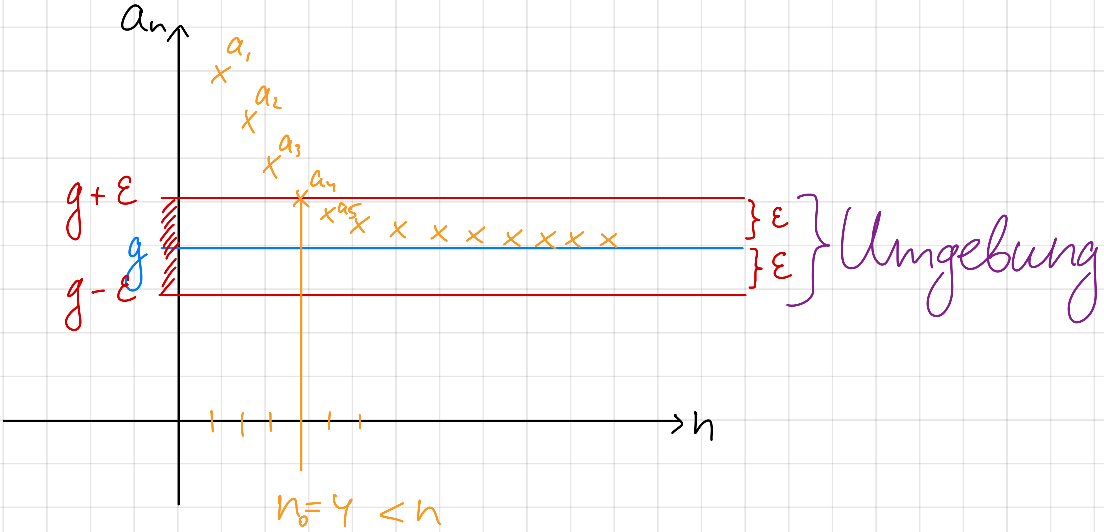
$$|a_n - g| < \varepsilon$$

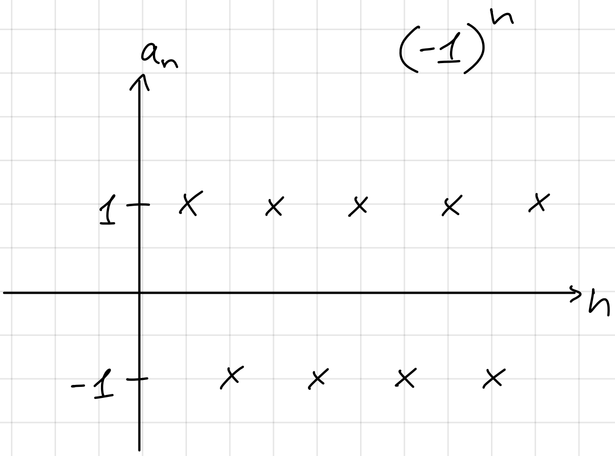
$$-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$$

$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

Umgebung

$$a_n \in \,]g-\varepsilon, g+\varepsilon[\, = U_\varepsilon(g)$$





fast alle, d.h. alle bis auf endlich viele (Ausnahmen)

fast alle mehr als Unendlich

$$\boxed{f.a. > \infty}$$

Definition 2: (sprach.)

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt konvergent gegen den Grenzwert g, genau dann, wenn $|a_n - g| < e$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$

$$|a_n - g| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n_0 := \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Q.E.D.

$\varepsilon = 0{,}25 = \frac{1}{4} > 0$

$n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = 4$

$n > 4$

$a_5 = \frac{1}{5} = 0{,}2 < 0{,}25 = \varepsilon$ ✓ (w)

$a_4 = \frac{1}{4} = 0{,}25 < 0{,}25$ (↯)

HILBERTS HOTEL

Ein Gedanken-Experiment:

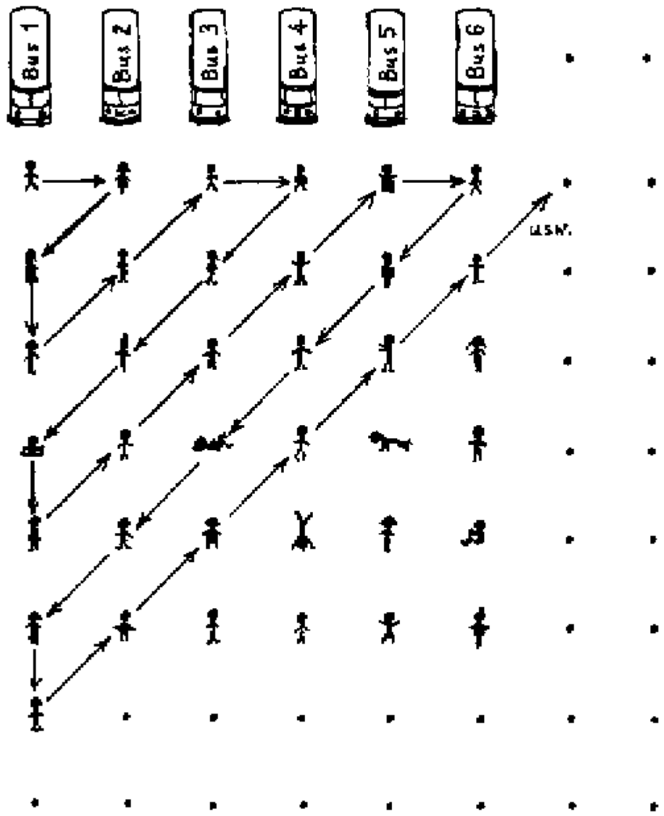
Dieses Hotel, einsam und landschaftlich reizvoll gelegen, besitzt unendlich viele Zimmer, genauer gesagt: *abzählbar unendlich* viele Zimmer. Sie sind mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... durchnumeriert. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß alle Zimmer Einzelzimmer sind, wie überhaupt in der ganzen Geschichte nur von Einzelzimmern die Rede ist.

Eines Abends ist das Hotel voll belegt. In jedem der genannten Zimmer wohnt genau ein Gast. Da kommt ein weiterer müder Wanderer daher und bittet um ein Zimmer. Der Portier weist ihn ab, da das Hotel ja voll belegt ist. Der Wanderer ist recht verzweifelt, es regnet draußen, und er ist zum Umfallen müde.
Gerade will er sich wegwenden, da kommt der Hoteldirektor gelaufen, herrscht seinen Portier an: "Wie können Sie den Mann wegschicken?" und sagt zum Wanderer dann: "Aber selbstverständlich können wir Ihnen ein Einzelzimmer geben."
Wie macht er das? Nun, der Leser ahnt es wahrscheinlich:
Der Hoteldirektor bittet den Gast aus Zimmer 1 in Zimmer 2 umzuziehen, den Gast aus Zimmer 2 in Zimmer 3, den aus Zimmer 3 in Zimmer 4 usw. Die Gäste sind alle die Liebenswürdigkeit selbst und wechseln auf diese Weise die Zimmer. Zimmer 1 ist dann freigeworden. In dieses Zimmer zieht der neue Gast. Alle übrigen Gäste sind aber ebenfalls in Einzelzimmern untergebracht. Nun kommt ein Bus mit *30 neuen Gästen*. Portier winkt ab, Direktor greift ein. Natürlich werden alle Gäste um je 30 Zimmer weitergerückt, und die Busgesellschaft erhält die ersten 30 Zimmer.

