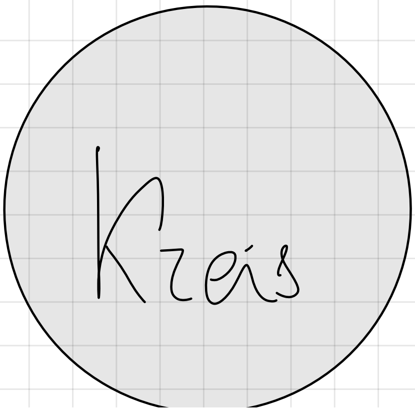
Die Bewegung einer punktförmigen Masse auf einem Kreis

punktförmig <--> ausgedehnt; Bezug: ein Körper

Bei einer Kreisbewegung eines ausgedehntes Körpers besitzt jeder Punkt des Körpers eine andere Geschwindigkeit, denn diese ist vom Abstand zu Drehpunkt abhängig. Deshalb besitzt jeder Punkt des Körpers auch eine eigene Energie und einen eigenen Impuls. Dieses physikalische Problem wird mithilfe des Trägheitsmoments beschrieben. Bei einem punktförmigen Körper tritt dieses Problem nicht auf.



Durchmesser D = 2R
R: Radius: Direkte Verbindung zum Zentrum C zu einem Punkt auf dem Kreisrand

Kreisumfang (U = 2πR)
Gradsystem (360° ist eine geometrische Einteilung des Kreises in gleichgroße Abschnitte / Sektoren)
Winkelgeschwindigkeit
Radiantsystem 2π = 2*3.14 = 6.28 (gibt die gleiche Information, wobei 2π entspricht 360° (^und=))
Tangente **an** den Kreis: Ein Grade, die den Kreis berührt und mit dem Radius an dieser Stelle einen Winkel von 90° hat.
Sekante: Sie schneidet den Kreis in zwei Punkten.
A = πR^2

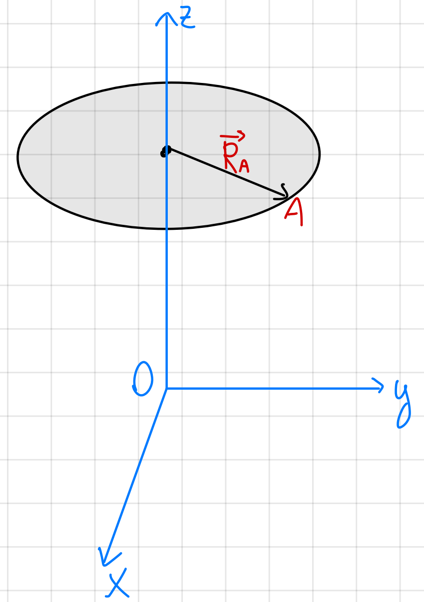
Aus der Gleichung U=2πR folgt U/R=konst. Dieses Verhältnis gilt für alle Kreise; d.h. der vollständige Kreiswinkel für einen ganz Kreisumfang hat den Wert U/R=Δ(fi) = 2π.
Wenn die auf dem Kreis zurückgelegte Strecke nur U/2 ist, dann gilt: U/2R = π; das ist nur die Hälfte vom vollständigen Kreiswinkel Δ(fi)$_{voll}$.

U/2 nennt man dann den Bogen b und aus der Gleichung U=2πR erhält man die Gleichung b=Δ(fi)R, wobei 0<=Δ(fi)<=2π

Basisgleichung; b=Δ(fi)R
Hier gibt es keinen Vektor!

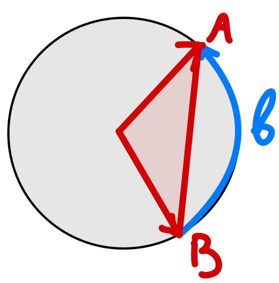
Eine direkte Verbindung vom Kreiszentrum zum Kreisrand hat eine Richtung und ist deshalb ein Vektor: R_A "Radiusvektor des Punktes A"

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} R_A(x) \\ R_A(y) \\ R_A(z) \end{pmatrix} m$$



Der Radius ist eigentlich nicht nur eine Zahl, mit Einheit, sondern er hat auch eine Richtung. In der Basisgleichgung für den Kreis sieht das dann so aus:

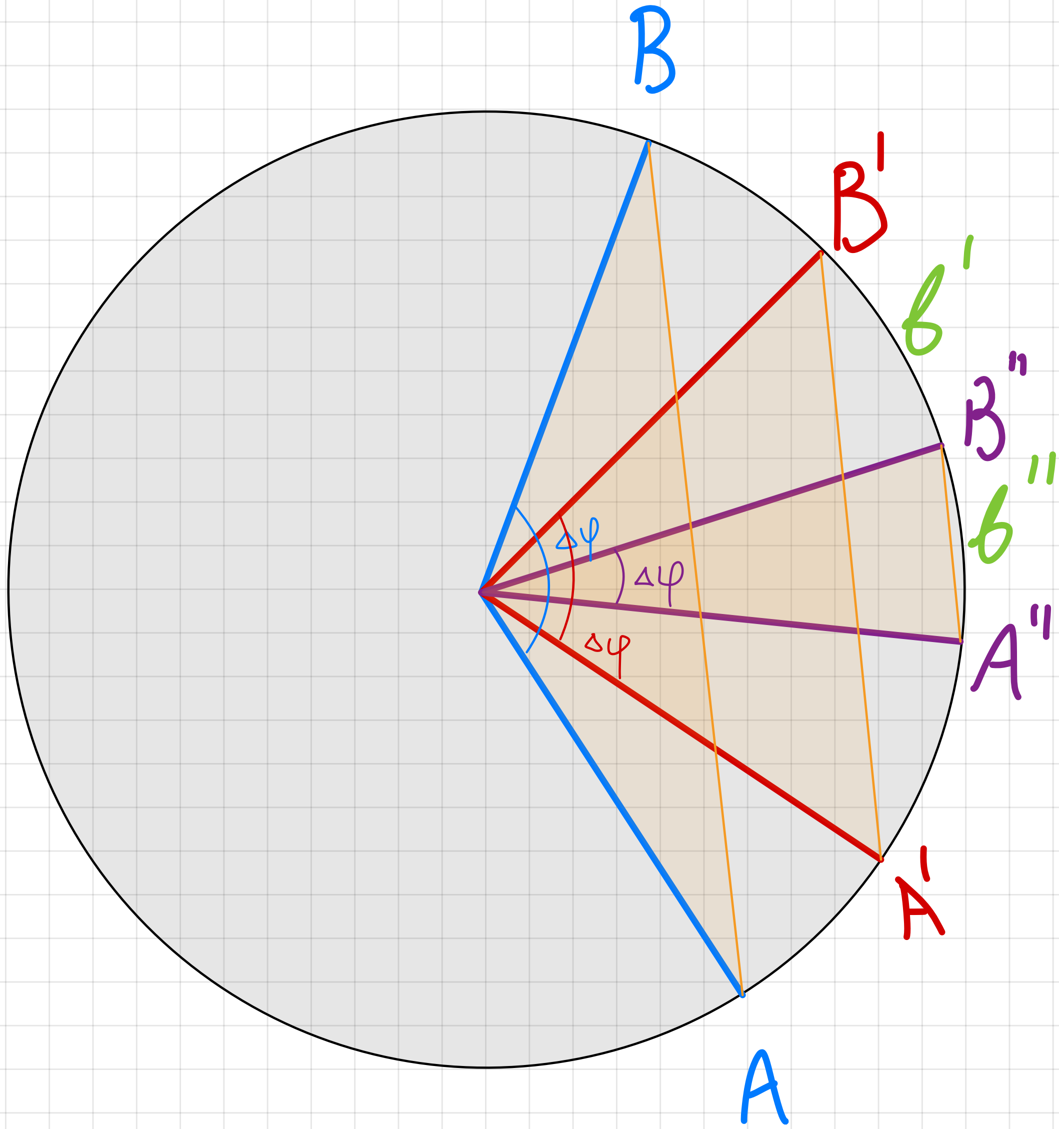
$$b = \Delta\varphi \vec{R}$$



Wenn das stimmt, dann muss b auch ein Vektor sein:

$$\vec{b} = \Delta\varphi \vec{R}$$

d.h. b und R sollten sie kollineare Vektoren sein.b liegt auf dem Kreisrand und R ist senkrecht zum Kreisrand; d.h. die können niemals kollinear sein!
Außerdem kann b kein Vektor sein, weil es keine direkte Verbindung von den Punkten A und B ist



Die Punkte A und B kommen immer näher zusammen. Dabei wird der Winkel Δ(fi) immer kleiner. Δ(fi) --> **d**(fi) ***(unendlich klein)***.