Dieser Abend ist sehr unruhig, denn nun fährt ein Bus mit abzählbar unendlich vielen Insassen vor. Was tun? Unser braver Portier ist verzweifelt, der bewundernswerte Direktor hat aber wieder sofort eine Lösung. Sie auch? Natürlich wird wieder umgezogen. Aber wie?
Mit ausgesucht höflichen Worten und dem Versprechen eines kleinen Preisnachlasses auf das Frühstücksei, veranlasst er die folgende Nachtwanderung: Der Gast aus Zimmer 1 zieht in Zimmer 2, der aus 2 in 4, der aus 3 in 6, kurz: der Gast aus Zimmer n zieht in Zimmer 2n. Es bleiben die Zimmer 1, 3, 5, 7, ... frei, in die dann die abzählbar unendlich vielen Businsassen ziehen.

Schließlich kommen *abzählbar unendlich viele Busse mit je abzählbar unendlich vielen Personen* an. Unser Portier hat inzwischen gekündigt. Der unschlagbare Direktor dagegen stellt alle Businsassen in Form eines "unendlichen Rechtecks" auf dem Vorplatz auf, siehe Figur auf der Rückseite, und verteilt rote Nummern 1, 2, 3, ... nach dem Cantorschen Diagonalverfahren, d.h. entlang des gezeichneten Streckenzuges.
Damit sind die neuen Gäste mit 1, 2, 3, ... nummeriert, und das vorangehende Verfahren kann angewendet werden.

Zwar wird erzählt, dass einige Gäste schon gar nicht mehr ganz in ihre neuen Zimmer gegangen wären, sondern frierend oder in Decken gehüllt auf den nächsten Umzug gewartet hätten, doch muß dies als üble Verleumdung abgetan werden. Auch dass das Gerücht, dass der Portier anschließend schreiend in den Wald gelaufen sei und geschrien habe: "Nur kein Kontinuum!", muss in das Reich der Fabel verwiesen werden.



Die Geschichte lässt sich mathematisch viel kürzer schreiben: Mit der Abkürzung $\aleph_0$ (Aleph Null) für abzählbar unendlich gilt:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0, \qquad \aleph_0 + 30 = \aleph_0, \qquad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

<u>Aufgabe:</u>

Diskutieren Sie – unter Berücksichtigung des Hilbertschen Hotels – die Fragestellung, ob es mehr rationale als natürliche Zahlen gibt.

Und wie ist das, wenn wir die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ vergleichen?

Konvergenz von Zahlenfolgen

Definition

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt konvergent gegen den Grenzwert g $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{R} \ \forall n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt divergent.

Beispiele

1.) $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ konv. gegen 0

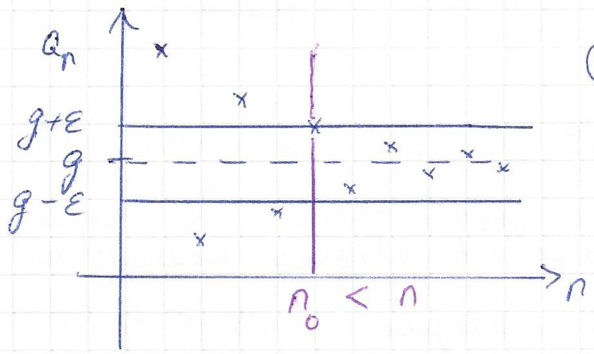
2.) $a_n = q^n$ konv. gegen 0, falls $|q| < 1$

3.) $a_n = n^2$: $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ divergent

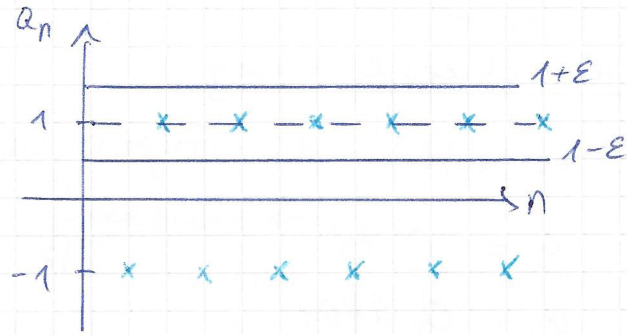
4.) $a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$ divergent.

Veranschaulichung:

1



2



Konvergenz ist eine an einem Grenzwert annähernde Zahlenfolge.

Sprachliche Definition:

Eine Zahlenfolge konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn fast alle Folgeglieder in jeder Umgebung des Grenzwerts liegen.

Fast alle bedeutet alle, bis auf endlich viele.

zu 1: 5 Folgeglieder außerhalb, fast alle in der Umg.

zu 2: Unendlich viele Folgeglieder innerhalb und außerhalb der Umgebung.

Konvergenzbeweise:

1.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0$

QED

2.) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0, \quad |q| < 1$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

$$\iff \ln|q|^n < \ln(\varepsilon)$$

$$\iff n \cdot \ln|q| < \ln(\varepsilon)$$

$$\iff n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} =: n_0$$

QED

Veranschaulichung:

Wir betrachten die Folge $(0.99^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$a_1 = 0.99$

$a_2 = 0.9801$

$a_3 = 0.9702$

$a_4 = 0.9605$

$a_5 = 0.9509$

Die Folge ist streng monoton fallend. Wegen $0.99 < 1$ ist die Folge gegen 0 konv.

Ab welchem Index gilt:

$$|a_n - 0| < \frac{1}{10}$$

bzw. $a_n < 0.1$?

$a_n = 0.99^n, \quad n_0 = \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.99)} = 229.11$

$a_{230} = 0.99^{230} = 0.0991\ldots < 0.1, \quad a_{229} = 0.99^{229} = 0.1001 > 0.1$

Übung (zum Selberrechnen)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{2n+1}{3n-2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{(2n+1)\cdot 3 - 2\cdot(3n-2)}{3(3n-2)} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{6n} + 3 - \cancel{6n} + 4}{3(3n-2)} \right|$$

$$= \left| \frac{7}{3(3n-2)} \right| = \frac{7}{3(3n-2)} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{7}{3\cdot\varepsilon} < 3n-2$$

$$\iff \frac{7}{3\cdot\varepsilon} + 2 < 3n$$

$$\iff \underbrace{\frac{7}{9\cdot\varepsilon} + \frac{2}{3}}_{=: n_0} < n$$

QED

Ab welchem Index sind die Folgeglieder in einer $\frac{1}{10}$-Umgebung des Grenzwerts $\frac{2}{3}$.

$$U_{\frac{1}{10}}\left(\frac{2}{3}\right) = \left]\frac{2}{3} - \frac{1}{10}, \frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right[= \left]\frac{17}{30}, \frac{23}{30}\right[$$

$$=]0.5\overline{6}, 0.7\overline{6}[.$$

$$n_0 = \frac{7}{9\cdot\frac{1}{10}} + \frac{2}{3} = \frac{70}{9} + \frac{2}{3} = \frac{70}{9} + \frac{6}{9} = \frac{76}{9} = 8.\overline{4}$$

Probe:

$$a_9 = \frac{2\cdot 9+1}{3\cdot 9-2} = \frac{19}{25} = 0.76 \in U_{\frac{1}{10}}\left(\frac{2}{3}\right).$$

$$a_8 = \frac{2\cdot 8+1}{3\cdot 8-2} = \frac{17}{22} = 0.772\ldots \notin U_{\frac{1}{10}}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Hinführung zu den Grenzwertsätzen

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| = \left|\frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1}$$

$$\leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0.$$

QED.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{10} = 0.1$.