ΔR = AB --> dAB = dR
b --> db

dAB db befinden sich an der gleichen Stelle und sind identisch --> es gibt keinen Unterschied zwischen dAB und db

05.02.2025

Das bedeutet, dass auch db eine Vektoreigenschaft hat, d.h. es ist eine direkte Verbindung zwischen den Punkten A und B, die unendlich eng beieinander liegen: db

Wichtig: b (der Bogen) ist kein Vektor, weil er nicht die direkte Verbindung von Punkt A mit Punkt B ist.

Zusammenfassung:

U = (2 * п) * R <-- Mathe
^ Δ(fi); ein Winkel, der zu U gehört

b = Δ(fi) * R <-- skalare Gleichung

R **beginnt** bei C und **endet** bei A, B, ...
* R hat eine Richtung und ist die direkte Verbindung von zwei Punkten => R ist ein Vektor

Wenn man nur einen unendlich kleinen Winkel d(fi) hat (statt Δ(f)), dann gehört dazu ein unendlich kleiner Bogen db, der ein Vektor ist: db = Δd(fi)*R.

Diese Gleichung ist nur dann korrekt, wenn R und db kollineare Vektoren sind.
R beginnt bei C und endet am Kreisrand. db ist identisch dR. dR entsteht aus ΔR --> dR und ist deshalb senkrecht (orthogonal) zu R

R und db sind orthogonal => db = d(fi) * R ist falsch

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & a_x & b_x \\ e_y & a_y & b_y \\ e_z & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

Das Vektorprodukt erzeigt aus den Vektor A und B einen neuen Vektor C, der senkrecht auf A und B steht.

db = d(fi) x R (alle Vektoren) ist eine Gleichung, die genau die Eigenschaften, die die Vektoren db und R haben müssen, hat: db (senkrecht) R.

Wie kann man verstehen, dass d(fi) ein Vektor ist?
(fi) ist ein Winkel. Das kann nur ein Skalar sein. (fi) ist **niemals** ein Vektor.

12.02.2025

Wenn der Winkel Δ(fi) sehr klein wird gilt:
Δ(fi) --> **d**(fi) **"unendlich klein" = infinitesimal**

--> Δ(fi) (Vektor) --> d(fi) (Vektor)
--> b --> db (Vektor) Aus dem Bogen, der ein Skalar ist, wird ein Böglein, das ein Vektor ist
--> Aus der skalaren Gleichung b = Δ(fi)*R wird eine vektorielle Gleichung db(Vektor) = d(fi)(Vektor) x R(Vektor).

$$\overrightarrow{db} = d\,\vec{\phi} \times \vec{R}$$

Wie kann man dieser Gleichung für Berechnungen zu Kreisbewegung nutzen?

- Welche Strecke hat eine punktförmige Masse auf einem Kreis zurückgelegt?

b = Δ(fi) * R

- Welche Geschwindigkeit hat die punktförmige Masse?

Bei der Kreisbewegung gibt es zwei verschiedene Geschwindigkeiten.

1. Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\,\vec{\phi}}{dt}$$

in Radiant

in s^{-1}

2. Tangenzialgeschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)

$$\vec{V}_T = \frac{d\,\overrightarrow{b\cancel{s}}}{dt}$$

in $\frac{m}{s}$

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung sind das Momentangeschwindigkeiten, für die gilt:
Δt --> dt

$$\overrightarrow{db} = d\,\overrightarrow{\phi} \times \overrightarrow{R} \quad | : dt$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi} \times \vec{R}}{dt}$$

$$\vec{v}_R = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Übungsaufgabe:

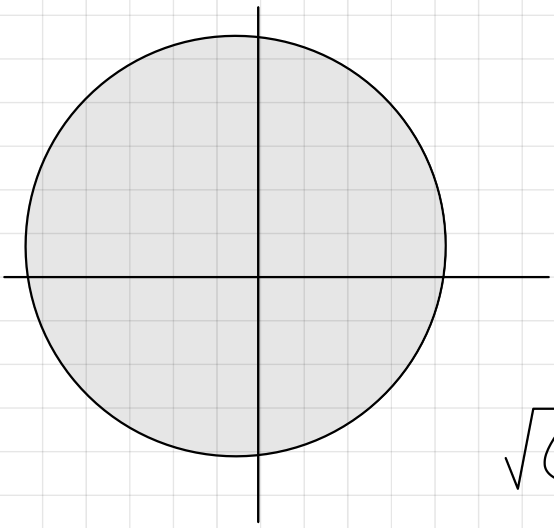
$A(3;4;6)$ zur Zeit $t_0 = 0s$

$B(2;y_B;6)$ zur Zeit $t_1 = 15s$

$D(x_D;y_D;6)$ zur Zeit $t_2 = 268{,}2s$

$y_B > 0$

$y_D = -y_B$



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$9 + 16 = R^2$$

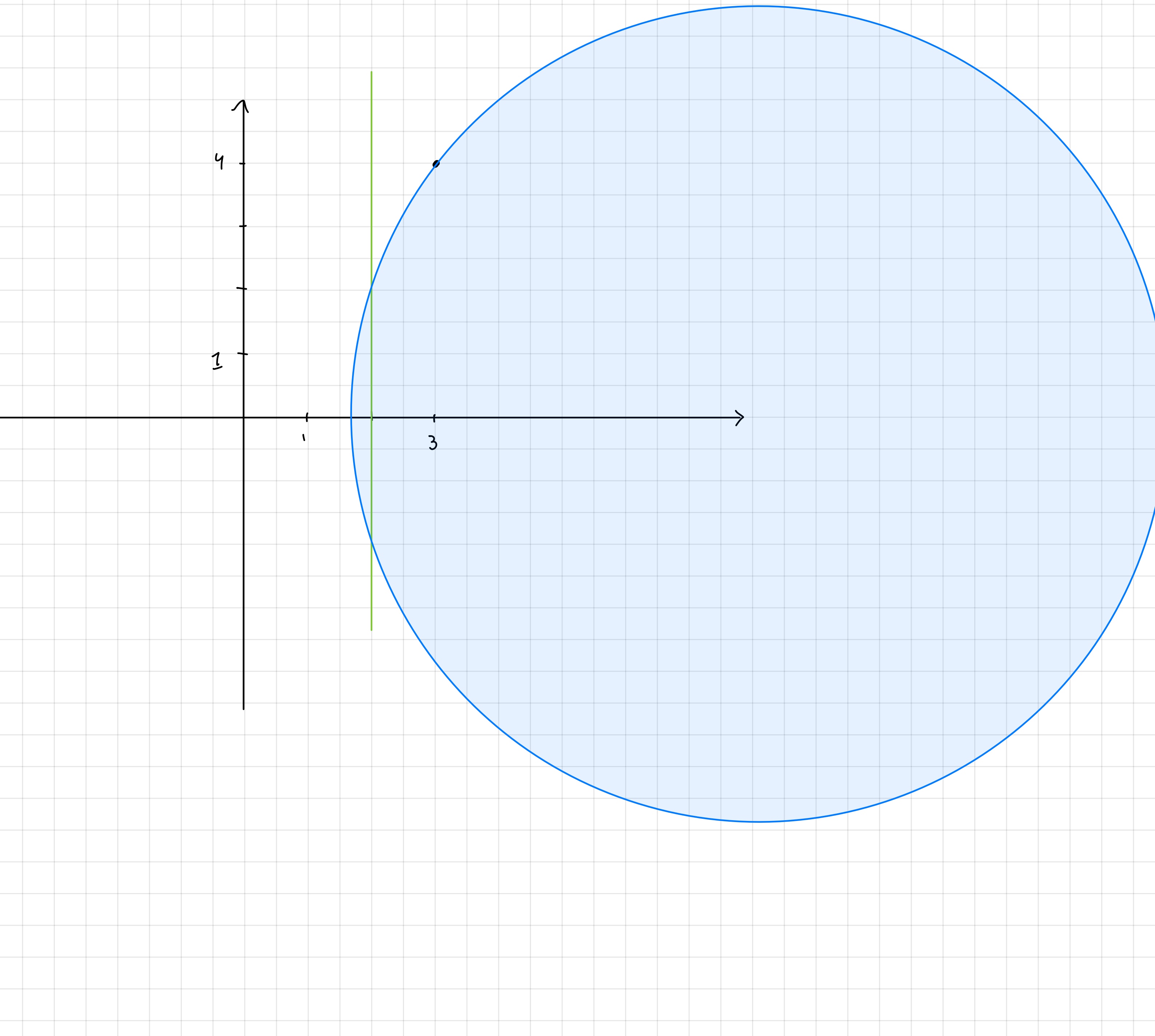
$$R = 5$$

$$C(x;y)$$

$$\sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = 5$$

$$2^2 + y_B^2 = 25$$

$$y = \sqrt{25-4} = \sqrt{21} =$$


4
1
1
3