Dann gilt $n_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 10$.

Betrachte: $a_{11} = \frac{11}{11^2+1} = \frac{11}{121+1} = \frac{11}{122}$

$$a_{11} = \frac{11}{122} = 0.0901 < 0.1 = \frac{1}{10}.$$

$$a_{10} = \frac{10}{101} < \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \checkmark$$

$$a_9 = \frac{9}{82} = 0.109 > 0.1$$

Beispiele zur Frage- oder Aufgabenstellung:

- Beweise die Konvergenz
- Berechne zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ den passenden Index n_0
- Mache eine Probe.
- Zeige, dass fast alle a_n in der $\frac{1}{10}$-Umgebung des Grenzwertes liegen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1, \quad n \neq 1$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2-1} - 1\right| = \left|\frac{n^2+1-(n^2-1)}{n^2-1}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}+1}{n^2-1}\right| = \left|\frac{2}{n^2-1}\right|$$

$$= \frac{2}{n^2-1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < n^2+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}}_{=:n_0} < n$$

QED.

Mit $\varepsilon = \frac{1}{10}$ folgt: $n_0 = \sqrt{20-1} = \sqrt{19} = 4.3$.

Für $n > n_0$ d.h. $n \geq 5$.

$$a_5 = \frac{26}{24} = 1.08, \quad a_5 - 1 = 0.08 < 0.1 \checkmark$$

$$a_4 = \frac{17}{15} = 1.13, \quad a_4 - 1 = 0.13 > 0.1 \checkmark$$

04.12.24

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim M = 4$$

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} : a+b+c+d=0 \right\} \subsetneq M$$

$$\dim N = 3$$

$$a+b+c = -d$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$ Lineare Hülle = Menge aller linearen Kombinationen

$$B_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$ Menge

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1-z_2-z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \notin N$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

3 Matrizen sind linear unabhängig

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -12 \end{pmatrix} \in N$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$$

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b+c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

$\Rightarrow$ $a, b, c = 3$ Dimension

$$f(x) = a_0 + a_1 x + x^2$$

quadratische Funktion

Polynom 2. Grades

$$\Pi_2 = \{a_0 + a_1 x + x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\} \subset \Pi_2$$

$$(z_1 + z_2 + z_3) + (z_2 + z_3)x + z_3 \cdot x^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

$$\dim \Pi_2 = 3$$

Aufgabe 1.

Gegeben sind folgende Zahlenfolgen: a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, b) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$

c) $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 2$ d) $a_n = \frac{4n+1}{8n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$

a) Beweisen Sie die Konvergenz.

b) Berechnen Sie zur $\varepsilon = \frac{1}{10}$ den passenden Index n_0.

c) Zeigen Sie, dass fast alle a_n in der ε – Umgebung des Grenzwertes liegen.

05.12.24

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+0}{\infty+0} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$$

Beweis:

$a_n \leq b_n < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{n+1}{n^2+1} - 0\right| = \left|\frac{n+1}{n^2+1}\right| = \frac{n+1}{n^2+1} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon} =: n_0$$

Q.E.D.

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \quad : \quad n_0 = \frac{2}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 20$$

$$a_{21} = \frac{21+1}{21^2+1} = \frac{22}{442} = 0{,}0497 < 0{,}1$$

$$\frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon \iff n+1 < \varepsilon(n^2+1) = \varepsilon n^2 + \varepsilon$$

$$\iff 0 < \varepsilon n^2 - n - 1 + \varepsilon$$

$$\iff 0 < \varepsilon\left(n^2 - \frac{1}{\varepsilon} n + \frac{1}{4\varepsilon^2}\right) - 1 + \varepsilon - \frac{1}{4\varepsilon}$$

$$\iff 0 < \varepsilon\left(n - \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 - 1 + \varepsilon - \frac{1}{4\varepsilon}$$

$$\iff 1 + \frac{1}{4\varepsilon} - \varepsilon < \varepsilon\left(n - \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2} - 1 < \left(n - \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$$

$$\iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2} - 1} < n - \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$=: n_0 \quad \iff \boxed{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2} - 1} + \frac{1}{2\varepsilon}} < n$$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$

$$n_0 = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} + \frac{1}{4\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2} - 1} + \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)} = \sqrt{34} + 5 \approx 10{,}8$$

$$a_{11} = \frac{11+1}{11^2+1} = \frac{12}{122} = 0{,}098 < 0{,}1$$

Klausur

Analysis

1. Bijektiv
2. Geom. Folge | Reihe
3. Konvergenz

Vektorrechnung:

4. Dimension, l.u./l.a, Basis, Erzeugende System

UR: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$, polynome ($\Pi_2$), Matrize ($M$)

$\downarrow$

magischer Quadrat

$$\frac{n^3+1}{n^2+4} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \frac{n + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{\infty + 0}{1+0}$$ divergent | uneigentlich konvergiert

$$\frac{n^2}{n^3+1} \longrightarrow \frac{0}{\infty + 1} = 0$$

HA bis Mittwoch

Hausaufgaben- und Übungsblatt

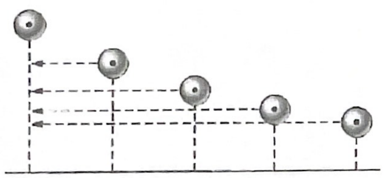
Thema: Konvergenz von Folgen

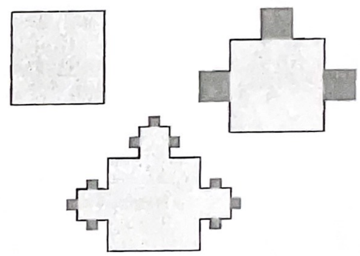
1. Geometrisches Wachstum:

a) Eine Stahlkugel, die aus 1 m Höhe vertikal auf eine Stahlplatte fällt, erreicht nach dem Auftreffen 95% der vorherigen Höhe.

1. Welche Höhe erreicht die Kugel nach dem fünften Aufschlag noch?
2. Welchen Weg hat sie bis zum fünften Aufschlag zurückgelegt?
3. Welchen Weg legt die Kugel insgesamt zurück?

b) Ein Quadrat der Seitenlänge 1 wächst wie im Bild angedeutet. Täglich kommt eine Generation neuer Quadrate hinzu. Die täglich hinzukommenden Quadrate haben nur noch ein Drittel der Seitenlänge der vorangegangenen Generation. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt den Grenzwert 1.5 m^2 hat.





2. Rekursiv definierte Folgen:

Gegeben ist die rekursiv definierte Folge (a_n) durch

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} - \frac{1}{4}, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Berechnen Sie die ersten Glieder der Folge mit dem TR.

b) Ist die Folge (a_n) konvergent? Wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

3. Die Bedeutung von ε und n_0:

Geben Sie für die genannten Folgen (a_n) einen Index $n_0(\varepsilon)$ an, ab dem $|a_n| < \varepsilon$ gilt. Berechnen Sie die Werte $n_0(0.1)$ und $n_0(0.01)$:

a) $\dfrac{1}{(n+2)^3}$ b) $\dfrac{n}{n^2+1}$ c) 0.99^n d) $\dfrac{1}{\ln(\ln(n))}$

4. Konvergenzkriterien:

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Beschränktheit und Konvergenz, und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Benutzen Sie die Grenzwertsätze, das Einschnürungsprinzip oder das Vergleichskriterium.

a) $\dfrac{n^4+n^2+1}{n^2+1}$ b) $10 + 0.5^n$ c) $n^{-1} \cdot \arctan n$ d) $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Übungen zu unbestimmten Ausdrücken

1. Berechnen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right) = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{9n^2+2n+1}-3n \overset{[\infty-\infty]}{=} \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

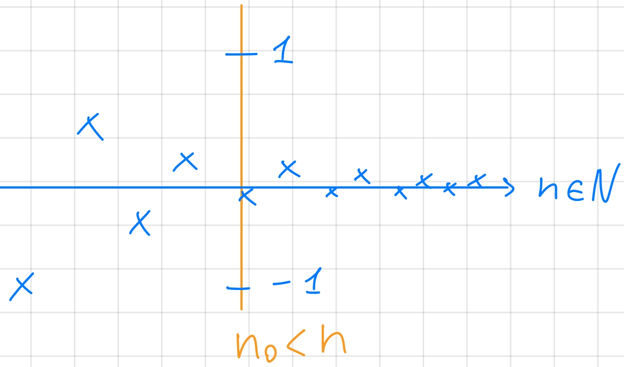
2. Berechnen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{9-\frac{1}{n}}-3\right)$$

09.12.24

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} : -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$



$\frac{1}{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}}$ $\frac{\left[\frac{1}{0}\right]}{}$ $: -1, 2, -3, 4, -5$

nicht uneigentlich konvergent
divergent

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}$ $: -1, -2, -3, -4, -5$

divergen
uneigentlich konvergent gegen $-\infty$

$\left[\frac{1}{0-}\right]$

$$\boxed{\frac{1}{0-} = -\infty \qquad \frac{1}{0+} = +\infty \qquad \frac{1}{0} \text{ nicht definiert}}$$

$a_n = \frac{1}{n}$:

$\longrightarrow 0$

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}$

$\left[\frac{1}{0+}\right]$

Übung $a_n = \dfrac{2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}} = \dfrac{2}{\frac{1-n}{n^2}} = \dfrac{2n^2}{1-n} = \dfrac{2n}{\frac{1}{n}-1} \longrightarrow \dfrac{\infty}{0-1} = -\infty$

uneigentlich konvergiert gegen $-\infty$

$a_n: -8; -9; -10{,}66; -12{,}5; -14{,}4; -16{,}33$

$n < n^2$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$

$0 > \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$

$a_n = \dfrac{2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}} \xrightarrow{\left[\frac{2}{0-}\right]} -\infty$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow{[\infty-\infty]} 0$

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \xrightarrow{[\infty \cdot 0]} ?$

$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2} \xrightarrow{[\infty-\infty]}$

$(a-b) \cdot (a+b) = a^2-b^2$

$\dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \dfrac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$a_n = n \cdot \left(\sqrt{4+\frac{1}{n}} - 2\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \dfrac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)} = \dfrac{n\left(4+\frac{1}{n}-4\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{4}$

$a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+4} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \dfrac{1+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}} \xrightarrow[n\to\infty]{\left[\frac{1}{0+}\right]} \infty$ $\quad :n^3$

$a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+4} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \dfrac{n+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\infty+0}{1+0} = \dfrac{\infty}{1} = \infty$ $\quad \cdot n^2$

$a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+4} \geq \dfrac{n^3+0}{n^2+n^2} = \dfrac{n^3}{2n^2} = \dfrac{n}{2} =: b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \infty \;:\; \cancel{\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \infty} \;\vee\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

oder

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

Gauß Formel

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}$$

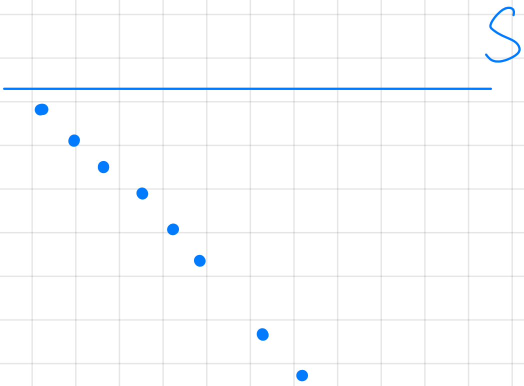
10.12.24

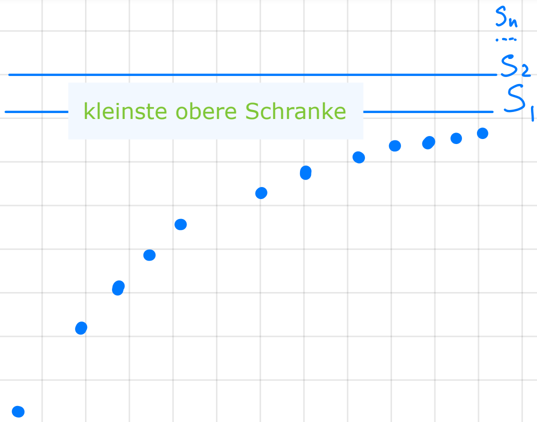
Unbestimmte Ausdrücke: $\infty \cdot 0, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$

$$a_n = (-1)^n$$ beschränkt, aber divergent

$$a_n = n^2$$ monoton, aber divergent

(a_n) beschränkt nach oben und monoton steigend





Monotoniesatz: Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{\underbrace{n^2+2n}_{>0}} > 1 + 0 = 1$$

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_{n+1} > a_n$, d.h. (a_n) ist (streng) monoton steigend

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{\underbrace{n+1}_{>0}} < 1$$

2) $a_n < 1$, d.h. a_n ist nach oben beschränkt durch 1

Also ist (a_n) konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

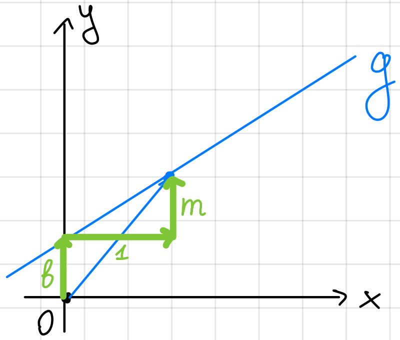
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 \quad , \quad a_1 = 1 \qquad 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8} \qquad a_n < 2 \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \implies a_{n+1} > a_n$$

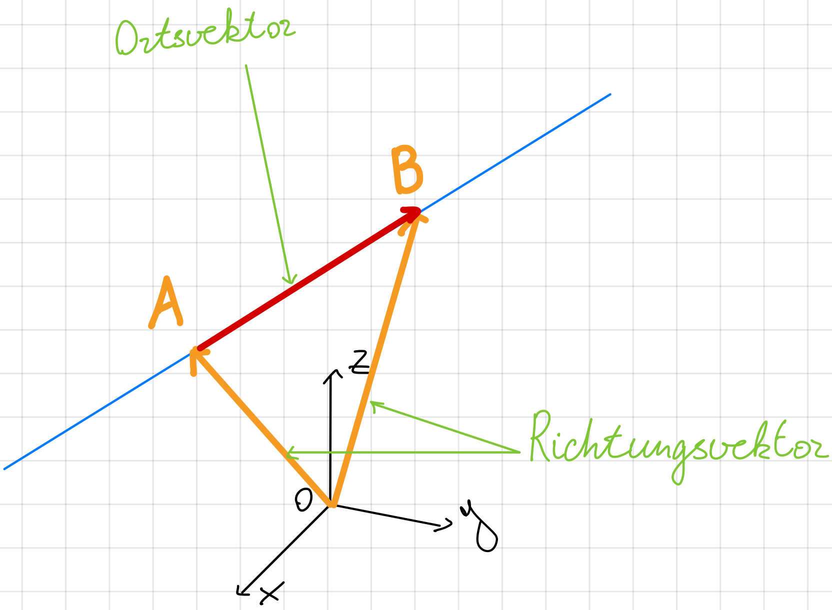
Gerade

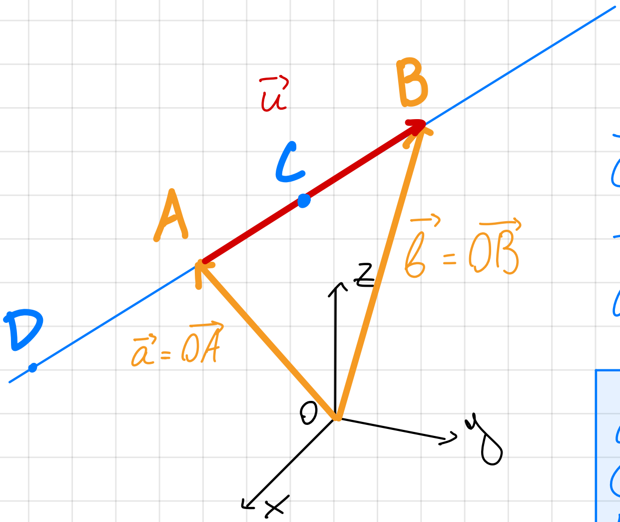
11.12.2024

$$y = mx + b$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$





$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{u}$$

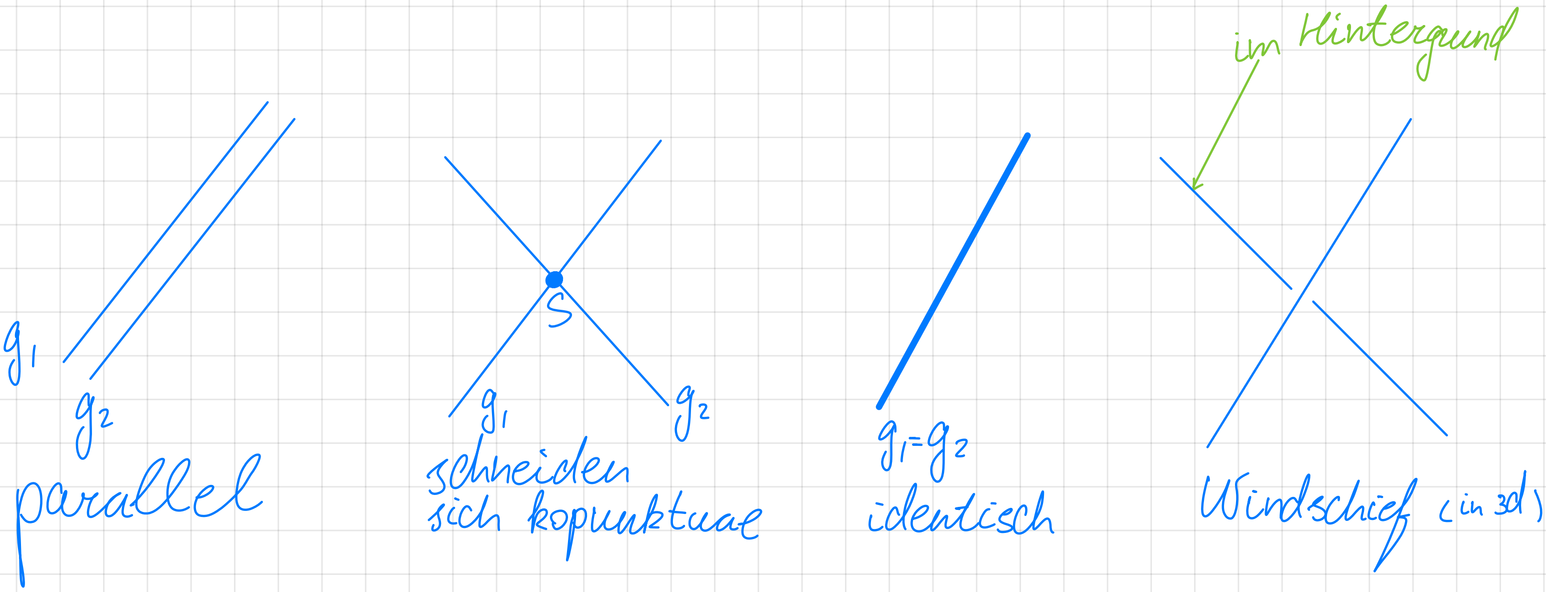
$$\vec{d} = \vec{a} - 1 \cdot \vec{u}$$

$$\boxed{g: \vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot \vec{u} \quad , \quad r \in \mathbb{R}}$$

vektoriale Darstellung einer Gerade

$A(1;2;0) \quad B(3;5;2) \quad A,B \in \mathbb{R}^3$

$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



$A(-7;-5;8)$

$g: \vec{x}(z) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$z \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$z \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

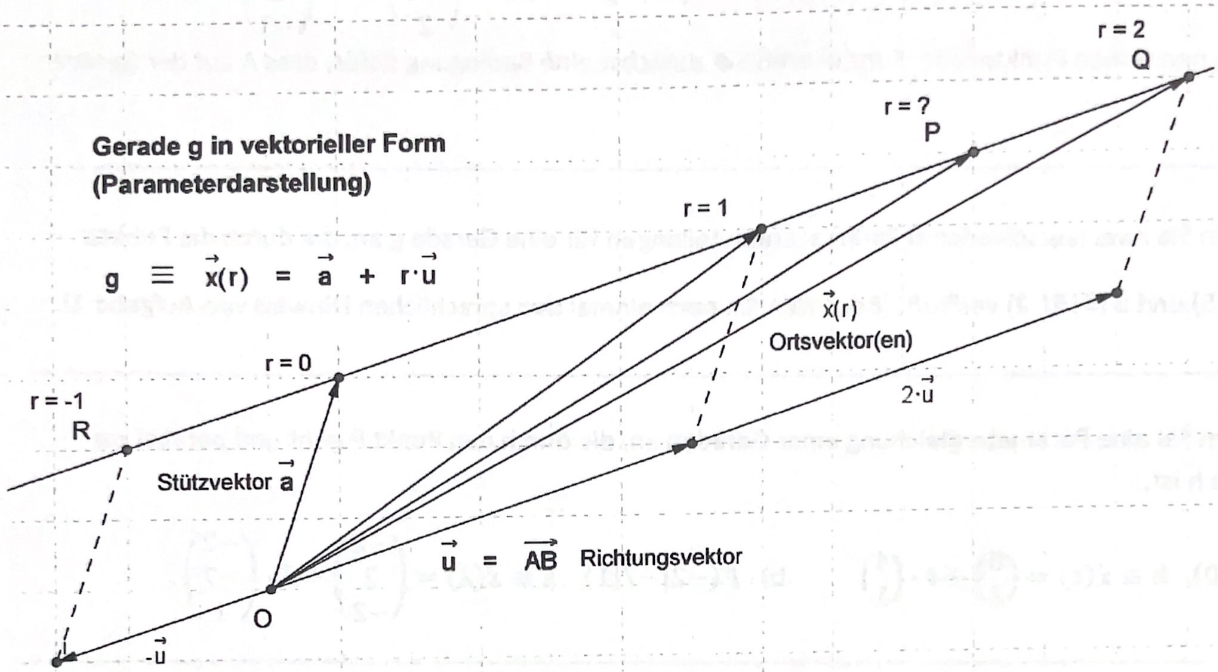
$5z = -10 \Rightarrow z = -2$

$2z = -4 \Rightarrow z = -2$

$-3z = 6 \Rightarrow z = -2$

A liegt auf der Geraden

$A \in g$



1. Ist g eine **Gerade** und sind A und B zwei Punkte von g, so gilt: Ein beliebiger Punkt P von g hat den Ortsvektor $\vec{p} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$, weil die Punkte A, B und P auf der Geraden liegen, bzw. weil die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ kollinear sind.

Allgemein nennt man die Gleichung $\vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ eine **Geradengleichung in Parameterform** der Geraden g (mit Parameter r). [Sprachlicher Hinweis: Machen Sie sich klar, dass der unbestimmte Artikel ***eine*** **hier richtig ist.]**

Welche Punkte liegen bei $r = 0$ und $r = 1$? Welcher Parameter r gehört zum Punkt P?

---

2. In der Analysis nennt man eine Gleichung der Form $y = m \cdot x + n$ eine lineare Funktion, bzw. den Graph der linearen Funktion eine Gerade. Geben Sie zu dieser Geraden die vektorielle Darstellung an. Was sind in diesem Fall Stützvektor, Richtungsvektor und Parameter?

---

3. **Die beiden Gleichungen des linearen Gleichungssystems (LGS, vgl. Kap. 1) der Form**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

können als Schnittpunkte von Geraden interpretiert werden. Machen Sie jetzt (noch einmal) eine Aussage über die Anzahl der Elemente der Lösungsmenge.

---

4. Prüfen Sie, ob der Punkt A (-7|-5|8) auf der Geraden $g \equiv \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt? Diese Aufgabe nennt man **Punktprobe.** Formulieren Sie zunächst eine Bedingung dafür, dass A auf der Geraden liegt.

---

5. Geben Sie zwei (verschiedene) Parameterdarstellungen für eine Gerade g an, die durch die Punkte A (1|-2|5) und B (4|6|-2) verläuft. [Beachten Sie noch einmal den sprachlichen Hinweis von Aufgabe 1].

---

6. Geben Sie eine Parametergleichung einer Geraden an, die durch den Punkt P geht und parallel zur Geraden h ist.

$g \equiv \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + \lambda)$

a) $P(0|0)$, $h \equiv \vec{x}(t) = \binom{0}{2} + t \cdot \binom{4}{1}$ b) $P(-2|-7|1)$, $h \equiv \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$g \equiv \vec{x}(t) = \binom{0}{0} + t \binom{4}{1}$

---

7. a) Geben Sie eine Parametergleichung von den beiden Winkelhalbierenden zwischen der x_1-Achse und der x_2-Achse in einem ebenen Koordinatensystem an.

b) Welche besondere Gerade wird durch die Parametergleichung $g \equiv \vec{x}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben?

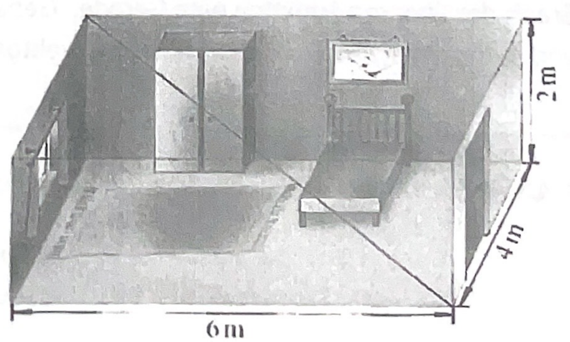
---

8. Zeigen Sie am Beispiel von $g \equiv \vec{x}(\vartheta) = \binom{3}{2} + \vartheta \cdot \binom{4}{1}$, wie man aus einer Parametergleichung einer Geraden die Steigung und den Abschnitt auf der y-Achse von g bestimmen kann.

---

9. Geben Sie eine Parametergleichung derjenigen Geraden an, die durch die Raumdiagonale im nebenstehenden Bild festgelegt ist.

Legen Sie zunächst ein geeignetes Koordinatensystem fest.



---

10. Beantworten Sie die Frage: „Was ist eine Gerade?“

$A(1;-2;5) \quad B(4;6;-2)$

$\vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$

$g_1: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

$g_2: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g: \vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

12.12.24

$w_0 = 0$

$w_1 = 3$

$w_2 = 0{,}94 \cdot w_1 = 2{,}82$

$w_3 = 2{,}6508$

$w_4 = 2{,}491752$

$\sum_{k=0}^{\infty} w$

$w_{n+1} = w_n \cdot 0{,}96 + 3$

$g = g \cdot 0{,}96 + 3$

$0{,}04 g = 3$

$g = 75$

$w_1 = 3$

$w_2 = 5{,}88$

$w_3 = 8{,}6448$

$w_4 = 11{,}299$

$w_5 = 13{,}847$

$w_n =$

$w_5 = 0{,}96(0{,}96(0{,}96(0{,}96 \cdot 3 + 3) + 3) + 3) + 3 =$

$= 3 + 0{,}96 \cdot 3 + 0{,}96 \cdot 0{,}96 \cdot 3 + 0{,}96^3 \cdot 3 + 0{,}96^4 \cdot 3$

$0{,}96^0 \cdot 3 + 0{,}96^1 \cdot 3 + 0{,}96^2 \cdot 3 + 0{,}96^3 \cdot 3^n + 0{,}96^4 \cdot 3$

$w_n = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}96^{k-1}$

$w_n = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}96^{k-1} = 3 \cdot \frac{1-(0{,}96)^n}{1-0{,}96} = \frac{1-0{,}96^n}{1-0{,}96} \cdot 3$

$\sum_{k=0}^{n-1} 0{,}96^k$

$\lim_{n\to\infty} w_n = 3 \cdot \frac{1-0{,}96^n}{1-0{,}96} = \frac{1-0}{0{,}04} \cdot 3 = 75 - 3$

$$w_0 = 0$$

$$w_1 = 3\frac{96}{100}$$

$$w_2 = \left(3\,\frac{96}{100} + 3\right)\cdot\frac{96}{100} = 3\left(\frac{96}{100}\right)^2 + 3\left(\frac{96}{100}\right)$$

$$w_3 = \left(3\left(\frac{96}{100}\right)^2 + 3\left(\frac{96}{100}\right) + 3\right)\cdot\frac{96}{100}$$

$$w_n = 3\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{96}{100}\right)^k = 3\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{96}{100}\right)^{n+1}}{1-\frac{96}{100}} - 1\right)$$

$$w_{31} \approx 51{,}7$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 3\left(\frac{1}{1-\frac{96}{100}} - 1\right) = 72$$

$$w_{n+1} = 0{,}96(w_n + 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$g = 0{,}96(g+3)$$

$$0{,}04g = 0{,}96\cdot 3$$

$$g = \frac{0{,}96\cdot 3}{0{,}04} = 72$$

$$a_n = \frac{2n+\sqrt{x}}{n^2} \searrow \qquad \frac{2n+\sqrt{n}}{n^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0$$

$$0 < a_n \leq 3$$

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{6n^2+13n+5}}_{>0} > 1 \Rightarrow \text{monoton steigend}$$

$$a_n \nearrow, \quad 0{,}6 < a_n < \frac{2}{3} \Rightarrow \text{monoton}$$

Leonhard Euler $\longleftrightarrow$ Bernoulli

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (1+a)^n \geq 1 + n\cdot a$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \geq \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

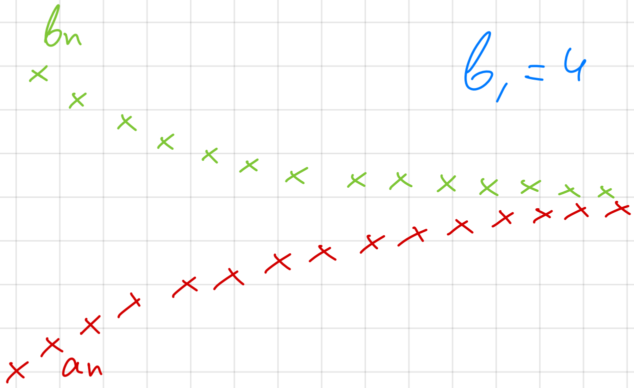
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \qquad a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \text{die Folge ist monoton steigend}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$$

$b_n \searrow$

$a_n \leq 4$

$b_1 = 4$



$$\sum_{k=0}^{n} 13\,000\ m^3 \cdot 1{,}07^k = 1\,700\,000\ m^3$$

$$13\,000\,m^3 \cdot \frac{1-1{,}07^{n+1}}{1-1{,}07} = 1\,700\,000\,m^3$$

$$\frac{1{,}7\cdot 10^6\,m^3}{1{,}3\cdot 10^4\,m^3} = \frac{1-1{,}07^{n+1}}{-0{,}07}$$

$$-\frac{119}{13} = 1 - 1{,}07^{n+1}$$

$$\frac{132}{13} = 1{,}07^{n+1}$$

$$n+1 = \log_{1{,}07}\left(\frac{132}{13}\right) = 34{,}2$$

im 34. Jahr
nach 33 Jahre

$n = 0$ 1. Jahr
$n = 1$ 2. Jahr

$n = n$ $n+1$ Jahr

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{k+2} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^k$$

Original-Klausur-Aufgaben

1. Geometrisches Wachstum (25 Punkte):

$q = \frac{13910}{13000} = 1{,}07 \quad a_n = 13\,000\, m^3 \cdot 1{,}07, \quad n \in \mathbb{N}_0$

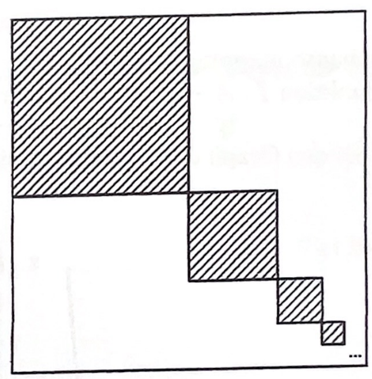
a) In einer Gemeinde fallen im ersten Jahr nach der Fertigstellung einer Mülldeponie 13000 m^3 Müll an, im zweiten Jahr 13910 m^3. Das Wachstum der anfallenden Müllmenge erfolgt geometrisch. Insgesamt bietet die Mülldeponie Raum für 1700000 m^3 (die Summe aller Müllmengen). Nach wie vielen Jahren muss die Deponie geschlossen werden?

b) Berechnen Sie:

$$\sum_{k=0}^{10} 4^k = \frac{1-4^{10+1}}{1-4}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^k - 1 + \frac{2}{5} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} - 1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{7} - 1 + \frac{2}{5} = -\frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-10+14}{35} = \frac{4}{35}$$

c) Gegeben ist die folgende Quadratetreppe. Das äußere Quadrat hat die Seitenlänge 1 und die Quadrate werden in jedem Schritt halbiert. Berechnen Sie den Umfang der schraffierten Fläche, wobei der Prozess gegen Unendlich gedacht ist.

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = 4(2-1) = 4$$



Viel Erfolg ♡ :)

2. Konvergenz von Folgen (25 Punkte):

a) Untersuchen Sie auf Konvergenz. Begründen Sie dabei Ihre Vorgehensweise.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2+3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$$

b) Stellen Sie das Monotoniekriterium anhand der Folge a_n dar.

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

c) Zeigen Sie, dass **fast alle** Folgeglieder der Folge von b) in **jeder** Umgebung von 2 liegen. Wie viele Folgeglieder liegen außerhalb des Intervalls $]1.9\ ,\ 2.1[$?

16.12.24

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{1-\frac{3}{4}}}_{\text{von } k=0} - \underbrace{1}_{k=0} \Big) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4} \right) = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{x+1}}{3^{x-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^x}{\frac{1}{3} \cdot 3^x} = 6 \Big(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \underbrace{1}_{k=0} - \underbrace{\frac{2}{3}}_{k=1} \Big) = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$$

1200 Bäume
20% sterben pro Jahr
+150 Bäume pro Jahr

1: $0{,}8(1200 + 150) = 1080$

2: $0{,}8(1080 + 150) = 984$

3: $0{,}8(0{,}8(0{,}8(1200+150)+150)+150)$

$0{,}8 \cdot 150 + 0{,}8^2 \cdot 150 + 0{,}8^3 \cdot 150 + 0{,}8^3 \cdot 1200$

$$N_n = 150 \cdot \sum_{k=1}^{n} 0{,}8^k + 0{,}8^n \cdot 1200$$

$$\lim_{n \to \infty} N_n = 150 \left(\frac{1}{1-0{,}8} - 1 \right) + 0 \cdot 1200 =$$

$$= 150 \cdot 4 + 0 = 600$$

$$b_0 = 1200$$

$$b_1 = \frac{4}{5} 1200 + 150$$

$$b_2 = \frac{4}{5} b_1 + 150 = \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5} \cdot 1200 + 150\right) + 150 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 1200 + \frac{4}{5} \cdot 150 + 150$$

$$b_{n+1} = \frac{4}{5} b_n + 150$$

$$N_n = 150 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0{,}8^k + 0{,}8^n \cdot 1200 = 0{,}8^n \cdot 150 \left(\sum_{k=0}^{n-1} 0{,}8^k + 8\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} N_n = 150 \cdot \frac{1}{1-0{,}8} \quad + 0 \cdot 1200 =$$

$$= 750$$

$$g = \frac{4}{5} g + 150$$

$$\frac{1}{5} g = 150$$

$$g = 750$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{[1^\infty]} e$$

$$\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^n \overset{[1^\infty]}{=} \left(\frac{n-2+4}{n-2}\right)^n = \left(1+\frac{4}{n-2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n-2}{4}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{m}\right)^n = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{4m+2} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^{4m}$$

$m = \frac{n-2}{4} \iff n = 4m+2$

$n \to \infty$
$m \to \infty$

$$\longrightarrow e^4 \cdot 1 = e^4$$

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} \overset{[\infty-\infty]}{=} \frac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1+1} = 1$$

3. Umkehrbarkeit (25 Punkte):

a) Geben Sie ohne Begründung an, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Es gilt

$$A := \{\texttt{Peter}, \texttt{Corinna}, \texttt{Lucas}, \texttt{Tim}\} \qquad B := \{\texttt{Netflix}, \texttt{Sky}, \texttt{Prime}, \texttt{Dazn}\}$$

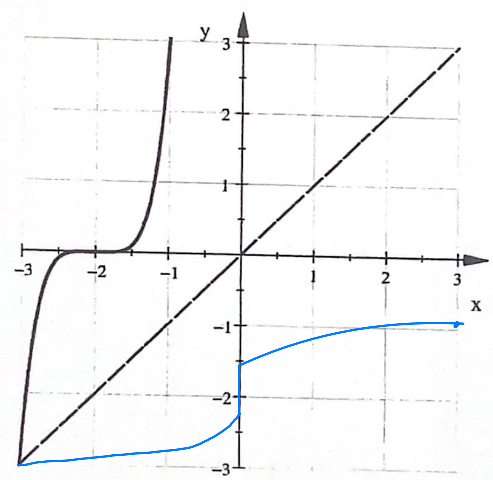
Die Funktion $f : A \to B$ ordnet jedem Familienmitglied ein Abo zu.

- Peter hat ein Abo von Netflix, Corinna eines von Sky, Lucas besitzt ein Abo von Prime und Tim von Dazn
- Peter hat ein Abo von Prime, Corinna besitzt ein Abo von Sky, Lucas und Tim teilen sich ein Abo von Netflix

müssen gleichmächtig sein

b) Da Tim zuhause ausgezogen ist, gilt jetzt $\tilde{A} := \{\texttt{Peter}, \texttt{Corinna}, \texttt{Lucas}\}$. Begründen Sie, weshalb die Funktion $f : \tilde{A} \to B$ nicht umkehrbar sein kann.

c) Skizzieren Sie den Graph der Umkehrfunktion in das Koordinatensystem.

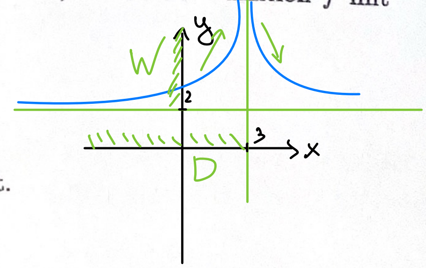


$D =]-\infty; 3[\qquad W =]2; \infty[$

d) Geben Sie einen Definitionsbereich und einen Wertebereich an, sodass die Funktion f mit dem Term

$$f(x) = 2 + \frac{1}{(x-3)^2}$$

umkehrbar ist. Geben Sie den Term $f^{-1}(x)$ explizit an.



Welche Monotonie hat f^{-1} in $]3, \infty[$? Eine Begründung reicht.

f ist in $D \nearrow \Rightarrow f$ ist in D injektiv

Sei $y > 2$ und $y = 2 + \frac{1}{(x-3)^2}$

$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{(x-3)^2}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = \frac{1}{y-2}$

$\Leftrightarrow |x-3| = \sqrt{\frac{1}{y-2}} \qquad 3 - x = \sqrt{\frac{1}{y-2}} \qquad x = 3 - \sqrt{\frac{1}{y-2}} = f^{-1}(y)$

4. Vektorrechnung (25 Punkte):

a) Die Menge M beschreibt einen Untervektorraum in $\mathbb{R}^4$.

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} \mid a, b, \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Geben Sie eine Basis und die Dimension von M an. Beweisen Sie, dass die Basisvektoren linear unabhängig sind.

b) Gegeben ist die Geradenschar g_a mit

$$g_a \equiv \vec{x_a}(r) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$$

- Welche besondere Lage hat g_a für $a = 0$
- Für welchen Wert a ist $R(-18|5|-5)$ ein Punkt von g_a.

c) Die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ sind nicht kollinear. Stellen Sie den gemeinsamen Punkt der Geraden

$$g \equiv \vec{x}(r) = \vec{v} + r \cdot \vec{u}, \qquad h \equiv \vec{x}(r) = 2 \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}$$

als Linearkombination von $\vec{u}, \vec{v}$ dar.

Viel Erfolg ♡ :)

a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim M = 2$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = M$$

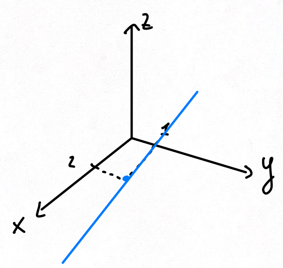
$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 = 0$$

d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind l.u.

---

b) $a = 0$

$$g_0 : \vec{x_0}(r) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$R(-18; 5; -5) \in g_a$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$r \begin{pmatrix} 5 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ a-5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5r = -20 \\ -a \cdot r = 4 \\ a \cdot r = a-5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} r = -4 \\ r = -\frac{4}{a} \\ r = \frac{a-5}{a} \end{matrix} \quad \begin{matrix} -4 = -\frac{4}{a} \\ -4 = \frac{1-5}{1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ -4 = -4 \end{matrix}$$

Also $R \in g_1$

c) $g: \vec{x}(r) = \vec{v} + r \cdot \vec{u}$

$h: \vec{x}(s) = 2\vec{u} + s \cdot \vec{v}$

$g = h$

$\vec{v} + r \cdot \vec{u} = 2\vec{u} + s \cdot \vec{v}$

$\vec{v} + r\vec{u} - 2\vec{u} - s \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$(r-2) \cdot \vec{u} + (1-s) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ Lineare Kombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$

! $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind kollinear $\Rightarrow$ linear unabhängig

$r - 2 = 0 \qquad r = 2$

$1 - s = 0 \qquad s = 1$

g $\vec{x}(2) = \vec{v} + 2 \cdot \vec{u}$

h $\vec{x}(1) = 2\vec{u} + \vec{v}$

17.12.24

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2n+2}{n+2}}{\frac{2n}{n+1}} = \frac{2(n+1)^2}{2n^2+4n} = \frac{2(n^2+2n+1)}{2(n^2+2n)} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$$

d.h. $a_{n+1} > a_n$, d.h. monoton steigend

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n}{n} = 2$$, d.h. (a_n) ist nach oben beschränkt

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

Nach dem Monotoniesatz konvergent, weil ...